Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Torsionswellen

Torsionswellen.

(Resultate Seite 48 bis 52.)

Erklärungen. Die von den Motoren entwickelten Effekte werden gewöhnlich durch Torsionswellen nach den arbeitenden Maschinen übertragen, und diese Wellen müssen so stark gemacht werden, dass sie sich unter der Einwirkung der Kräfte nicht merklich verändern.

Die Regeln zur Bestimmung der Durchmesser dieser Torsionswellen richten sich nach den Anforderungen, welche man an das Verhalten solcher Wellen unter der Einwirkung der Kräfte stellen kann. Man kann verlangen, dass alle Wellen, die aus dem gleichen Material herzustellen sind, unter der Einwirkung der Kräfte gleich stark in Anspruch genommen werden sollen, oder man kann die Forderung stellen, dass der Torsionswinkel unabhängig von der Dicke der Wellen, dagegen der Wellenlänge proportional werden soll; man kann endlich auch verlangen, dass der Torsionswinkel eines Wellenstückes von einer bestimmten Länge einen gewissen gegebenen Werth haben soll. Wir wollen nun für jede dieser drei Anforderungen die Wellendurchmesser zu bestimmen suchen.

Torsionswellen von gleicher Festigkeit. Nennen wir:

R in Centimetern die Länge des Hebelarmes, an welchem die verwindende Kraft wirkt,

P die Kraft in Kilogrammen,

d den Durchmesser der Welle in Centimetern,

T die an der Oberfläche der Welle eintretende Spannungsintensität.

Wenn wir nun die Forderung stellen, dass alle aus dem gleichen Material bestehenden Wellen gleich stark in Anspruch genommen werden sollen, so muss für alle Wellen T ein und denselben constanten Werth haben. In der Lehre von der Torsionsfestigkeit haben wir Seite 57 gefunden:

$$P\,R = \frac{T\,\pi}{16}\,d^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

woraus folgt:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{T\,\pi}}\;\sqrt[3]{P\,R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Diese Gleichung bestimmt hiermit Wellen von gleicher Festigkeit, wenn wir für ein bestimmtes Material $\sqrt[3]{\frac{16}{T\,\pi}}$ constant annehmen, und sie zeigt, dass diese Wellendurchmesser der Kubikwurzel aus dem Torsionsmoment P R proportional sind. Damit diese Wellen dem Torsionsmoment mit vollkommener Sicherheit widerstehen und sich selbst nicht merklich verwinden, darf die Spannungsintensität T nur einen gewissen aliquoten Theil von dem Torsionscoeffizienten Tabelle Seite 95 betragen. Wie gross T zu nehmen ist, um Dimensionen zu erhalten, wie sie bei bewährten Construktionen vorkommen, werden wir später angeben.

Diese Formel (2) ist zur Berechnung der Wellendurchmesser wohl ganz geeignet, wenn die Kraft P und die Länge des Hebelarmes R, an welchem sie wirkt, direkt gegeben sind oder leicht aufgefunden werden können. Dies ist z. B. der Fall, wenn der Halbmesser eines Rades und die am Umfange desselben auf Drehung wirkende Kraft gegeben sind, denn dann ist P R das Torsionsmoment, welchem eine mit dem Rade verbundene Welle ausgesetzt ist. Allein wenn es sich um die Construktion einer Welle handelt, ist gewöhnlich nur der in Pferdekräften N ausgedrückte Effekt, welchen die Welle übertragen soll und die Anzahl n ihrer Umdrehungen in einer Minute gegeben. Man muss daher eine Formel aufzustellen suchen, welche den Werth von d direkt durch N und n angibt. Eine solche Formel ergibt sich auf folgende Weise: Denken wir uns, die Welle, deren Durchmesser bestimmt werden soll, sei mit einem Rade von einem Halbmesser R versehen und die am Umfang des Rades wirkende Kraft sei P, ferner die Geschwindigkeit, mit welcher sich ein Punkt am Umfange des Rades bewegt, wenn die Welle in einer Minute n Umdrehungen macht, v Meter, so ist:

$$\left.\begin{aligned} 75\,N &= P\,v \\ v &= \frac{2\,R\,\pi\,n}{100 \times 60} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Durch Elimination von v findet man aus diesen zwei Gleichungen:

$$P\,R = \frac{100 \times 60 \times 75}{2\,\pi}\,\frac{N}{n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Hiermit ist also das Torsionsmoment durch N und n ausgedrückt und wenn wir dasselbe in (2) einführen, erhalten wir:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \times 100 \times 60 \times 75}{2\,T\,\pi^2}}\,\sqrt[3]{\frac{N}{n}} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Diese Formel gibt Dimensionen, die mit gut ausgeführten Construktionen übereinstimmen, wenn man setzt:

a) für Schmiedeeisen

$$\sqrt[3]{\frac{16 \times 100 \times 60 \times 75}{2\,T\,\pi^2}} = 12$$

T7000 = 86739 # □ Zoll
T3000 = 37174 # pro □"

b) für Gusseisen:

$$\sqrt[3]{\frac{16 \times 100 \times 60 \times 75}{2\ \mathrm{T}\ \pi^2}} = 16$$

Hieraus ergeben sich für T folgende Werthe:

$$\mathrm{T}\begin{cases}\text{für Schmiedeeisen} = 210 = 2602\,\#\ \text{pro}\ \square\ \text{Zoll} \\ \text{für Gusseisen} \quad = 90 = 1115\,\#\ \text{pro}\ \square\ \text{Zoll}\end{cases}$$

Die Torsionscoeffizienten für diese beiden Eisensorten sind aber nach Tabelle Seite 95 beziehungsweise T7000 und T3000. Es sind demnach die Wellen in der Wirklichkeit in Anspruch genommen: Schmiedeeisen-Wellen auf den $\frac{7000}{210} = 33^{\text{sten}}$, Gusseisen-Wellen auf den $\frac{3000}{90} = 33^{\text{sten}}$ Theil ihrer wirklichen Torsionsfestigkeit, d. h. diese Wellen würden erst dann abgewunden werden, wenn auf dieselben ein Torsionsmoment einwirkte, das 33 mal grösser wäre, als jenes ist, dem sie in der That ausgesetzt sind. Für obige Werthe von T findet man:

$$\text{für Schmiedeeisen} \quad \sqrt[3]{\frac{16}{\mathrm{T}\,\pi}} = 0{\cdot}29 = 0{\cdot}125 \text{ für Zoll + Pfer}$$

$$\text{für Gusseisen} \quad \sqrt[3]{\frac{16}{\mathrm{T}\,\pi}} = 0{\cdot}39 = 0{\cdot}166 \text{ d}^\text{o} \text{ d}^\text{o}$$

Mit diesen Zahlen werden nun die Formeln (2) und (5):

$$\left.\begin{aligned} d &= 0{\cdot}29\ \sqrt[3]{\mathrm{P\,R}} = 12\ \sqrt[3]{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{n}}} \text{ (Schmiedeeisen)} \quad 4{\cdot}555\ \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \text{ Zoll} \\ d &= 0{\cdot}39\ \sqrt[3]{\mathrm{P\,R}} = 16\ \sqrt[3]{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{n}}} \text{ (Gusseisen)} \quad 6{\cdot}07\ \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \text{ Zoll.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (6)$$

Berechnen wir ferner den Torsionswinkel, welcher in den Wellen eintritt, die nach diesen Regeln bestimmt werden.

Wir haben in der Theorie der Torsion, Seite 60, für den Torsionswinkel Θ^0 folgenden Ausdruck gefunden:

$$\Theta^0 = 16\ \frac{\mathrm{P\,R}}{\mathrm{G}}\ \frac{\mathrm{l}}{\mathrm{d}^4}\ \frac{360}{\pi^2} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

wobei l die Länge der Welle, G den Modulus der Elastizität des Materials für Torsion, Θ^0 den Torsionswinkel in Graden ausgedrückt, bedeutet. Allein nach der Regel (2) ist $P R = \frac{d^3 T \pi}{16}$. Setzt man diesen Werth in (7), so folgt:

$$\Theta^0 = \frac{16 \times 360 \times T}{16 \pi G} \frac{1}{d} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Nun ist zu setzen:

	T	G
für Schmiedeeisen	210	1000000 = 1239,357 ℔ pro □ Zoll
„ Gusseisen	90	400000 = 4956,543 ℔ pro □ Zoll

demnach wird:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für Schmiedeeisen} & \Theta^0 = \frac{1}{41} \frac{1}{d} \\ \text{„ Gusseisen} & \Theta^0 = \frac{1}{39} \frac{1}{d} \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Die nach der Regel (6) bestimmten Wellen von gleicher Festigkeit haben demnach, wie die Gleichungen (9) zeigen, die Eigenschaft, dass bei denselben der Torsionswinkel gross ausfällt, wenn der Wellendurchmesser klein ist. Dieselben sind also zwar gleich fest, aber die schwachen verwinden sich mehr als die starken. Ist die Länge l ungefähr 40 mal grösser als der Durchmesser, so beträgt der Torsionswinkel nahe einen Grad.

Wellen von gleicher Elastizität. Legen wir uns nun die Aufgabe vor, die Wellendurchmesser in der Art zu bestimmen, dass der Torsionswinkel von der Wellendicke nicht abhängt, aber der Wellenlänge proportional wird.

Der Ausdruck (7) für den Torsionswinkel zeigt, dass derselbe die Form $\Theta = \alpha \, l$ annimmt, wenn

$$\alpha = 16 \frac{P R}{G d^4} \frac{360}{\pi^2} = \text{Const.} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

gesetzt wird. Hieraus folgt:

$$d = \sqrt[4]{\frac{16 \times 360}{G \alpha \pi^2}} \sqrt[4]{P R} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

oder wenn wir vermittelst (4). Seite 136 $P R$ durch $\frac{N}{n}$ ausdrücken:

$$d = \sqrt[4]{\frac{16 \times 360 \times 100 \times 60 \times 75}{G \alpha \pi^2 \, 2 \pi}} \sqrt[4]{\frac{N}{n}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

Eine Vergleichung dieser Formeln (11) und (12) mit den Thatsachen der Wirklichkeit hat gezeigt, dass man setzen darf:

$$\text{für Schmiedeeisen } \sqrt[4]{\frac{16 \times 360 \times 100 \times 60 \times 75}{G\, \alpha\, \pi^2\, 2\, \pi}} = 12$$

und daraus folgt, weil für dieses Material $G = 1000000$:

$$\alpha = \frac{1}{547} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

und dann wird

$$\sqrt[4]{\frac{16 \times 360}{G\, \alpha\, \pi^2}} = 0\,75$$

Wir erhalten demnach schliesslich

$$\left.\begin{array}{l} d = 0\,75\, \sqrt[4]{P\, R} = 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}} \\ \Theta^{\circ} = \frac{1}{547} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Nach diesen Regeln erhalten wir also Wellen von gleicher Elastizität.

Der Form nach unterscheiden sich diese Ausdrücke für d von jenen (6), Seite 164, welche Wellen von gleicher Festigkeit bestimmen, nur dadurch, dass die vierten Wurzeln an die Stelle der dritten Wurzeln treten. Für $\frac{N}{n} = 1$ geben beide Regeln übereinstimmende Dimensionen. Ist dagegen $\frac{N}{n} > 1$ oder $\frac{N}{n} < 1$, so werden die gleich elastischen Wellen in ersterem Falle dünner, in letzterem Falle dicker als die Wellen von gleicher Festigkeit.

Wellen für einen gegebenen Torsionswinkel. Man kann endlich noch verlangen, dass der totale Torsionswinkel einer Welle von gegebener Länge einen bestimmten Werth haben soll. Für diese Forderung erhält man aus (7), Seite 164, zur Bestimmung des Durchmessers folgende Formel:

$$d = \sqrt[4]{\frac{16 \times 360}{G\, \pi^2}} \sqrt[4]{\frac{P\, R\, l}{\Theta^{\circ}}}$$

oder auch, wenn man $P\, R$ durch $\frac{N}{n}$ ausdrückt:

$$d = \sqrt[4]{\frac{16 \times 360 \times 100 \times 60 \times 75}{G\,\pi^2\,2\,\pi}}\sqrt[4]{\frac{N}{n}\,\frac{1}{\Theta^0}}$$

Setzt man $G = 1000000$, so findet man:

$$\left.\begin{aligned} d &= 0{\cdot}156\sqrt[4]{\frac{P\,R\,l}{\Theta^0}} \\ d &= 2{\cdot}5\sqrt[4]{\frac{N}{n}\,\frac{1}{\Theta^0}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots, \quad (15)$$

Axen-Construktionen.

(Resultate Seite 53 bis 55, Tafel X.)

Drehungsaxen, welche auf relative Festigkeit in Anspruch genommen sind.

Erklärungen. Um derlei Drehungsaxen zweckmässig zu construiren, muss man die Dimensionen und Formen derselben so zu bestimmen suchen, dass die Summe aus den Materialkosten und den Anfertigungskosten ein Minimum wird. Dies ist der Fall, wenn man einfache leicht ausführbare Formen wählt, die von den Körperformen von durchaus gleicher Festigkeit nur wenig abweichen. Man erhält solche Wellenformen, indem man die Dimensionen von einzelnen charakteristischen Querschnitten in der Weise bestimmt, dass die Welle in diesen Querschnitten gleich stark in Anspruch genommen ist und sodann diese Querschnitte durch einfache geeignete Uebergangsformen verbindet. Die folgenden Beispiele werden dieses Verfahren erklären.

Construction einer Balancieraxe. Es sei Fig. 1, Tafel VIII., eine Balancieraxe zu construiren.

Nennen wir:

$2\,\lambda$ die ganze Länge der Axe,

$2\,P$ den Druck des in der Mitte der Axe befindlichen Balanciers gegen die Axe,

$\left.\begin{array}{l} d \text{ den Duchmesser} \\ l \text{ die Länge} \end{array}\right\}$ eines Zapfens der Axe,

D den Durchmesser der Axe in der Mitte der Hülse,

so ist zunächst, wenn man das Gewicht der Axe gegen den Druck P vernachlässiget, P der Druck, welchem ein Zapfen ausgesetzt ist, und man hat daher für Schmiedeeisen zur Bestimmung von d und l die Gleichungen: