

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Spiralfeder

[urn:nbn:de:bsz:31-270970](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-270970)

Die ebene Spiralfeder für Schwungradhemmungen.

Eine ebene Spiralfeder, Fig. 10, Tafel V., sei bei A gehalten, ihr inneres Ende sei bei O an einer Axe befestigt. Diese Axe werde durch ein Kräftepaar $\frac{1}{2} P$ und $\frac{1}{2} P$ gedreht, bis ein Gleichgewichtszustand eintritt.

Um unsere allgemeine Theorie, Seite 87, auf den vorliegenden Fall anzuwenden, müssen wir das innere Ende der Feder frei machen, indem wir Kräfte anbringen, die den Zwangszustand zu ersetzen vermögen. Die Axe der Feder wird gegen die Lager, welche sie halten, gewisse Pressungen ausüben. Nehmen wir diese Lager weg und bringen dafür an die Axe zwei Kräfte η und ζ an, die der Richtung und Grösse nach gleich sind den Pressungen, welche das Lager, bevor es weggenommen wurde, gegen die Axe ausübt, so wird der Gleichgewichtszustand nicht gestört und wird demnach das innere Ende frei.

Nehmen wir irgend einen Punkt M an in der Axenlinie der Spirale, zeichnen die Tangente M_y und die Normale M_z , so fällt die Richtung der letzteren sehr nahe mit der Richtung von OM zusammen, vorausgesetzt, dass die Distanz zweier unmittelbar aufeinander folgenden Windungen sehr klein ist.

Vergleichen wir die Figur 10 mit unserer Figur 2, Tafel V., welche der allgemeinen Theorie zu Grunde gelegt wurde, so sehen wir, dass alle x und alle χ verschwinden, dass also $x=0$ und $\chi=0$ ist. Es ist daher $\Sigma(Y_x - X_y) = 0$ $\Sigma(X_z - Z_x) = 0$. Die dritte und vierte der Gleichungen (8), Seite 91, geben daher:

$$0 = \varepsilon \left[\left(\frac{\cos \beta}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) \left(\frac{m}{\xi \zeta} \right) + \frac{\sin \beta}{\rho} \left(\frac{m}{\xi} \right) \right] \dots \dots (1)$$

$$0 = G \left(\frac{m}{y} \right) \frac{d \Theta}{d s} \dots \dots \dots (2)$$

und diesen Gleichungen wird ein Genüge geleistet wenn man nimmt:

$$\left(\frac{m}{\xi \zeta} \right) = 0, \quad \beta = 0, \quad \frac{d \Theta}{d s} = 0 \dots \dots \dots (3)$$

d. h. wenn der Querschnitt der Feder so beschaffen ist, dass derselbe durch die Biegungsebene (die mit der Ebene der Figur zusammenfällt) in zwei congruente Hälften getheilt wird, entsteht nur allein eine Biegung um die Axe der x . Wegen $\frac{d \Theta}{d s} = 0$ findet

keine Torsion statt, Resultate, die auch ohne Rechnungen eingesehen werden können. Die zweite der Gleichungen (8) wird wegen $\beta = 0$:

$$\Sigma (Yz - Zy) = \epsilon \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) \left(\frac{m}{\zeta} \right)$$

oder wenn man das Trägheitsmoment $\left(\frac{m}{\zeta} \right)$ des Federquerschnittes in Bezug auf die durch M gehende auf der Ebene der Figur senkrechte Axe mit μ bezeichnet, d. h. $\left(\frac{m}{\zeta} \right) = \mu$ setzt:

$$\Sigma (Yz - Zy) = \epsilon \mu \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) \dots \dots \dots (4)$$

Nun ist aber $\Sigma (Yz - Zy)$ die Summe aller statischen Momente aller äusseren Kräfte, die auf das bei M beginnende Federstück einwirken, in Bezug auf die durch M gehende auf der Ebene der Figur senkrechte Axe; es ist demnach:

$$\Sigma (Yz - Zy) = PR + (3y_1 - \mathfrak{Y}z_1)$$

wobei $y_1 = Op$ $z_1 = Mp$ die Coordinaten des Punktes M in Bezug auf das Coordinatensystem bezeichnen, auf welches sich die Richtungen der Kräfte \mathfrak{Y} und 3 beziehen.

Die Gleichung (4) wird demnach:

$$PR + 3y_1 - \mathfrak{Y}z_1 = \epsilon \mu \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) \dots \dots \dots (5)$$

Multipliziert man diese Gleichung mit dem Bogenelement ds , der Spirale und integrirt hierauf, dehnt aber das Integrale auf die ganze Spirale aus, so findet man:

$$\int PR ds + \int 3y_1 ds - \int \mathfrak{Y}z_1 ds = \int \epsilon \mu \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) ds,$$

oder weil PR $3y_1$ $\mathfrak{Y}z_1$ $\epsilon \mu$ für diese Integrationen constante Grössen sind:

$$PR \int ds + 3 \int y_1 ds - \mathfrak{Y} \int z_1 ds = \epsilon \mu \int \left(\frac{ds}{\rho} - \frac{ds}{\rho_0} \right) \dots \dots (6)$$

Nennt man l die ganze Länge der Spirale, η ζ die Coordinaten des Schwerpunktes der ganzen Spirallinie, in Bezug auf das durch o gelegte Coordinatensystem, so ist bekanntlich:

$$\left. \begin{aligned} \int ds_1 &= l \\ \int y_1 ds_1 &= l \eta \\ \int z_1 ds_1 &= l \zeta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

daher wird die Gleichung (6):

$$P R l + (3 \eta - \mathfrak{B} \zeta) l = \epsilon \mu \int \left(\frac{ds_1}{\rho} - \frac{ds_1}{\rho_0} \right) \dots \dots \dots (8)$$

Wenn wir von der Ausdehnung, welche in der Axenfaser durch Σy entstehen kann, ganz absehen, so ist $\frac{ds_1}{\rho}$ und $\frac{ds_1}{\rho_0}$ der unendlich kleine Winkel, welchen die Normalen bilden, welche durch die Endpunkte des Bogenelementes ds_1 gehen, und zwar bezieht sich $\frac{ds_1}{\rho}$ auf den natürlichen Zustand der Feder, $\frac{ds_1}{\rho_0}$ auf den deformirten Zustand; setzen wir:

$$\frac{ds_1}{\rho} = d\varphi \quad \frac{ds_1}{\rho_0} = d\varphi_0$$

so erhalten wir:

$$\int \left(\frac{ds_1}{\rho} - \frac{ds_1}{\rho_0} \right) = \int (d\varphi - d\varphi_0) = \Theta \dots \dots \dots (9)$$

Wenn wir durch Θ den Winkel bezeichnen, um welchen die Spirale durch das Kräftepaar $\frac{1}{2} P$, $\frac{1}{2} P$ zusammen gewunden wurde, d. h. Θ ist der Winkel, welchen der Hebelarm, an welchem das Kräftepaar wirkt, zurücklegt, bis der Gleichgewichtszustand eintritt, oder endlich Θ ist der zu berechnende Drehungswinkel. Wir erhalten nunmehr aus (8) wegen (9):

$$[P R + (3 \eta - \mathfrak{B} \zeta)] l = \epsilon \mu \Theta \dots \dots \dots (10)$$

Für den Fall, dass $3 \eta - \mathfrak{B} \zeta = 0$ wäre, ergäbe sich:

$$P R l = \epsilon \mu \Theta \quad \Theta = \frac{P R l}{\epsilon \mu} \dots \dots \dots (11)$$

d. h. wenn $3 \eta - \mathfrak{B} \zeta = 0$ ist, wird der Drehungswinkel Θ dem Torsionsmoment der äusseren Kraft proportional. $3 \eta - \mathfrak{B} \zeta$ wird in zwei Fällen gleich Null:

1) wenn die Pressungen der Axe gegen die Axenlager verschwinden, d. h. wenn $\beta = 0$ $\mathfrak{B} = 0$,

2) wenn η und ζ verschwinden, d. h. wenn die Feder in der Weise geformt wird, dass der Schwerpunkt der Axenlinie in die Drehungsaxe fällt. Dies ist äusserst nahe bei einer Feder mit sehr vielen, aber äusserst engen Umwindungen der Fall.

Es ist für die Anwendung solcher Federn für Uhren mit Schwungradhemmungen sehr wichtig, dass der Drehungswinkel dem Drehungsmoment genau proportional ausfällt, weil nur in diesem Falle es möglich ist, dass die Schwingungszeiten der Unruhe (des Schwungrades) bei kleinen wie bei grossen Schwingungswinkeln den gleichen Werth erhalten, was für den gleichförmigen Gang einer Uhr unerlässlich ist.

Für die gewöhnlichen Anwendungen der Spiralfedern in der Technik kann man immer annehmen, dass der Schwerpunkt der Spirale so nahe am Drehungspunkt liegt, dass man keinen merklichen Fehler begeht, wenn man das Glied $3\eta - \mathfrak{D}\zeta$ ganz vernachlässiget, also die Gleichung (11) gelten lässt.

Für eine Feder mit rundem Querschnitt ist . . . $\mu = \frac{\pi}{64} d^4$
(d der Durchmesser.)

Für eine Feder mit rechteckigem Querschnitt . . . $\mu = \frac{1}{12} b h^3$
(b die mit der Drehungsaxe parallele Dimension des Querschnittes, h die radiale Dicke der Feder.)

Man erhält daher:

für Federn mit rundem Querschnitt:

$$\theta = \frac{64}{\pi e} \frac{P R l}{d^4} \dots \dots \dots (12)$$

für Federn mit rechteckigem Querschnitt:

$$\theta = \frac{12}{e} \frac{P R l}{b h^3} \dots \dots \dots (13)$$

Vernachlässigt man die Spannung, welche durch die Kräfte ΣY entsteht, so ist die Maximalspannung \mathfrak{S} , welche in Folge der Zusammenwindung an jedem Punkt der äusseren Fläche eintritt:

$$\mathfrak{S} = \frac{P R}{E}$$

Für einen runden Querschnitt ist $E = \frac{\pi}{32} d^3$

Für einen rechteckigen Querschnitt ist $E = \frac{1}{6} b h^2$

demnach:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{32}{\pi} \frac{P R}{d^3} & P R &= \frac{\mathcal{E} \pi}{32} d^3 \\ \mathcal{E} &= 6 \frac{P R}{b h^2} & P R &= \frac{\mathcal{E}}{6} b h^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

Verwindung der cylindrisch schraubenförmigen Feder.

Wir betrachten nun eine schraubenförmige Feder, Fig. 11, 12, Tafel V. Das Ende A ist festgehalten, das Ende B ist in einen Hebel eingehängt, der sich um eine Axe dreht, die mit der geometrischen Axe des Schraubencylinders zusammenfällt. Der Hebel wird durch ein Kräftepaar $\frac{P}{2}, \frac{P}{2}$ um seine Axe gedreht. Fig. 12, Tafel V., ist die Projektion der Schraube auf eine Ebene, die auf der Axe der Schraube senkrecht steht. Um die Punkte der Schwerpunktslinie der Querschnitte der Feder zu bestimmen, nehmen wir ein rechtwinkeliges Coordinatensystem $O x_1 y_1 z_1$ an, lassen die Axe $O x_1$ mit der geometrischen Axe des Schraubencylinders zusammenfallen, $O y_1$ parallel mit der Richtung des Hebels, an welchem das Kräftepaar $\frac{1}{2} P$ und $\frac{1}{2} P$ wirkt, $O z_1$ senkrecht auf der Ebene der Axen $O x_1$ und $O y_1$. Es seien x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes M der Linie, in welcher die Schwerpunkte aller Normalquerschnitte der schraubenförmigen Feder liegen. Die Einwirkung des Hebels auf das Ende B der Schraubenwindung reduziert sich auf die Kräfte $-\beta - \mathcal{Y} + \mathcal{X}$ deren Richtungen mit den Axen $O z_1, O y_1, O x_1$ parallel sind, allein der Einfluss von \mathcal{X} kann vernachlässigt werden, wenn man voraussetzt, dass die Steigung der Schraubenlinie gegen eine auf $O x_1$ senkrechte Ebene sehr klein ist. Unter der gleichen Voraussetzung darf man annehmen, dass jede Querschnittsebene des Schraubengewindes in die geometrische Axe $O x_1$ der Schraube fällt und dass die Krümmungsebene des bei M befindlichen Elementes der Schraubenlinie senkrecht steht auf der Axe der Schraube, dass endlich M_y (die Tangente zum Punkt M der Schraubenlinie) und M_z (die Durchschnittslinie der Querschnittsebene des Gewindestabes und der Krümmungsebene des Elementes) in einer auf die Axe der Schraube senkrechten Ebene liegen.

Vergleichen wir unsere Figur mit derjenigen, welche zur allgemeinen Theorie gedient hat, so erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma (Y z - Z y) &= \beta (x - y_1) + \mathcal{Y} z_1 = \beta r + (\mathcal{Y} z_1 - \beta y_1) \\ \Sigma (Y x - X y) &= 0 \\ \Sigma (X z - Z x) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$