Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Hyperbel-Federn

urn:nbn:de:bsz:31-270970

Schienen gleich gross. Daraus folgt, dass bei Trapezfederwerken die Schienen im belasteten Zustande kreisbogenförmig gekrümmt sind. Sind nun die Schienen im unbelasteten Zustande ebenfalls kreisbogenförmig gekrümmt, so entsteht in jedem Punkte jeder Schiene eine und dieselbe Krümmungsänderung, was zur Folge hat, dass die Spannungsintensität in jedem Punkte jeder Schiene einen und denselben Werth erhält. Diese Trapezfederwerke haben also die wichtige Eigenschaft, dass sie in allen Theilen gleich stark in Anspruch genommen oder Anordnungen von durchaus gleicher Festigkeit sind.

Hyperbelfederwerke.

Die Federwerke, welche sich ergeben, wenn man für γ einen zwischen 1 und ∞ liegenden Werth nimmt, nähern sich einem Rechteckfederwerk, wenn der angenommene Werth von γ nicht viel grösser als die Einheit ist, nähern sich dagegen einem Trapezfederwerk, wenn der Werth von γ beträchtlich grösser als die Einheit ist. Im Allgemeinen haben alle Federwerke, für welche γ zwischen 1 und unendlich liegt, die Eigenschaft, dass nach dem durch die Gleichung (16) ausgedrückten Gesetz die Endpunkte der Schienen in Hyperbeln liegen, wenn man die Schienen gerade ausstreckt und aufeinander schichtet. Daher wollen wir diese Federwerke „Hyperbelfedern" nennen, Fig. 6, Tafel V. Im belasteten Zustande bilden die Schwerpunktslinien der Schienen elastische Kurven, und die Spannungsintensitäten wachsen in jeder einzelnen Schiene gegen die Befestigungsstelle hin. Diese Hyperbelfederwerke gewähren daher nicht in allen Theilen durchaus gleiche Festigkeit, sind also minder gut als die Trapezfederwerke.

Die Durchbiegung. Wir haben bisher nur die Festigkeitsverhältnisse der Federwerke betrachtet, für die praktischen Zwecke kommt aber auch ihre Biegsamkeit in Betrachtung. Wir wollen daher berechnen, um wie viel sich die Endpunkte der obersten Schiene unter der Einwirkung der Belastung senken und nennen diese Senkung die „Durchbiegung".

Für den Gleichgewichtszustand der obersten Schiene haben wir vermöge der ersten der Gleichungen (2):

$$P_1 l_1 - P_2 l_2 - (P_1 - P_2) x = \varepsilon \mu_1 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\varrho_1} \right)$$

Es ist aber:

$$P_1 l_1 - P_2 l_2 = \frac{\mathfrak{S}_1}{6} b \delta^2, \; P_1 - P_2 = p = \frac{1}{\gamma} \frac{P_1}{n}, \; \mu = \frac{1}{12} b \delta_1{}^3$$

daher wird diese Gleichung:

$$\frac{1}{6}\,\mathfrak{S}_1\, b\, \delta_1^{\,2} - \frac{1}{\gamma}\,\frac{P_1}{n}\,x = \frac{\varepsilon}{12}\, b\, \delta_1^{\,3}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\varrho_1}\right)$$

Vorausgesetzt, dass die initiale so wie auch die Krümmung im belasteten Zustand unbedeutend ist, kann man setzen:

$$\varrho_1 = + \frac{d\, x^2}{d^2\, y}$$

und dann wird die vorhergehende Gleichung:

$$\frac{d^2\, y}{d\, x^2} = \frac{1}{R} - \frac{2\,\mathfrak{S}_1}{\varepsilon\,\delta_1} + \frac{12\, P_1}{\varepsilon\, b\, \delta_1^{\,3}\, n\, \gamma}\, x \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

Streng genommen, gilt diese Gleichung nur für das Mittelstück, (nur für $x \leqq l_2$) allein da bei allen Federwerken das Endstück $l_1 - l_2$ sehr kurz ist, so begeht man keinen merklichen Fehler, wenn man diese Gleichung für die ganze Länge l_1 gelten lässt. Das erste Integrale ist:

$$\frac{d\, y}{d\, x} = \left(\frac{1}{R} - \frac{2\,\mathfrak{S}_1}{\varepsilon\,\delta_1}\right) x + \frac{12\, P_1}{\varepsilon\, b\, \delta_1^{\,3}\, n\, \gamma}\,\frac{x^2}{2} \quad . \; . \; . \; . \quad (21)$$

und es ist keine Constante hinzuzufügen, weil für $x = o$ auch $\frac{d\, y}{d\, x}$ verschwindet.

Das Integrale der Gleichung (21) gibt:

$$y = \left(\frac{1}{R} - \frac{2\,\mathfrak{S}_1}{\varepsilon\,\delta_1}\right)\frac{x^2}{2} + \frac{12\, P_1}{\varepsilon\, b\, \delta_1^{\,3}\, n\, \gamma}\,\frac{x^3}{6} + \text{Const}$$

Nennt man a die Ordinate des Anfangspunktes der elastischen Linie, so ist für $x = o \quad y = a$, demnach $\text{Const} = a$ und:

$$y = \left(\frac{1}{R} - \frac{2\,\mathfrak{S}_1}{\varepsilon\,\delta_1}\right)\frac{x^2}{2} + \frac{2\, P_1}{\varepsilon\, b\, \delta_1^{\,3}\, n\, \gamma}\, x^3 + a$$

Nennt man Y die Ordinate des Endpunktes der Schiene, so ist für $x = l_1 \quad y = Y$, daher erhält man:

$$Y = \left(\frac{1}{R} - \frac{2\,\mathfrak{S}_1}{\varepsilon\,\delta_1}\right)\frac{l_1^{\,2}}{2} + \frac{2\, P_1}{\varepsilon\, b\, \delta_1^{\,3}\, n\, \gamma}\, l_1^{\,3} + a$$

und:

$$Y - a = \left(\frac{1}{R} - \frac{2\,\mathfrak{S}_1}{\varepsilon\,\delta_1}\right)\frac{l_1^2}{2} + \frac{2\,P_1}{\varepsilon\,b\,\delta_1^3\,n\,\gamma}\,l_1^3$$

Für die unbelastete Schiene ist $P_1 = 0$ und $\mathfrak{S}_1 = 0$ wird daher:

$$(Y - a)_0 = \frac{l_1^2}{2\,R}$$

Nun ist aber $(Y - a)_0 - (Y - a)$ die Durchbiegung. Bezeichnen wir diese mit f, so erhalten wir:

$$f = \frac{2\,\mathfrak{S}_1}{\varepsilon\,\delta_1}\,\frac{l_1^2}{2} - \frac{2\,P_1}{\varepsilon\,b\,\delta_1^3\,n\,\gamma}\,l_1^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

oder wenn man P_1 vermittelst (11) eliminirt:

$$f = \frac{\mathfrak{S}_1\,l_1^2}{\varepsilon\,\delta_1}\left(1 - \frac{1}{3\,\gamma}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

Resultate der Untersuchung. Wenn es sich um die Construktion eines Federwerkes handelt, wird in der Regel gegeben sein:

1) die Belastung P_1, welche auf das Ende der oberen Schiene wirkt,
2) die Entfernung l_1 des Endpunktes der oberen Schiene von der Befestigungsebene an der Fassung,
3) die Spannungsintensität $\mathfrak{S}_1$, welche an der Befestigungsebene eintreten darf,
4) die Durchbiegung f, welche die Last hervorbringen darf,
5) die Breite b jeder Schiene.

Die zu suchenden Grössen sind dann:

1) die Dicke δ_1 jeder einzelnen Schiene,
2) die Anzahl n der Schienen,
3) die Länge l_k jeder Schiene, mit Ausnahme der obersten.

Zur Bestimmung dieser drei Grössen haben wir vermittelst unserer Theorie folgende Ausdrücke.

Die Gleichung (23) gibt:

$$\delta_1 = \frac{\mathfrak{S}_1\,l_1^2}{\varepsilon\,f}\left(1 - \frac{1}{3\,\gamma}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

die Gleichung (11) gibt, wenn einmal δ_1 bekannt ist:

$$n = \frac{6\,P_1\,l_1}{\mathfrak{S}_1\,b\,\delta_1^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (25)$$