Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Allgemeinster Fall des Gleichgewichts eines im natürlichen Zustande krummen Stabes

urn:nbn:de:bsz:31-270970

wobei h die kleinere von den Dimensionen des Rechteckes bezeichnet. Aus dieser Gleichung folgt:

$$\frac{h}{d} = \sqrt[4]{\frac{\pi}{32}\, 6 \left(\frac{h}{b}\right)}$$

Ein runder und ein elliptischer Querschnitt geben gleiche Tragkraft wenn:

$$\frac{\pi}{32}\, d^3\, \frac{d}{2} = \frac{\pi}{32}\, b\, h^3\, \frac{h}{2}$$

woraus folgt: $\frac{h}{d} = \sqrt[4]{\frac{h}{b}}$ wobei b die kleinere Axe des elliptischen Querschnittes bedeutet.

Allgemeinster Fall des Gleichgewichtes eines im natürlichen Zustande krummen Stabes.

Betrachten wir nun den allgemeinsten Fall des Gleichgewichtes eines im natürlichen Zustande gekrümmten Stabes, indem wir annehmen: 1) die Axenlinie des Stabes sei im natürlichen Zustande desselben eine Linie von doppelter Krümmung; 2) die äusseren, auf den Stab einwirkenden Kräfte seien in beliebiger Anzahl vorhanden, und ihre Angriffspunkte befinden sich an beliebigen Orten.

Es sei Fig. 1, Tafel V., A M B ein Stück der Axenlinie des Stabes im natürlichen Zustande desselben, M, N, P drei unendlich wenig von einander entfernte Punkte der Axenlinie. Denken wir uns durch diese drei Punkte eine Ebene F gelegt, so ist dieselbe die Krümmungsebene des Bogenstückes M N P. Legen wir durch die Punkte M und N Normalebenen $E\,E_1$ (d. h. Ebenen, die in den Punkten M und N senkrecht stehen, auf den Berührungslinien, welche in diesen Punkten an die Axenlinie gezogen werden können), so schneiden sich dieselben in einer auf der Krümmungsebene senkrecht stehenden Linie H O K, und die Entfernung des Durchschnittspunktes O dieser Linie mit der Krümmungsebene F von M oder N bestimmt den Krümmungshalbmesser des Kurvenstückes M N. Nennt man diesen Krümmungshalbmesser ϱ_0, so ist $\varrho_0 = O\,M = O\,N$.

Es sei Fig. 2, Tafel V., der Querschnitt des Stabes durch die durch M gelegte Normalebene E, O M z die Linie, in welcher die Ebene E dieses Querschnittes durch die Krümmungsebene F geschnitten wird; M x eine auf M z senkrechte Linie, die also parallel ist zur Durchschnittslinie H O K der durch M und N gelegten Normalebenen $E\,E_1$.

Wir nehmen auch bei dieser Aufgabe an, dass durch die Formveränderungen, welche die äusseren Kräfte veranlassen, die relative Lage aller Atome eines und desselben Querschnittes nicht verändert werde, und dass alle Atome, welche im natürlichen Zustande des Stabes in einer durch das Atom M gelegten Normalebene liegen, auch nach erfolgter Formänderung in einer Ebene liegen, die gefunden wird, wenn man durch das gleiche Atom M eine Normalebene zum deformirten Axenelement legt.

Nehmen wir einstweilen an, dass durch die Einwirkung der äusseren Kräfte weder eine Ausdehnung oder Zusammenpressung der Axenfaser, noch eine Torsion der durch M und N gehenden Querschnitte, sondern nur allein eine Biegung eintritt, in Folge deren die Durchschnittslinie H O K der durch M und N gehenden Normalebenen E E_1 nach H_1 O_1 K_1 rückt, so ist die auf diese Linie senkrechte z_1 M O_1, die Linie, in welcher die Krümmungsebene des gebogenen Axenelementes die durch das Atom M gehende Normalebene E scheidet. Ziehen wir M x_1 senkrecht auf M z_1, nennen den Winkel x M $x_1 = \beta$ und M $p = \xi$ m $p = \zeta$ M $p_1 = \xi_1$ m $p_1 = \zeta_1$ die Coordinaten irgend eines Atoms m des durch M gehenden Normalquerschnitts des Stabes, ϱ den Krümmungshalbmesser des gebogenen Axenelementes M N und d φ den Winkel, den im gebogenen Zustande die durch M und N gehenden Normalebenen miteinander bilden, endlich d s_0 die ursprüngliche Länge des Faserelementes M N.

Dies vorausgesetzt ist:

$$d\, s_0 \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right)$$

die ursprüngliche Länge des durch den Punkt m gehenden, zwischen den Normalebenen enthaltenen Faserelementes.

$$d\, s_0 \left(1 + \frac{\zeta_1}{\varrho}\right)$$

die Länge des gleichen Faserelementes nach erfolgter Biegung.

Demnach:

$$d\, s_0 \left(1 + \frac{\zeta_1}{\varrho}\right) - d\, s_0 \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) = d\, s_0 \left(\frac{\zeta_1}{\varrho} - \frac{\zeta}{\varrho_0}\right)$$

die in Folge der Biegung in dem Faserelement eingetretene Verlängerung. Nennen wir σ die Spannungsintensität, welche diese Ausdehnung in dem Faserelement, dessen ursprüngliche Länge

$$d\, s_0 \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right)$$

war, hervorgebracht hat, ε den Modulus der Elastizität des Materials, so ist nach dem Stabausdehnungsgesetz:

$$d\,s_0\left(\frac{\zeta_1}{\varrho}-\frac{\zeta}{\varrho_0}\right)=d\,s_0\left(1+\frac{\zeta}{\varrho_0}\right)\frac{\sigma}{\varepsilon}$$

In allen Fällen der Anwendung sind die Querschnittsdimensionen eines Stabes gegen die Krümmungshalbmesser sehr klein, kann man demnach $\frac{\zeta}{\varrho_0}$ gegen die Einheit vernachlässigen und dann folgt aus obigem Ausdruck:

$$\sigma=\varepsilon\left(\frac{\zeta_1}{\varrho}-\frac{\zeta}{\varrho_0}\right)\quad\ldots\ldots\ldots\quad(1)$$

Bisher haben wir angenommen, dass die äusseren Kräfte nur eine Biegung, nicht aber eine Dehnung des Axenelementes M N veranlassen. Findet auch eine Dehnung statt und beträgt die Intensität der dehnenden Kraft S, so ist die Spannungsintensität des Faserelementes bei m:

$$\sigma=S+\varepsilon\left(\frac{\zeta_1}{\varrho}-\frac{\zeta}{\varrho_0}\right)\quad\ldots\ldots\ldots\quad(2)$$

Zwischen den Coordinaten $\zeta\ \xi$ und $\zeta_1\ \xi_1$ bestehen die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}\zeta_1&=\zeta\cos\beta+\xi\sin\beta\\ \xi_1&=\xi\cos\beta-\zeta\sin\beta\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(3)$$

Führt man diesen Werth von ζ_1 in (2) ein, so folgt:

$$\sigma=S+\varepsilon\left(\frac{\zeta\cos\beta+\xi\sin\beta}{\varrho}-\frac{\zeta}{\varrho_0}\right)$$

oder

$$\sigma=S+\varepsilon\left[\zeta\left(\frac{\cos\beta}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_0}\right)+\xi\frac{\sin\beta}{\varrho}\right]\quad\ldots\ldots\quad(4)$$

Nennt man d f den unendlich kleinen Querschnitt eines bei m befindlichen Faserelementes, so ist $\int\sigma\,d\,f$ die Summe aller Spannungen und sind $\int\sigma\,d\,f\,\xi$, $\int\sigma\,d\,f\,\zeta$ die Summen der Momente aller Spannungen, in Bezug auf die Axen M x und M z und wir erhalten:

$$\int\sigma\,d\,f=\int\left\{S+\varepsilon\left[\zeta\left(\frac{\cos\beta}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_0}\right)+\xi\frac{\sin\beta}{\varrho}\right]\right\}d\,f$$

$$\int \sigma\, \xi\, df = \int \left\{ S + \varepsilon \left[\zeta \left(\frac{\cos\beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right) + \xi \frac{\sin\beta}{\varrho} \right] \right\} \xi\, df$$

$$\int \sigma\, \zeta\, df = \int \left\{ S + \varepsilon \left[\zeta \left(\frac{\cos\beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right) + \xi \frac{\sin\beta}{\varrho} \right] \right\} \zeta\, df$$

Berücksichtiget man 1) dass für diese Integrationen nur allein ζ und ξ variabel, ϱ und ϱ_0 dagegen constant sind; 2) dass der Voraussetzung gemäss M der Schwerpunkt des Querschnittes ist, nennt Ω diesen Querschnitt und setzt zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} \int \zeta^2\, df &= \binom{m}{\zeta} \\ \int \xi^2\, df &= \binom{m}{\xi} \\ \int \zeta\, \xi\, df &= \binom{m}{\xi\,\zeta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

so werden obige Integrale:

$$\left.\begin{aligned} \int \sigma\, df &= S\,\Omega \\ \int \sigma\, \xi\, df &= \varepsilon \left[\left(\frac{\cos\beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right) \binom{m}{\xi\,\zeta} + \frac{\sin\beta}{\varrho} \binom{m}{\xi} \right] \\ \int \sigma\, \zeta\, df &= \varepsilon \left[\left(\frac{\cos\beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right) \binom{m}{\zeta} + \frac{\sin\beta}{\varrho} \binom{m}{\xi\,\zeta} \right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6)$$

Zerlegen wir jede von den äusseren Kräften, welche auf das bei M beginnende und bis an sein Ende B fortgehende Stabstük einwirken, in drei Seitenkräfte X Y Z und zwar so, dass die Richtungen von X und Z parallel sind mit den Coordinatenaxen M x M z und dass Y parallel wirkt mit der zum Punkt M des Axenelementes gezogenen Berührungslinie; nennen ferner x y z die Coordinaten des Angriffspunktes einer dieser Kräfte, so sind $\Sigma\,(Yz - Zy)$ $\Sigma\,(Yx - Xy)$ die Summen der Momente dieser äusseren Kräfte in Bezug auf die Axen M x und M z, und zwar sind diese Momente so berechnet, dass sie bei m eine Dehnung hervorzubruingen streben. Endlich ist $\Sigma\,(Xz - Zx)$ die Summe der Momente dieser Kräfte in Bezug auf die Axe M y (die mit der Tangente an den Punkt M zusammenfällt).

Für den Fall, dass das Ende des Stabstückes, dessen Gleichgewichtszustand wir untersuchen, nicht ganz frei, sondern festgehalten oder eingespannt wäre, so kann man das Stabende doch so behandeln, wie wenn es vollkommen frei wäre, vorausgesetzt, dass man am Stabende gewisse Kräfte $\mathfrak{X}$ $\mathfrak{Y}$ $\mathfrak{Z}$ und Momente $\binom{M}{x}\binom{M}{y}\binom{M}{z}$

einwirken lässt, und zwar die Kräfte nach Richtungen, die mit den Axen Mx My Mz parallel sind, die Momente in Bezug auf Axen, die durch den Schwerpunkt der Endfläche des Stabes parallel zu Mx My Mz gelegt sind.

Um die Gleichgewichtsgleichungen aufstellen zu können, haben wir noch die Torsion des Stabes zu berücksichtigen. Durch die Torsion des Stabes wird bewirkt, dass das zwischen den Normalebenen E und E_1 enthaltene, bei m befindliche Faserelement eine schwache Verlängerung und dass seine Richtung gegen die Normalebene E eine Neigung erhält. Allein wenn wir annehmen, dass alle Formänderungen sehr schwach sind, so wird der Einfluss der Torsion auf die Spannnung σ verschwindend klein, kann man also die Ausdrücke (6) auch noch gelten lassen, wenn eine schwache Torsion vorhanden ist. Die aus der Torsion entstehenden Abschiebungskräfte müssen jedoch in Rechnung gebracht werden, denn sie sind es, welche den auf die Drehung um die Axe My wirkenden äusseren Kräften das Gleichgewicht halten.

Nennen wir $\left(\frac{m}{y}\right)$ das Trägheitsmoment des Stabquerschnittes in Bezug auf die Axe y, G den Modulus der Elastizität für Torsion, $d\Theta$ den Winkel, um welchen die Normalebene E_1 gegen die Normalebene E gedreht wird, so ist nach Gleichung (11), Seite 59 der Torsionstheorie:

$$G\left(\frac{m}{y}\right)\frac{d\Theta}{ds} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

das Torsionsmoment, welches allen im Querschnitt vorkommenden Verschiebungskräften entspricht.

Da nun die zwischen den Ebenen E und E_1 herrschenden Spannungen und die in der Ebene von E wirkenden Abschiebungskräfte im Gleichgewicht sein müssen mit allen äusseren Kräften, die auf das Stabstück einwirken, das bei M beginnt und bis ans Ende fortgeht, so hat man folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma Y = \Omega S \\
&\Sigma (Yz - Zy) = \varepsilon\left[\left(\frac{\cos\beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right)\left(\frac{m}{\zeta}\right) + \frac{\sin\beta}{\varrho}\left(\frac{m}{\xi\zeta}\right)\right] \\
&\Sigma (Yx - Xy) = \varepsilon\left[\left(\frac{\cos\beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right)\left(\frac{m}{\xi\zeta}\right) + \frac{\sin\beta}{\varrho}\left(\frac{m}{\xi}\right)\right] \\
&\Sigma (Xz - Zx) = G\left(\frac{m}{y}\right)\frac{d\Theta}{ds}
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Dabei sind aber in der Summe Σ auch die Kräfte $\mathfrak{X}$ $\mathfrak{Y}$ $\mathfrak{Z}$ und Momente $\left(\frac{M}{x}\right)$ $\left(\frac{M}{y}\right)$ $\left(\frac{M}{z}\right)$ mit eingeschlossen.

Die erste dieser Gleichungen bestimmt die Spannungsintensität s des Axenfaserelementes $M\,N$, die zweite und dritte dieser Gleichungen bestimmen den Winkel β und den Krümmungshalbmesser ϱ.

Sind diese Grössen bestimmt, so kann man vermittelst Gleichung (4) die Spannungsintensität σ für einen beliebigen Punkt m des Querschnittes bei M bestimmen; die vierte der Gleichungen bestimmt endlich den Torsionswinkel.

Um die Gestalt der deformirten Axenfaser zu finden, müssen allerdings auch noch die Differenzialausdrücke für den Krümmungshalbmesser in Rechnung gebracht werden, was in vielen Fällen zu äusserst verwickelten Rechnungen führt, in manchen Fällen geben aber schon die Gleichungen (8) die Lösung der Aufgabe. Bevor wir jedoch zu den Anwendungen übergehen, wollen wir noch mehrere Punkte des Problems erklären.

Betrachtet man in (4) σ als eine Constante, so ist diese Gleichung in Bezug auf ξ und ζ eine Gleichung des ersten Grades, woraus man sieht, dass alle Punkte eines und desselben Querschnittes, in welchem einerlei Spannung herrscht, eine gerade Linie bilden. Nennt man α den Winkel $x\,M\,x_1$, den eine durch M zu dieser geraden Linie von gleicher Spannung parallel gezogene Gerade mit der Axe $M\,x$ bildet, so ist:

$$\operatorname{tang}(\pi - \alpha) = -\frac{\frac{\sin\beta}{\varrho}}{\frac{\cos\beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}} = -\frac{\sin\beta}{\cos\beta - \frac{\varrho}{\varrho_0}}$$

oder:

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\sin\beta}{\cos\beta - \frac{\varrho}{\varrho_0}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Suchen wir eine in der Ebene des Normalschnittes, also in der Ebene der $x\,z$ liegende Linie, welche eine solche Richtung hat, dass sich die statischen Momente der äusseren Kräfte in Bezug auf diese Linie als Drehungsaxe genommen aufheben. Nennen wir γ den Winkel, den diese Linie mit der Richtung $M\,z$ bildet, und legen durch M ein Coordinatensystem $M\,x_2$ $M\,y_2$ $M\,z_2$, so dass $M\,y_2$ mit $M\,y$ $M\,z_2$ mit obiger Linie übereinstimmt, die mit $M\,z$ einen Winkel γ bildet, so hat man zunächst zur Bestimmung der Coordinaten x_2 y_2 z_2 eines Punktes in Bezug auf dieses System:

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= x \cos\gamma - z \sin\gamma \\ y_2 &= y \\ z_2 &= z \cos\gamma + x \sin\gamma \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Zerlegen wir ferner die Kräfte X Y Z nach dieser neuen Coordinatenaxe, so ist:

$$\left.\begin{aligned} X_2 &= X \cos\gamma - Z \sin\gamma \\ Y_2 &= Y \\ Z_2 &= Z \cos\gamma + X \sin\gamma \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Hieraus findet man für die Summe der Momente in Bezug auf die Axe O z_2:

$$\Sigma\,(Y_2\,x_2 - X_2\,y_2) = \Sigma\,[Y\,(x \cos\gamma - z \sin\gamma) - (X \cos\gamma - Z \sin\gamma)\,y]$$

oder:

$$\Sigma\,(Y_2\,x_2 - X_2\,y_2) = \cos\gamma\,\Sigma\,(Y\,x - X\,y) - \sin\gamma\,\Sigma\,(Y\,z - Z\,y)$$

Diese Summe verschwindet, wenn:

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{\Sigma\,(Y\,x - X\,y)}{\Sigma\,(Y\,z - Z\,y)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Vermöge der zweiten und dritten der Gleichungen (8) ist nun auch:

$$\frac{\Sigma\,(Y\,x - X\,y)}{\Sigma\,(Y\,z - Z\,y)} = \frac{\left(\frac{\cos\beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right)\left(\frac{m}{\xi\,\zeta}\right) + \frac{\sin\beta}{\varrho}\left(\frac{m}{\xi}\right)}{\left(\frac{\cos\beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right)\left(\frac{m}{\zeta}\right) + \frac{\sin\beta}{\varrho}\left(\frac{m}{\xi\,\zeta}\right)}$$

Berücksichtiget man den Ausdruck (9), so wird:

$$\frac{\Sigma\,(Y\,x - X\,y)}{\Sigma\,(Y\,z - Z\,y)} = \frac{\left(\frac{m}{\xi\,\zeta}\right) + \operatorname{tang}\alpha\left(\frac{m}{\xi}\right)}{\left(\frac{m}{\zeta}\right) + \operatorname{tang}\alpha\left(\frac{m}{\xi\,\zeta}\right)} \quad \ldots\ldots, \quad (13)$$

Wegen (12) und (13) wird:

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{\left(\frac{m}{\xi\,\zeta}\right) + \operatorname{tang}\alpha\left(\frac{m}{\xi}\right)}{\left(\frac{m}{\zeta}\right) + \operatorname{tang}\alpha\left(\frac{m}{\xi\,\zeta}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Wenn der Querschnitt so geformt ist, dass er durch vier unter 45° gegeneinander geneigte Ebenen in acht congruente Parthien getheilt werden kann und wenn ferner die initiale Krümmung des Stabes von der Art ist, dass die Krümmungsebene des Stabes mit einer Hauptaxe der Figur übereinstimmt, so ist $\left(\frac{m}{\xi\,\zeta}\right) = o$ und $\left(\frac{m}{\xi}\right) = \left(\frac{m}{\zeta}\right)$ und dann wird vermöge (14):

$$\text{tang}\ \gamma = \text{tang}\ \alpha$$

d. h. unter diesen beiden Voraussetzungen steht die Richtung der Linie in Bezug auf welche sich die Momente der äusseren Kräfte aufheben, senkrecht auf der Linie, in welcher einerlei Spannung herrscht.

Coeffizienten für die Festigkeit und Elastizität der Materialien.

Die folgende Tabelle enthält die Coeffizienten für die Festigkeit und Elastizität derjenigen Materialien, welche im Maschinenbau vorzugsweise verwendet werden.

Columne $\mathfrak{A}$ Coeffizienten für die absolute Festigkeit per 1 Quadrat-Centimeter.

Columne $\mathfrak{B}$ Brechungs-Coeffizienten per 1 Quadrat-Centimeter.

Columne T Coeffizienten für den Bruch durch Abwinden.

Columne ε Modulus der Elastizität der Materialien zur Berechnung der Ausdehnung, Zusammenpressung und Biegung der Körper.

Columne G Modulus der Elastizität der Materialien zur Berechnung der Torsion von Stäben.

Columne $\frac{\mathfrak{A}^2}{\varepsilon}$ Coeffizienten zur Berechnung der Wirkungsgrössen, welche zum Abreissen der Körper erforderlich sind.

Columne $\frac{\mathfrak{B}^2}{\varepsilon}$ Coeffizienten zur Berechnung der Wirkungsgrössen, welche zum Abbrechen der Körper erforderlich sind.

Columne $\frac{\mathrm{T}^2}{\mathrm{G}}$ Coeffizienten zur Berechnung der Wirkungsgrössen, welche zum Abwinden von Stäben erforderlich sind.

Die Coeffizienten sind sämmtlich die mittleren Werthe der zahlreichen Versuchsresultate über die Festigkeit der Materialien.