Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Aequivalenz der Querschnitte

urn:nbn:de:bsz:31-270970

und dann findet man:

$$P = \frac{3}{64}\,\pi^2\,\varepsilon\,\frac{r^4}{l^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

Nennt man d den Durchmesser des Stabes in der Mitte, $L = 2\,l$ die totale Länge des Stabes, so wird:

$$P = \frac{3}{4}\,\frac{\pi^3}{64}\,\varepsilon\,\frac{d^4}{L^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

Vergleicht man diesen Werth von P mit jenem, der für einen cylindrischen Stab gefunden wurde, so sieht man, dass das Tragungsvermögen des Stabes von gleicher Festigkeit gleich ist $\frac{3}{4}$ von jenem eines cylindrischen von gleicher Dicke.

Aus (7) folgt $z = \sqrt[3]{\frac{y}{k\,m}}$. Führt man diesen Werth von z in (17) ein, so ergibt sich eine Beziehung zwischen x und y und dies ist die Gleichung der gebogenen Axenfaser.

Die Gleichung (17) gibt:

für $\frac{z}{r} = 0{\cdot}75 \quad 0{\cdot}50 \quad 0{\cdot}25$

$\frac{x}{l} = 0{\cdot}224 \quad 0{\cdot}058 \quad 0{\cdot}0106$

Hieraus erkennt man, dass man eine Stabform findet, welche annähernd einerlei Festigkeit darbietet, wenn man an den Enden des Stabes Querschnitte annimmt, welche dem mittleren Querschnitt geometrisch ähnlich, aber linear halb so gross sind und diese Endquerschnitte mit dem mittleren durch gerade Linien verbindet. Es ist nämlich für $\frac{z}{r} = 0{\cdot}5$, $\frac{x}{l} = 0{\cdot}058$, also x beinahe gleich Null.

Aequivalenz der Querschnitte.

Wir sagen, zwei Querschnitte seien äquivalent (gleichwerthig), wenn dieselben unter gleichen Umständen einerlei Festigkeit gewähren.

Hinsichtlich der absoluten Festigkeit sind alle Querschnitte von gleicher Grösse äquivalent.

Hinsichtlich der Bruchfestigkeit sind zwei Querschnitte äquivalent, wenn für dieselben die E-Funktionen (Tafel V. der Resultate für den Maschinenbau) gleichen Werth haben.

Ein runder und ein viereckiger Querschnitt sind demnach hinsichtlich des Bruches äquivalent, wenn:

$$\frac{1}{6} b h^2 = \frac{\pi}{32} d^3$$

Hieraus folgt:

$$\frac{h}{d} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{32} 6 \left(\frac{h}{b}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Diese Regel ist bequem, wenn für einen runden Querschnitt ein äquivalenter rechteckiger gesucht werden soll. Es sei z. B. für einen Cylinder von 10 Centimeter Durchmesser ein Rechtecht zu suchen, in welchem sich die Höhe h zur Breite b wie 2 : 1 verhält. Dann hat man $d = 10$, $\frac{h}{b} = 2$ und die Gleichung (1), so wie die Tabelle Seite 30 der Resultate des Maschinenbaues gibt:

$$\frac{h}{d} = 1·056, \quad h = 10·56 \text{ und } b = \frac{10·56}{2} = 5·28$$

Ein runder und ein ellyptischer Querschnitt haben einerlei relative Festigkeit, wenn:

$$\frac{\pi}{32} d^3 = \frac{\pi}{32} b h^2$$

wobei h die mit der biegenden Kraft parallele Axe des ellyptischen Querschnittes bezeichnet.

Hieraus folgt:

$$\frac{h}{d} = \sqrt[3]{\left(\frac{h}{b}\right)}$$

Die Last Q, welche ein Stab aufrecht stehend zu tragen vermag, ist Seite 46 gefunden worden:

$$Q = \varepsilon \pi^2 E \frac{z}{l^2}$$

Zwei Stäbe aus einerlei Material und von gleicher Länge werden also gleich sicher tragen, wenn für dieselben die Werthe von $z E$ übereinstimmen, d. h. wenn die Trägheitsmomente der Querschnitte gleich gross sind.

Ein runder und ein rechtekiger Querschnitt haben daher einerlei Tragfähigkeit, wenn:

$$\frac{\pi}{32} d^3 \frac{d}{2} = \frac{1}{6} b h^2 \frac{h}{2}$$

wobei h die kleinere von den Dimensionen des Rechteckes bezeichnet. Aus dieser Gleichung folgt:

$$\frac{h}{d} = \sqrt[4]{\frac{\pi}{32}\, 6 \left(\frac{h}{b}\right)}$$

Ein runder und ein elliptischer Querschnitt geben gleiche Tragkraft wenn:

$$\frac{\pi}{32}\, d^3\, \frac{d}{2} = \frac{\pi}{32}\, b\, h^3\, \frac{h}{2}$$

woraus folgt: $\frac{h}{d} = \sqrt[4]{\frac{h}{b}}$ wobei b die kleinere Axe des elliptischen Querschnittes bedeutet.

Allgemeinster Fall des Gleichgewichtes eines im natürlichen Zustande krummen Stabes.

Betrachten wir nun den allgemeinsten Fall des Gleichgewichtes eines im natürlichen Zustande gekrümmten Stabes, indem wir annehmen: 1) die Axenlinie des Stabes sei im natürlichen Zustande desselben eine Linie von doppelter Krümmung; 2) die äusseren, auf den Stab einwirkenden Kräfte seien in beliebiger Anzahl vorhanden, und ihre Angriffspunkte befinden sich an beliebigen Orten.

Es sei Fig. 1, Tafel V., A M B ein Stück der Axenlinie des Stabes im natürlichen Zustande desselben, M, N, P drei unendlich wenig von einander entfernte Punkte der Axenlinie. Denken wir uns durch diese drei Punkte eine Ebene F gelegt, so ist dieselbe die Krümmungsebene des Bogenstückes M N P. Legen wir durch die Punkte M und N Normalebenen $E\, E_1$ (d. h. Ebenen, die in den Punkten M und N senkrecht stehen, auf den Berührungslinien, welche in diesen Punkten an die Axenlinie gezogen werden können), so schneiden sich dieselben in einer auf der Krümmungsebene senkrecht stehenden Linie H O K, und die Entfernung des Durchschnittspunktes O dieser Linie mit der Krümmungsebene F von M oder N bestimmt den Krümmungshalbmesser des Kurvenstückes M N. Nennt man diesen Krümmungshalbmesser ϱ_0, so ist $\varrho_0 = O\,M = O\,N$.

Es sei Fig. 2, Tafel V., der Querschnitt des Stabes durch die durch M gelegte Normalebene E, O M z die Linie, in welcher die Ebene E dieses Querschnittes durch die Krümmungsebene F geschnitten wird; M x eine auf M z senkrechte Linie, die also parallel ist zur Durchschnittslinie H O K der durch M und N gelegten Normalebenen $E\, E_1$.