Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Rückwirkende Festigkeit

urn:nbn:de:bsz:31-270970

Körperformen von gleicher Festigkeit gegen Biegung durch Zusammendrückung.

Für einen Stab, der durch eine Kraft, welche nach der Richtung der Axe wirkt, zusammengedrückt und gebogen wird, haben wir nach Seite 42 und 43 folgende Resultate:

$$\left.\begin{array}{l} p = \dfrac{P \cos \varphi}{\Omega} - \dfrac{P}{E z} y \zeta \\[2ex] \dfrac{d^2 y}{d x^2} + \dfrac{P}{\varepsilon z E} y = o \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Die Bedeutung der einzelnen Grössen ist Seite 41 angegeben. Nennt man Π die Intensität der Pressung, welche in dem Punkt q herrscht, Fig. 6 und 7, Tafel III., und setzt $m\,q = z_1$, so muss der ersten der Gleichungen (1) entsprochen werden, wenn man p gleich Π und ζ gleich $- z_1$ setzt. Man erhält daher:

$$\Pi = \frac{P \cos \varphi}{\Omega} + \frac{P}{E} \frac{z_1}{z} y \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Ist die Biegung sehr schwach, so darf man sich erlauben, $\cos \varphi$ gleich 1 zu setzen, und dann wird:

$$\Pi = \frac{P}{\Omega} + P \frac{z_1}{z} \frac{y}{E} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Wenn wir nun die Bedingung stellen, dass der Körper in allen Querschnitten gleich stark in Anspruch genommen sein soll, so muss Π für jeden Punkt der Linie $B\,B_1\,B_2$ ein und denselben Werth haben. Verlangen wir überdies, dass alle Querschnitte des Körpers geometrisch-ähnliche Figuren sind, so ist $\frac{z_1}{z}$ für alle Querschnitte constant. Der Werth von Π fällt also in diesem Falle wegen (3) constant aus, wenn $\frac{y}{E}$ für jeden Querschnitt ein und denselben Werth $\left(\Pi - \frac{P}{\Omega}\right) \frac{z}{P z_1}$ hat.

Setzen wir:

$$\frac{1}{P} \left(\Pi - \frac{P}{\Omega}\right) \frac{z}{z_1} = \frac{y}{E} = k \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

so wird die zweite der Gleichungen (1):

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = - \frac{P k}{\varepsilon z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

In dieser Gleichung ist aber in unserem Falle z eine Funktion von x. Weil wir voraussetzen, dass alle Querschnitte geometrisch-ähnliche Figuren sind, so können wir der Grösse E die Form geben:

$$E = m z^3 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

und es ist dann m eine von der Grösse des Querschnittes unabhängige Grösse, oder eine Grösse, die für *alle* Querschnitte des Stabes einerlei Werth hat. Wir erhalten nunmehr wegen (4):

$$y = k E = k m z^3 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Wäre die Gleichung der Axenfaser schon bekannt, so würde man vermittelst dieses Ausdruckes diejenige Begrenzungslinie des Stabes finden, welche einer durchaus gleichen Festigkeit entspricht. Allein die Gleichung der Axenfaser ist noch nicht bekannt, und ist selbst von der Begrenzungslinie des Stabes abhängig, man muss demnach beide Linien direkt zu bestimmen suchen. Dies geschieht auf folgende Weise. Aus (7) folgt durch Differenziation:

$$d y = k m 3 z^2 d z, \quad d^2 y = 3 k m (z^2 d^2 z + 2 z d z^2)$$

Führt man diesen Werth in (5) ein, so folgt:

$$3 k m \frac{z^2 d^2 z + 2 z d z^2}{d x^2} = - \frac{P k}{\varepsilon z}$$

oder:

$$z^3 \frac{d^2 z}{d x^2} + 2 z^2 \left(\frac{d z}{d x}\right)^2 = - \frac{P}{3 m \varepsilon}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{P}{3 m \varepsilon} = \lambda^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

so wird:

$$z^3 \frac{d^2 z}{d x^2} + 2 z^2 \left(\frac{d z}{d x}\right)^2 = - \lambda^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Das Integrale dieser Gleichung gibt die Begrenzungslinie, welche einer gleichen Festigkeit entspricht.

Setzt man, um die Integration zu bewerkstelligen:

$$\left(\frac{d z}{d x}\right)^2 = u \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

so wird:

$$\frac{d^2 z}{d x^2} = \frac{1}{2} \frac{d u}{d z}$$

und die Gleichung (9) wird:

$$\frac{1}{2} z^3 \frac{d u}{d z} + 2 z^2 u = - \lambda^2$$

oder:

$$\frac{d z}{z} + \frac{1}{2} \frac{z^2 d u}{\lambda^2 + 2 u z^2} = o \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Setzt man hier weiter:

$$\lambda^2 + 2 u z^2 = v \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

demnach:

$$d v = 2 z^2 d u + 4 u z d z, \quad z^2 d u = \frac{d v - 4 u z d z}{2}$$

so wird die Gleichung (11):

$$\frac{d z}{z} + \frac{1}{2} \frac{d v - 4 u z d z}{2 v} = o$$

oder wenn für u sein Werth aus (12) eingeführt wird, findet man nach einigen einfachen Reduktionen:

$$\frac{d z}{z} + \frac{1}{2} \frac{d v}{v + \lambda^2} = o$$

Das Integrale dieser Gleichung ist:

$$\text{lognat}\, z + \text{lognat}\, (v + \lambda^2)^{\frac{1}{2}} = \text{Const}$$

oder:

$$z = \frac{A}{(v + \lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

wobei A die Constante der Integration bedeutet.

Setzt man für v seinen Werth aus (12), so wird:

$$z^2 = \frac{A^2}{2 (\lambda^2 + u z^2)}$$

und hieraus folgt:

$$u = \frac{1}{z^4} \left(\frac{A^2}{2} - \lambda^2 z^2 \right)$$

oder wegen (10):

$$\frac{d z}{d x} = \frac{\sqrt{\frac{A^2}{2} - \lambda^2 z^2}}{z^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 14)$$

Nennt man 2 l die ganze Länge des Stabes, r den Werth von z für $x = l$, so ist für $z = r$ $\quad \frac{d z}{d x} = o$, demnach:

$$\sqrt{\frac{A^2}{2} - \lambda^2 r^2} = o \quad \text{oder} \quad \frac{A^2}{2} = \lambda^2 r^2$$

folglich:

$$\frac{d\,z}{d\,x} = \lambda \frac{\sqrt{r^2 - z^2}}{z^2}, \text{ oder } d\,x = \frac{1}{\lambda} \frac{z^2\,d\,z}{\sqrt{r^2 - z^2}}$$

Das Integrale dieser Gleichung ist:

$$x = \frac{1}{\lambda}\left(-\frac{z\sqrt{r^2 - z^2}}{2} + \frac{r^2}{2} \text{ Arc sin } \frac{z}{r}\right) + \text{Const}$$

oder weil für $x = o$ $z = o$ wird, so ist Const $= o$, demnach

$$x = \frac{r^2}{2\,\lambda}\left[\text{Arc sin } \frac{z}{r} - \frac{z}{r}\sqrt{1 - \left(\frac{z}{r}\right)^2}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

für $x = l$ wird $z = r$, demnach

$$l = \frac{r^2}{2\,\lambda} \text{ Arc sin } 1 = \frac{r^2}{2\,\lambda}\,\frac{\pi}{2} = \frac{r^2\,\pi}{4\,\lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Durch Division von (15) und (16) folgt:

$$\frac{x}{l} = \frac{2}{\pi}\left[\text{Arc sin} \frac{z}{r} - \frac{z}{r}\sqrt{1 - \left(\frac{z}{r}\right)^2}\right] \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Die Gleichung (16) gibt endlich, wenn man für λ seinen Werth aus (8) einführt:

$$16\,l^2 \frac{P}{3\,m\,\varepsilon} = r^4\,\pi^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Nennt man E_1 den Werth von E, welcher dem mittleren Querschnitt des Stabes entspricht, so ist wegen (6) $m = \frac{E_1}{r^3}$, demnach wird (18):

$$P = \frac{3}{16}\,\pi^2\,\varepsilon\,\frac{r\,E_1}{l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Diese Gleichung bestimmt das Tragungsvermögen des Stabes, oder bestimmt, wenn P gegeben ist, den mittleren Querschnitt des Stabes. Für einen Stab mit kreisförmigem Querschnitt ist:

$$E_1 = \frac{\pi}{32}\,(2\,r)^3 = \frac{\pi\,r^3}{4}$$

und dann findet man:

$$P = \frac{3}{64} \pi^3 \varepsilon \frac{r^4}{l^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

Nennt man d den Durchmesser des Stabes in der Mitte, $L = 2\,l$ die totale Länge des Stabes, so wird:

$$P = \frac{3}{4} \frac{\pi^3}{64} \varepsilon \frac{d^4}{L^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

Vergleicht man diesen Werth von P mit jenem, der für einen cylindrischen Stab gefunden wurde, so sieht man, dass das Tragungsvermögen des Stabes von gleicher Festigkeit gleich ist $\frac{3}{4}$ von jenem eines cylindrischen von gleicher Dicke.

Aus (7) folgt $z = \sqrt[3]{\frac{y}{k\,m}}$. Führt man diesen Werth von z in (17) ein, so ergibt sich eine Beziehung zwischen x und y und dies ist die Gleichung der gebogenen Axenfaser.

Die Gleichung (17) gibt:

$$\text{für} \quad \frac{z}{r} = 0{\cdot}75 \qquad 0{\cdot}50 \qquad 0{\cdot}25$$

$$\frac{x}{l} = 0{\cdot}224 \qquad 0{\cdot}058 \qquad 0{\cdot}0106$$

Hieraus erkennt man, dass man eine Stabform findet, welche annähernd einerlei Festigkeit darbietet, wenn man an den Enden des Stabes Querschnitte annimmt, welche dem mittleren Querschnitt geometrisch ähnlich, aber linear halb so gross sind und diese Endquerschnitte mit dem mittleren durch gerade Linien verbindet. Es ist nämlich für $\frac{z}{r} = 0{\cdot}5$, $\frac{x}{l} = 0{\cdot}058$, also x beinahe gleich Null.

Aequivalenz der Querschnitte.

Wir sagen, zwei Querschnitte seien äquivalent (gleichwerthig), wenn dieselben unter gleichen Umständen einerlei Festigkeit gewähren.

Hinsichtlich der absoluten Festigkeit sind alle Querschnitte von gleicher Grösse äquivalent.

Hinsichtlich der Bruchfestigkeit sind zwei Querschnitte äquivalent, wenn für dieselben die E-Funktionen (Tafel V. der Resultate für den Maschinenbau) gleichen Werth haben.