Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Bruchfestigkeit

urn:nbn:de:bsz:31-270970

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{a_1}\,(Q + a_1\, l_1\, \gamma) = \frac{1}{a_2}\,(Q + a_1\, l_1\, \gamma + a_2\, l_2\, \gamma)$$
$$= \frac{1}{a_3}\,(Q + a_1\, l_1\, \gamma + a_2\, l_2\, \gamma + a_3\, l_3\, \gamma) = \;.\;.\;.\;.\;.$$

Hieraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{Q}{\mathfrak{A} - l_1\,\gamma} \\ a_2 &= \frac{Q + a_1\, l_1\, \gamma}{\mathfrak{A} - l_2\,\gamma} \\ a_3 &= \frac{Q + a_1\, l_1\, \gamma + a_2\, l_2\, \gamma}{\mathfrak{A} - l_3\,\gamma} \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (1)$$

woraus die Querschnitte der einzelnen Stangen berechnet werden können. Durch successive Substitutionen der Werthe von a_1 in a_2, von a_1 und a_2 in a_3 und so fort findet man auch:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{Q}{\mathfrak{A} - l_1\,\gamma} \\ a_2 &= \frac{Q\,\mathfrak{A}}{(\mathfrak{A} - l_1\,\gamma)\,(\mathfrak{A} - l_2\,\gamma)} \\ a_3 &= \frac{Q\,\mathfrak{A}^2}{(\mathfrak{A} - l_1\,\gamma)\,(\mathfrak{A} - l_2\,\gamma)\,(\mathfrak{A} - l_3\,\gamma)} \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\; (2)$$

Bruchfestigkeit. Wird ein Stab, der überall gleiche Querschnitte hat, durch eine äussere Kraft gebogen, so entsteht in einem bestimmten Punkt der Oberfläche eine grösste Spannungsintensität; der Stab ist demnach in diesem Querschnitt schwächer als in jedem andern, und ist demnach keine Form von gleicher Festigkeit, sondern eine solche Form erfordert veränderliche Querschnitte.

Nennt man M das Moment der äusseren Kräfte, welches die in einem bestimmten Querschnitt eintretenden Spannungen und Pressungen hervorruft, $\mathfrak{S}$ die in diesem Querschnitt vorkommende grösste Spannungsintensität, so hat man: $M = \mathfrak{S}\, E$, wobei der Werth von E aus Tafel V. der Resultate des Maschinenbaues zu nehmen ist. Drückt man E durch die Querschnittsdimensionen und M theils durch die äusseren Kräfte, theils durch die Position des Querschnitts aus und betrachtet $\mathfrak{S}$ als eine constante Grösse, so bestimmt obige Gleichung eine Form von gleicher Festigkeit. Wir wollen mehrere Beispiele behandeln.

Erstes Beispiel. Ein stabförmiger Körper wird am einen Ende festgehalten, am andern belastet, Fig. 4., Tafel IV., seine Breite oder Dicke sei unveränderlich b, seine Höhe hingegen veränderlich. An der Befestigungsstelle sei die Höhe gleich h, in einer Entfernung x vom freien Ende gleich y. Nun sind für die Querschnitte $A\,B$ und $A_1\,B_1$

die Werthe von M gleich . . . . $P\,l$ „ $P\,x$

die Werthe von E . . . . $\frac{1}{6}\,b\,h^2$ „ $\frac{1}{6}\,b\,y^2$

Soll nun der Körper überall gleiche Festigkeit gewähren, so muss der Werth von $\mathfrak{S}$ für alle Punkte von A bis C unveränderlich bleiben, wir haben daher vermöge $M = \mathfrak{S}\,E$:

$$P\,l = \frac{\mathfrak{S}}{6}\,b\,h^2 \qquad P\,x = \frac{\mathfrak{S}}{6}\,b\,y^2 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Vermittelst der ersten dieser Gleichungen bestimmt man die Querschnittsdimension von $A\,B$. Durch Division dieser beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{y}{h} = \sqrt{\frac{x}{l}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel, deren Scheitel in C liegt. Ein stabförmiger Körper von gleicher Dicke muss also ein parabolisches Längenprofil erhalten, wenn derselbe überall einerlei Festigkeit gewähren soll.

Diese parabolische Form ist für gusseiserne Körper von grösseren Dimensionen ganz zweckmässig, denn sie ist in Gusseisen leicht herzustellen, und erfordert nicht viel Material. Allein für Körper aus Holz oder aus Schmiedeisen ist diese Form nicht geeignet, weil ihre Herstellung verhältnissmässig viele Arbeit verursacht, und überdies bei Holz die Abfälle beinahe werthlos sind. Für diese beiden Materialien ist es in der Regel angemessen, eine ebenflächige Form zu wählen, die von der parabolischen nicht viel abweicht. Eine solche Annäherungsform erhält man auf folgende Weise. Nimmt man $\frac{x}{l} = \frac{1}{4}$, so wird vermöge (2) $\frac{y}{h} = \frac{1}{2}$ oder für $x = \frac{1}{4}\,l$ muss $y = \frac{1}{2}\,h$ gemacht werden, um einen Punkt der Parabel zu finden.

Nimmt man also Fig. 5, Tafel IV., $C\,A_1 = \frac{1}{4}\,C\,A = \frac{1}{4}\,l$, $A_1\,B_1 = \frac{1}{2}\,A\,B = \frac{1}{2}\,h$, so ist B_1 ein Punkt der Parabel, die der gleichen Festigkeit entspricht. Verbindet man B mit B_1 durch eine gerade Linie, verlängert dieselbe und zieht $C\,D$ parallel mit $A\,B$, so erhält man ein Trapez $A\,C\,B\,D$, und dies ist offenbar eine Form, welche annähernd gleiche Festigkeit gewährt. Von A bis A_1 ist der parabolische, von

A_1 bis C der trapezförmige Körper fester, bei $A\,B$ und $A_1\,B_1$ sind beide gleich fest.

Zweites Beispiel. Constante Höhe, veränderliche Dicke. Lassen wir die Höhe constant, und nehmen die Dicke veränderlich, so erhalten wir mit Berücksichtigung von Fig. 6, Tafel IV., $P\,l = \frac{\mathfrak{S}}{6}\,b\,h^2$ $P\,x = \frac{\mathfrak{S}}{6}\,z\,h^2$. Die erste dieser Gleichungen bestimmt wiederum den Querschnitt an der Befestigungsstelle, und durch Division dieser zwei Gleichungen ergibt sich zur Bestimmung des Horizontalschnittes die Gleichung: $\frac{x}{l} = \frac{z}{b}$, woraus hervorgeht, dass dieser Horizontalschnitt ein geradliniges Dreieck ist.

Drittes Beispiel. Geometrisch-ähnliche Querschnitte. Stellen wir die Forderung, dass alle Querschnitte des Körpers geometrisch-ähnliche Rechtecke sein sollen, dann haben wir mit Berücksichtigung von Fig. 7, Tafel IV.:

$$P\,l = \frac{\mathfrak{S}}{6}\,b\,h^2, \quad P\,x = \frac{\mathfrak{S}}{6}\,z\,y^2,$$

Die erste Gleichung bestimmt die Dimensionen an der Befestigungsstelle. Durch Division dieser Gleichungen folgt: $\frac{l}{x} = \frac{b\,h^2}{z\,y^2}$ oder auch:

$$\frac{l}{x} = \frac{h^3}{y^3}\,\frac{\frac{b}{h}}{\frac{z}{y}}$$

Allein weil wir die Forderung stellen, dass alle Querschnitte geometrisch-ähnliche Rechtecke sein sollen, so ist $\frac{b}{h} = \frac{z}{y}$, demnach folgt aus obiger Gleichung:

$$\frac{y}{h} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Wegen $\frac{b}{h} = \frac{z}{y}$ ist aber $\frac{y}{h} = \frac{z}{b}$, demnach:

$$\frac{z}{b} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Jede dieser zwei Gleichungen (1) und (2) entspricht einer kubischen Parabel. Der Stab müsste also im Grundriss und in der

Ansicht nach kubischen Parabeln verjüngt werden, um überall die gleiche Festigkeit darzubieten. Diese Form empfiehlt sich aber nicht für die Ausführung, denn ihre Herstellung verursacht sehr viele Arbeit, und überdies ist auch diese Form sehr unschön. Man thut auch hier am besten, eine Annäherungsform zu wählen. Setzt man in (1) und (2) $\frac{x}{l} = \frac{1}{8}$ so findet man $\frac{y}{h} = \frac{1}{2}$ $\frac{z}{b} = \frac{1}{2}$.

Macht man Fig. 8, Tafel IV., $C A_1 = \frac{1}{8} C A$, $\overline{A_1 B_1} = \frac{1}{2} \overline{A B}$ $E_1 F_1 = \frac{1}{2} E F$ und verzeichnet die Trapeze $A C B D$, $E F G H$, so bestimmen diese eine geeignete Annäherungsform, die leicht ausgeführt werden kann, beinahe gleiche Festigkeit darbietet und auch beinahe nicht mehr Material erfordert, als die komplizirte Form mit zwei kubischen Parabeln.

Viertes Beispiel. Rotationsfläche von gleicher Festigkeit. Für eine Rotationsfläche, Fig. 9, Tafel IV., hat man:

$$\left.\begin{aligned} P\,l &= \frac{\mathfrak{S}\pi}{32}\,d^3 \\ P\,x &= \frac{\mathfrak{S}\pi}{32}\,y^3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Die erste dieser Gleichungen gibt $d = \sqrt[3]{\frac{32}{\mathfrak{S}\pi} P\,l}$. Durch Division der beiden Gleichungen findet man:

$$\frac{y}{d} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Dies ist abermals eine kubische Parabel, also eine sehr schwierig auszuführende und sehr hässliche Form.

$$\text{Für } \frac{x}{l} = \frac{1}{8} \text{ wird } \frac{y}{d} = \frac{1}{2}.$$

Bildet man also einen abgestumpften Kegel, Fig. 10, Tafel IV., der in einer Entfernung $\frac{1}{8}\,l$ vom dünnen Ende halb so dick ist, als an der Basis, so ist dies eine Annäherungsform an die kubische Parabel.