Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Absolute Festigkeit

urn:nbn:de:bsz:31-270970

Setzt man in diesen Formeln für T die Coeffizienten der Torsionsfestigkeit, so erhält man die Wirkungsgrössen, welche dem Abwinden entsprechen. Die Tafel Seite 36 (der Resultate) gibt für verschiedene Materialien den Werth von $\frac{T^2}{G}$ für das Abwinden.

Wenn wir die Resultate vergleichen, welche wir für die Wirkungsgrössen gefunden haben, die dem Ausdehnen, Biegen und Drehen entsprechen, so ersieht man, dass in allen Fällen diese Wirkungsgrösse dem Arbeitsmodulus (Quadrat des Festigkeitscoeffizienten, dividirt durch den Modulus der Elastizität), und bei einfachen nicht ausgehöhlten Formen dem Volumen des Stabs proportional ist.

Körper von gleicher Festigkeit.

Es gibt Körperformen, welche die Eigenschaft haben, bei gewissen Einwirkungen von äusseren Kräften in allen Querschnitten gleich stark in Anspruch genommen zu werden. Man nennt solche Körperformen Körper von gleicher Festigkeit, weil bei denselben die Wahrscheinlichkeit, dass eine Trennung der Atome eintritt, für jeden Querschnitt gleich gross ist. Derlei Formen sollen nun bestimmt werden.

Absolute Festigkeit. Wenn ein aus einem homogenen Material bestehender Stab nach horizontaler Richtung eingespannt und gedehnt wird, treten in dem ganzen Stab gleich grosse Spannungen ein, wenn alle Querschnitte des Stabes gleich gross sind und stetig in einander übergehen.

Ist dagegen ein sehr langer stabförmiger Körper in vertikaler Richtung am oberen Ende festgehalten, am unteren Ende belastet, so werden die Querschnitte eines solchen Stabes von unten nach oben hin nach einem gewissen Gesetze zunehmen müssen, wenn in allen Querschnitten gleich grosse Spannungen eintreten sollen.

Nennt man P die an dem Stab hängende Last, Fig. 2, Tafel IV., γ das Gewicht von einem Kubikcentimeter des Materials, aus welchem der Stab besteht; $\mathfrak{A}$ die Spannung, welche in jedem Quadratcentimenter jedes Querschnittes eintreten soll; Ω den Querschnitt des Stabes in einer Höhe x oberhalb des untersten Punktes. G das Gewicht des Stabtheiles von der Länge x, so ist: $G + P$ die den Querschnitt Ω spannende Kraft und $\frac{G + P}{\Omega} = \mathfrak{A}$ die Spannungsintensität in diesem Querschnitt. Geht man zu einem nächsten Querschnitt über, der vom unteren Ende um $x + dx$ entfernt ist, so beträgt das Gewicht des Stabtheils von der Länge dx $\gamma \Omega dx$, ist demnach die spannende Kraft in diesem nächsten Querschnitt $G + \gamma \Omega dx + P$, der Querschnitt selbst ist aber an dieser Stelle $\Omega + d\Omega$, demnach die Spannungsintensität $\frac{G + \gamma \Omega dx + P}{\Omega + d\Omega} = \mathfrak{A}$. Aus diesen zwei Werthen von $\mathfrak{A}$ folgt:

$$\frac{d\Omega}{\Omega} = \frac{\gamma}{\mathfrak{A}} dx$$

Demnach durch Integration:

$$\Omega = \mathfrak{C} e^{\frac{\gamma}{\mathfrak{A}} x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wobei $e = 2{\cdot}718$ die Basis der natürlichen Logarithmen und $\mathfrak{C}$ die Integrationsconstante bedeutet. Nun ist für den untersten Querschnitt $x = 0$ und $\Omega = \frac{P}{\mathfrak{A}}$, demnach $\mathfrak{C} = \frac{P}{\mathfrak{A}}$, daher

$$\Omega = \frac{P}{\mathfrak{A}} e^{\frac{\gamma}{\mathfrak{A}} x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Diese Regel ist von keinem praktischen Werth, denn es würde zu schwierig und zu kostspielig sein, sehr lange Stäbe oder Stangen, z. B. Schachtgestänge nach dieser komplizirten Form herzustellen, welche der Gleichung (2) entspricht.

Wenn vertikale Gestänge von so beträchtlicher Länge hergestellt werden sollen, dass ihr Gewicht gegen die angehängte Last nicht vernachlässigt werden kann, begnügt man sich in der Praxis mit einer Annäherung, die darin besteht, dass man das ganze Gestänge aus einzelnen Stangen herstellt, von denen jede in allen ihren Theilen gleich grosse Querschnitte hat, und den Querschnitt der aufeinander folgenden Stangen so bestimmt, dass die Spannungsintensitäten in den obersten Querschnitten der einzelnen Stangen des ganzen Gestängs gleich gross ausfallen.

Diese Querschnitte werden auf folgende Weise bestimmt:

Es seien a_1 a_2 a_3 die Querschnitte, l_1 l_2 l_3 die Längen der von unten nach aufwärts gezählten Stangen des ganzen Gestänges, Fig. 3, Taf. IV., γ das Gewicht von einem Kubikcentimeter des Materials, aus welchem die Stangen bestehen, $\mathfrak{A}$ die Spannungsintensität in dem obersten Querschnitt jeder einzelnen Stange. Q die unten am Gestänge hängende Last.

Dies vorausgesetzt hat man:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{a_1}(Q + a_1\, l_1\, \gamma) = \frac{1}{a_2}(Q + a_1\, l_1\, \gamma + a_2\, l_2\, \gamma)$$
$$= \frac{1}{a_3}(Q + a_1\, l_1\, \gamma + a_2\, l_2\, \gamma + a_3\, l_3\, \gamma) = \; . \; . \; . \; . \; .$$

Hieraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{Q}{\mathfrak{A} - l_1\, \gamma} \\ a_2 &= \frac{Q + a_1\, l_1\, \gamma}{\mathfrak{A} - l_2\, \gamma} \\ a_3 &= \frac{Q + a_1\, l_1\, \gamma + a_2\, l_2\, \gamma}{\mathfrak{A} - l_3\, \gamma} \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

woraus die Querschnitte der einzelnen Stangen berechnet werden können. Durch successive Substitutionen der Werthe von a_1 in a_2, von a_1 und a_2 in a_3 und so fort findet man auch:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{Q}{\mathfrak{A} - l_1\, \gamma} \\ a_2 &= \frac{Q\, \mathfrak{A}}{(\mathfrak{A} - l_1\, \gamma)\, (\mathfrak{A} - l_2\, \gamma)} \\ a_3 &= \frac{Q\, \mathfrak{A}^2}{(\mathfrak{A} - l_1\, \gamma)\, (\mathfrak{A} - l_2\, \gamma)\, (\mathfrak{A} - l_3\, \gamma)} \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Bruchfestigkeit. Wird ein Stab, der überall gleiche Querschnitte hat, durch eine äussere Kraft gebogen, so entsteht in einem bestimmten Punkt der Oberfläche eine grösste Spannungsintensität; der Stab ist demnach in diesem Querschnitt schwächer als in jedem andern, und ist demnach keine Form von gleicher Festigkeit, sondern eine solche Form erfordert veränderliche Querschnitte.

Nennt man M das Moment der äusseren Kräfte, welches die in einem bestimmten Querschnitt eintretenden Spannungen und Pressungen hervorruft, $\mathfrak{S}$ die in diesem Querschnitt vorkommende grösste Spannungsintensität, so hat man: $M = \mathfrak{S}\, E$, wobei der Werth von E aus Tafel V. der Resultate des Maschinenbaues zu nehmen ist. Drückt man E durch die Querschnittsdimensionen und M theils durch die äusseren Kräfte, theils durch die Position des Querschnitts aus und betrachtet $\mathfrak{S}$ als eine constante Grösse, so bestimmt obige Gleichung eine Form von gleicher Festigkeit. Wir wollen mehrere Beispiele behandeln.

Erstes Beispiel. Ein stabförmiger Körper wird am einen Ende festgehalten, am andern belastet, Fig. 4., Tafel IV., seine Breite oder Dicke