Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Drehung

urn:nbn:de:bsz:31-270970

$$\begin{array}{llll}
\text{Es ist} . & \frac{E\,l}{z} & \text{demnach} & W \\
\text{für einen rechteckigen Stab} \;.\; & \frac{1}{3}\,\mathfrak{V} & \ldots & \frac{1}{18}\,\frac{\mathfrak{S}^2}{\varepsilon}\,\mathfrak{V} \\
\text{„ „ cylindrischen Stab} \;.\; & \frac{1}{4}\,\mathfrak{V} & \ldots & \frac{1}{24}\,\frac{\mathfrak{S}^2}{\varepsilon}\,\mathfrak{V} \\
\text{„ „ ellyptischen Stab} \;.\;.\; & \frac{1}{5}\,\mathfrak{V} & \ldots & \frac{1}{24}\,\frac{\mathfrak{S}^2}{\varepsilon}\,\mathfrak{V}
\end{array}\right\} \;.\; (7)$$

wobei $\mathfrak{V}$ das Volumen des Stabes bezeichnet.

Die gleichen Resultate findet man auch dann, wenn man annimmt, dass der Stab auf zwei Stützen gelegt und durch eine in seiner Mitte wirkende Kraft gebogen wird, bis eine Maximalspannung $\mathfrak{S}$ eintritt. Nimmt man auch hier wiederum an, dass das Gesetz (1) bis zum Bruch richtig ist und setzt für $\mathfrak{S}$ den Bruchcoefficienten $\mathfrak{B}$, so drücken die Formeln (6) und (7) die Wirkungen aus, welche erforderlich sind, um stabförmige Körper durch Biegung zu brechen. Diese Bruchwirkung ist jedoch nur für ganz einfache, nicht ausgehöhlte Formen dem Volumen proportional; für einen Hohlcylinder wird z. B. $\frac{E}{z} = \frac{\pi}{16}\,\frac{d^4 - d_1^{\,4}}{d^2}$, und demnach:

$$W = \frac{1}{24}\,\frac{\mathfrak{S}^2}{\varepsilon}\,\mathfrak{V}\left[1 + \left(\frac{d_1}{d}\right)^2\right]$$

woraus man sieht, dass die Bruchwirkung nicht jederzeit dem Volumen proportional ausfällt.

Drehung eines Stabes. Wird ein Stab an einem Ende befestiget und am anderen Ende durch ein Kraftmoment M gedreht, so entsteht in dem Stabe eine Verwindung, wobei der Querschnitt, an welchem das Kraftmoment wirkt, gegen den befestigten Querschnitt um einen (in Theilen des Halbmessers $= 1$ ausgedrückten) Bogen Θ verdreht wird, der nach Gleichung (11), Seite 59, beträgt:

$$\Theta = \frac{M\,l}{G\,\mu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Die Arbeit, welche erforderlich ist, um den Stab aus seinem natürlichen Zustand um einen Bogen α zu verwinden ist:

$$W = \int_0^\alpha M\,d\,\Theta$$

demnach, wenn man für M seinen Werth aus (1) einführt:

$$W = \int_0^\alpha \frac{G\ \mu\ \Theta}{l}\ d\ \Theta = \frac{1}{2}\ \frac{G\ \mu}{l}\ \alpha^2\ \ldots\ldots\ (2)$$

Heisst man M_1 das Moment, welches dem Winkel α entspricht, so hat man wegen (1):

$$\alpha = \frac{M_1\ l}{G\ \mu}$$

Führt man diesen Werth in (2) ein, so wird:

$$W = \frac{1}{2}\ \frac{M_1{}^2\ l}{G\ \mu}$$

Nennt man T die Intensität der Verschiebungskraft in der von der Axe entferntesten Faser, so ist nach (3), Seite 57

$$M_1 = \frac{T\ \mu}{k}$$

daher wird

$$W = \frac{1}{2}\ \frac{T^2}{G}\left(\frac{l\ \mu}{k^2}\right)\ \ldots\ldots\ (2)$$

Für einen massiven cylindrirchen Stab von einem Durchmesser d ist das Trägheitsmoment μ des Querschnittes gleich $\frac{\pi}{32}\ d^4$ und ist $k = \frac{d}{2}$ und dann wird aus (2):

$$W = \frac{1}{4}\ \frac{T^2}{G}\ \mathfrak{B}\ \ldots\ldots\ (3)$$

wobei $\mathfrak{B}$ das Volumen des Stabes bedeutet.

Für einen Stab mit quadratischem Querschnitt ist $\mu = \frac{1}{6}\ b^4$, $k = \frac{b}{\sqrt{2}}$ wobei b die Seite des Quadrates bezeichnet, und es folgt aus (2):

$$W = \frac{1}{6}\ \frac{T^2}{G}\ \mathfrak{B}\ \ldots\ldots\ (4)$$

Für einen Hohlcylinder ist: $\mu = \frac{\pi}{32}\ (d^4 - d_1{}^4)$, wobei d der äussere, d_1 der innere Durchmesser, und $k = \frac{d}{2}$, demnach wird:

$$W = \frac{1}{4}\ \frac{T^2}{G}\ \mathfrak{B}\left[1 + \left(\frac{d_1}{d}\right)^2\right]\ \ldots\ldots\ (5)$$

Setzt man in diesen Formeln für T die Coeffizienten der Torsionsfestigkeit, so erhält man die Wirkungsgrössen, welche dem Abwinden entsprechen. Die Tafel Seite 36 (der Resultate) gibt für verschiedene Materialien den Werth von $\frac{T^2}{G}$ für das Abwinden.

Wenn wir die Resultate vergleichen, welche wir für die Wirkungsgrössen gefunden haben, die dem Ausdehnen, Biegen und Drehen entsprechen, so ersieht man, dass in allen Fällen diese Wirkungsgrösse dem Arbeitsmodulus (Quadrat des Festigkeitscoeffizienten, dividirt durch den Modulus der Elastizität), und bei einfachen nicht ausgehöhlten Formen dem Volumen des Stabs proportional ist.

Körper von gleicher Festigkeit.

Es gibt Körperformen, welche die Eigenschaft haben, bei gewissen Einwirkungen von äusseren Kräften in allen Querschnitten gleich stark in Anspruch genommen zu werden. Man nennt solche Körperformen Körper von gleicher Festigkeit, weil bei denselben die Wahrscheinlichkeit, dass eine Trennung der Atome eintritt, für jeden Querschnitt gleich gross ist. Derlei Formen sollen nun bestimmt werden.

Absolute Festigkeit. Wenn ein aus einem homogenen Material bestehender Stab nach horizontaler Richtung eingespannt und gedehnt wird, treten in dem ganzen Stab gleich grosse Spannungen ein, wenn alle Querschnitte des Stabes gleich gross sind und stetig in einander übergehen.

Ist dagegen ein sehr langer stabförmiger Körper in vertikaler Richtung am oberen Ende festgehalten, am unteren Ende belastet, so werden die Querschnitte eines solchen Stabes von unten nach oben hin nach einem gewissen Gesetze zunehmen müssen, wenn in allen Querschnitten gleich grosse Spannungen eintreten sollen.

Nennt man P die an dem Stab hängende Last, Fig. 2, Tafel IV., γ das Gewicht von einem Kubikcentimeter des Materials, aus welchem der Stab besteht; $\mathfrak{A}$ die Spannung, welche in jedem Quadratcentimenter jedes Querschnittes eintreten soll; Ω den Querschnitt des Stabes in einer Höhe x oberhalb des untersten Punktes. G das Gewicht des Stabtheiles von der Länge x, so ist: $G + P$ die den Querschnitt Ω spannende Kraft und $\frac{G + P}{\Omega} = \mathfrak{A}$ die Spannungsintensität in diesem Querschnitt. Geht man zu einem nächsten Querschnitt über, der vom unteren Ende um $x + d\,x$ entfernt ist, so