Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Ausdehnung

urn:nbn:de:bsz:31-270970

gen, die hier nicht am Platze wären. Diese nicht cylindrischen und nicht sphärischen Gefässe sind bei starken Pressungen möglichst zu vermeiden.

Berechnung der Wirkungsgrößen, welche zur Ausdehnung, Zusammendrückung, Verwindung und Biegung von Stäben nothwendig sind.

Ausdehnung. Es sei ε der Modulus der Elastizität des Materials, aus welchem ein Stab besteht; l seine Länge; a sein Querschnitt; K die Kraft, welche den Stab um x zu verlängern vermag, so haben wir nach dem Ausdehnungsgesetz:

$$K = \frac{a\,\varepsilon}{l}\,x \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Die Wirkung, welche nothwendig ist, um den Stab von $x = o$ bis $x = \lambda$ auszudehnen, ist: $\int_o^\lambda K\,dx = W$. Wir erhalten daher vermöge (1):

$$W = \frac{a\,\varepsilon}{l}\int_o^\lambda x\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{a\,\varepsilon}{l}\,\lambda^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Nennen wir die der Ausdehnung λ entsprechende Zugkraft P, so haben wir vermöge (1):

$$P = \frac{a\,\varepsilon}{l}\,\lambda \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Führt man den aus dieser Gleichung folgenden Werth von λ in (2) ein, so erhält man einen Ausdruck, der leicht in folgende Form gebracht werden kann:

$$W = \frac{1}{2}\,a\,l\,\frac{\left(\frac{P}{a}\right)^2}{\varepsilon} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Nun ist aber $a\,l$ das Volumen des Stabes $\frac{P}{a}$ die Spannungsintensität nach erfolgter Ausdehnung. Setzt man abkürzend $a\,l = \mathfrak{V}$, $\frac{P}{a} = \mathfrak{S}$, so erhält man auch:

$$W = \frac{1}{2} \mathfrak{B} \frac{\mathfrak{S}^2}{\varepsilon} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Die Ausdehnung eines Stabes erfordert demnach eine Wirkungsgrösse, die dem Volumen des Stabes und ferner noch einem Quotienten proportional ist, den man erhält, wenn man das Quadrat der Spannungsintensität am Ende der Ausdehnung durch den Modulus der Elastizität dividirt. Nimmt man an, das Ausdehnungsgesetz (1) gelte selbst bis zum Riss des Stabes, so ist für den Moment des Risses $\mathfrak{S} = \mathfrak{A}$ gleich der absoluten Festigkeit des Materials, und die Wirkung, welche das Abreissen durch Ausdehnung erfordert, wird:

$$W = \frac{1}{2} \mathfrak{B} \frac{\mathfrak{A}^2}{\varepsilon}$$

Allein $\frac{\mathfrak{A}^2}{\varepsilon}$ hat für jedes Material einen besonderen Werth, den man Seite 36 der Resultate für den Maschinenbau angegeben findet. Nennen wir den Quotienten $\frac{\mathfrak{A}^2}{\varepsilon}$ (Quadrat der absoluten Festigkeit, dividirt durch den Modulus der Elastizität) den Arbeitsmodulus für Ausdehnung, so kann man sagen, die Wirkung, welche das Abreissen eines Stabes erfordert, ist dem Volumen des Stabes und dem Arbeitsmodulus proportional.

Die Werthe von $\frac{\mathfrak{A}^2}{\varepsilon}$ sind für Gusseisen, Eichenholz, Schmiedeeisen, Kanonenmetall, Gussstahl beziehungsweise:

1 bis 1·7, 4·3, 7·4, 10, 40

während sich die absoluten Festigkeiten dieser Materiale verhalten wie:

1 bis 1·3, 0·7, 4, 2 6, 10

Die Verhältnisse der zum Abreissen erforderlichen Wirkungsgrössen sind also sehr verschieden von den Verhältnissen der absoluten Festigkeiten.

Wenn das Abreissen eines Stabes durch die lebendige Kraft einer Masse bewerkstelligt werden soll, muss dieselbe offenbar gleich sein jener Wirkungsgrösse. Diese drückt also auch die Widerstandsleistung gegen die Einwirkung lebendiger Kräfte aus. Man sieht aus obigen Zahlen, wie unvortheilhaft das Gusseisen ist, wenn es sich darum handelt, eine Konstruktion so herzustellen, dass sie der Einwirkung von gewissen lebendigen Kräften widerstehen soll; dass dagegen Eichenholz und Schmiedeeisen, vorzugsweise aber Kanonenmetall und Gussstahl Vorzügliches leisten. Wenn nicht die Materialpreise so hoch wären, würde man gut thun, solche Maschinen, die der Einwirkung von lebendigen Kräften zu widerstehen haben, aus Kanonenmetall oder Gussstahl herzustellen. Indessen schon das Schmiedeeisen ist sieben mal besser als Gusseisen, daher es kommt, dass auch in der Praxis die Anwendung des Gusseisens so sehr eingeschränkt, dagegen die Benutzung des Schmiedeeisens so sehr ausgedehnt wird.

Biegung eines Stabes. Nehmen wir an, ein Stab sei an dem einen Ende befestiget und werde durch eine auf das andere Ende wirkende Kraft gebogen. Die Kraft K, welche auf das freie Ende drücken muss, wenn sich dasselbe um ξ senken soll, beträgt nach Gleichung (7), Seite 31, wenn $p = 0$ gesetzt wird:

$$K = \frac{3 \varepsilon E z}{l^3} \xi \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Die Wirkung W, welche die Kraft entwickeln muss, damit die Senkung bis λ fortschreitet, ist:

$$W = \int_0^\lambda K \, d\xi = \frac{3 \varepsilon E z}{l^3} \int_0^\lambda \xi \, d\xi = \frac{3 \varepsilon E z}{2 l^3} \lambda^2 \quad \ldots \quad (2)$$

Nennt man P die der Senkung λ entsprechende Kraft, so ist wegen (1):

$$P = \frac{3 \varepsilon E z}{l^3} \lambda \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Eliminirt man aus (2) und (3) λ, so findet man:

$$W = \frac{P^2 l^3}{6 \varepsilon E z} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Nennt man $\mathfrak{S}$ die auf einen Quadratcentimeter bezogene Maximalspannung, die an der Befestigungsstelle durch die Einwirkung von P entsteht, so ist:

$$\mathfrak{S} E = P l \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Durch Elimination von P folgt:

$$W = \frac{1}{6} \frac{\mathfrak{S}^2}{\varepsilon} \frac{E l}{z} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$