Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Festigkeit kugelförmiger Gefässe

urn:nbn:de:bsz:31-270970

Druckes von der Grösse (13) zum Bersten gebracht. Gewöhnlich ist der äussere Druck p_1 der Druck der Atmosphäre, ist also im Verhältniss zum Werth der Festigkeitscoeffizienten sehr klein, so dass $2\,p_1$ gegen $\mathfrak{A}$ beinahe vernachlässiget werden kann, man also sagen kann: wenn der Druck der Flüssigkeit im Innern auf einen Quadratcentimeter so gross wird, als die absolute Festigkeit des Materials per ein Quadratcentimeter, so muss der Cylinder bersten, wie gross auch seine Wanddicke sein mag. Es ist für

	Gusseisen	Schmiedeeisen	Kanonenmetall	Stahl
$\mathfrak{A}$	1300	4000	2600	10000

Da der Druck einer Atmosphäre auf 1 Quadratcentimeter nahe 1 Kilogramm beträgt, so sind diese Zahlen die in Atmosphären ausgedrückten inneren Pressungen, welche cylindrische Gefässe aus jenen Metallarten auszuhalten vermögen. In einem gusseisernen Cylinder kann man also Luft nicht bis zu 2000 Atmosphären comprimiren, wohl aber in einem Cylinder aus den übrigen der oben genannten Metalle.

Bei hydraulischen Pressen ist gewöhnlich die Wanddicke des Presscylinders gleich dem Halbmesser des inneren Cylinders, oder $\delta = \frac{D}{2}$. Gusseisen kann man höchstens bis zur Hälfte seiner absoluten Festigkeit in Anspruch nehmen, es darf also $\mathfrak{A}$ höchstens $\frac{1300}{2} = 650$ werden. Der äussere Druck p_1 der Atmosphäre ist sehr nahe $= 1$ Kilogramm. Setzen wir in (12) $\delta = \frac{D}{2}$, $\mathfrak{A} = 650$, $p_1 = 1$, so folgt $p_0 = \frac{1}{2}(\mathfrak{A} + 3\,p_1) = 326$. Die innere Pressung des Wassers darf also bei solchen Construktionsverhältnissen und bei ganz gutem Guss nicht mehr als 326 Atmosphären betragen, damit das Material nicht über die Hälfte seiner Festigkeit in Anspruch genommen wird.

Kugelförmige Gefäße. Es sei auch hier für den natürlichen Zustand r_0 der innere, r_1 der äussere, x irgend ein zwischen r_0 und r_1 liegender Halbmesser der Kugelwand. Im ausgedehnten Zustande des Gefässes seien diese Halbmesser ϱ_0 ϱ_1 ξ. Die in einer Entfernung ξ herrschende Tangentialspannung sei y, die daselbst herrschende radiale Pressung gleich z.

Das Material, welches ursprünglich innerhalb zweier Kugelflächen, deren Halbmesser x und $x + d\,x$ sind, enthalten war, befindet sich nach erfolgter Ausdehnung innerhalb der Kugelflächen, deren Halbmesser ξ und $\xi + d\xi$ sind. Die lineare Zusammenpressung nach radialer Richtung ist demnach $dx - d\xi$, die lineare Ausdehnung einer Kreisperipherielänge $2\pi x$ ist $2\pi(\xi - x)$. Man hat daher auch hier:

$$2\pi(\xi - x) = 2\pi x \frac{y}{\varepsilon}$$

$$dx - d\xi = dx \frac{z}{\varepsilon}$$

woraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x\left(1 + \frac{y}{\varepsilon}\right) \\ d\xi &= dx\left(1 - \frac{z}{\varepsilon}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wobei ε den Modulus der Elastizität bezeichnet.

Nennen wir $d\mathfrak{B}$ die Volumenänderung, welche in dem Materiale eintritt, das zwischen den Kugelflächen enthalten ist, deren Halbmesser x und $x + dx$ sind, so ist

$$d\mathfrak{B} = \frac{4}{3}\pi\left[(\xi + d\xi)^3 - \xi^3\right] - \frac{4}{3}\pi\left[(x + dx)^3 - x^3\right]$$

oder weil $d\xi$ und dx Differenziale sind:

$$d\mathfrak{B} = 4\pi\left(\xi^2 d\xi - x^2 dx\right)$$

setzt man für ξ und $d\xi$ die Werthe (1), so folgt:

$$d\mathfrak{B} = 4\pi x^2 dx\left[\left(1 + \frac{y}{\varepsilon}\right)^2\left(1 - \frac{z}{\varepsilon}\right) - 1\right]$$

Da in allen Anwendungen $\frac{y}{\varepsilon}$ und $\frac{z}{\varepsilon}$ sehr kleine Grössen sind, so kann man die Quadrate und Produkte und höheren Potenzen derselben vernachlässigen, und dann folgt aus disem Ausdruck:

$$\frac{d\mathfrak{B}}{4\pi x^2 dx} = \frac{(2y - z)}{\varepsilon} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Dieser Quotient ist die verhältnissmässige Volumsänderung in der Entfernung x.

Wir machen auch hier die hypothetische Annahme, dass die verhältnissmässige Volumsänderung für jeden Ort der Wanddicke den gleichen Werth habe, dass mithin $\frac{2\,y - z}{\varepsilon}$ eine constante Grösse sei. Nennen wir p_0 die innere, p_1 die äussere Pressung, per Quadratcentimeter, $\mathfrak{A}$ die Spannungsintensität an der inneren Kugelfläche, so ist für $y = \mathfrak{A}$, $z = p_0$, demnach:

$$\frac{2\,y - z}{\varepsilon} = \frac{2\,\mathfrak{A} - p_0}{\varepsilon} = \text{Const}$$

die Gleichung (2) wird demnach:

$$\frac{d\,\mathfrak{B}}{4\,\pi\,x^2\,d\,x} = \frac{2\,\mathfrak{A} - p_0}{\varepsilon}$$

Durch Integration folgt:

$$\mathfrak{B} = \frac{4}{3}\,\pi\,x^3\,\frac{2\,\mathfrak{A} - p_0}{\varepsilon} + \text{Const}$$

Nimmt man das Integrale von $x = r_0$ bis $x = x$, so erhält man $\mathfrak{B} = \frac{4}{3}\,\pi\,\frac{2\,\mathfrak{A} - p_0}{\varepsilon}\,(x^3 - r_0^3)$ und dieses ist die Volumenänderung, welche in dem Raum von $x = r_0$ bis $x = x$ entstanden ist. Dieses $\mathfrak{B}$ ist aber auch:

$$\mathfrak{B} = \frac{4}{3}\,\pi\,(\xi^3 - \varrho_0^3) - \frac{4}{3}\,\pi\,(x^3 - r^3_0)$$

Demnach hat man durch Gleichsetzung dieser beiden Werthe von $\mathfrak{B}$ und Weglassung des gemeinschaftlichen Faktors $\frac{4}{3}\,\pi$:

$$(\xi^3 - \varrho_0^3) - (x^3 - r_0^3) = \frac{2\,\mathfrak{A} - p_0}{\varepsilon}\,(x^3 - r_0^3) \quad . \; . \; . \; (3)$$

Nun ist aber wegen (1):

$$\xi = x\left(1 + \frac{y}{\varepsilon}\right)$$

$$\varrho_0 = r_0\left(1 + \frac{\mathfrak{A}}{\varepsilon}\right)$$

Führt man diese Werthe in (3) ein, entwickelt und vernachlässiget dabei die zweite und höhere Potenz von $\frac{y}{\varepsilon}$ und $\frac{\mathfrak{A}}{\varepsilon}$, so folgt:

$$y = \frac{2\,\mathfrak{A} - p_0}{3} + \frac{\mathfrak{A} + p_0}{3}\,\frac{r_0^3}{x^3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Hiermit ist wiederum die in der Entfernung x eintretende Spannungsintensität bestimmt.

Die Bedingungsgleichung des Gleichgewichtes zwischen den Flüssigkeitspressungen und den Materialspannungen ergibt sich nun wiederum auf folgende Weise: Legen wir durch den Mittelpunkt des Kugelgefässes eine Ebene, welche dasselbe in zwei Hälften theilt, so werden diese durch die innere Pressung mit einer Kraft $r_0^2 \pi p_0$ auseinander, durch die äussere Pressung mit einer Kraft $r_1^2 \pi p_1$ gegeneinander gedrückt; die Differenz ist $\pi (r_0^2 p_0 - r_1^2 p_1)$ und muss gleich sein der Summe aller Materialspannungen, die in dem Schnitt des sphärischen Gefässes mit jener Ebene vorkommen.

Man hat daher:

$$\int_{r_0}^{r_1} 2 \pi x \, d x \, y = \pi (r_0^2 p_0 - r_1^2 p_1)$$

Führt man für y seinen Werth aus (4) ein, verrichtet die Integration und sucht hierauf den Werth von $\frac{r_1}{r_0}$, so findet man:

$$\frac{r_1}{r_0} = \sqrt[3]{\frac{2 (\mathfrak{A} + p_0)}{2 \mathfrak{A} + 3 p_1 - p_0}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Auch für diesen Ausdruck kann ein Annäherungswerth aufgefunden werden.

Es ist genau:

$$\sqrt[3]{\frac{2 (\mathfrak{A} + p_0)}{2 \mathfrak{A} + 2 p_1 - p_0}} = \left(1 + 3 \frac{p_0 - p_1}{2 \mathfrak{A} + 3 p_1 - p_0}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Angenommen, dass der in der Klammer enthaltene Bruch eine sehr kleine Grösse ist, hat man annähernd:

$$\sqrt[3]{\frac{2 (\mathfrak{A} + p_0)}{2 \mathfrak{A} + 3 p_1 - p_0}} = 1 + \frac{p_0 - p_1}{2 \mathfrak{A} + 3 p_1 - p_0}$$

und nun findet man, wenn man die Wanddicke mit δ und den innern Durchmesser mit D bezeichnet, mithin $r_1 - r_0 = \delta \quad 2 r_0 = D$ setzt:

$$\delta = \frac{D}{2} \frac{p_0 - p_1}{2 \mathfrak{A} + 3 p_1 - p_0} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Die Formel (5) bestimmt genau, die Formel (6) annähernd die Wanddicke, die ein sphärisches Gefäss erhalten muss, wenn unter der Einwirkung der äusseren und inneren Kräfte die Materialspannung $\mathfrak{A}$ an der inneren Fläche einen gewissen Werth haben soll. Setzt man für $\mathfrak{A}$ den Werth der absoluten Festigkeit des Materials, so geben die Formeln diejenige Wanddicke, bei der unter der Einwirkung der Pressungen p_0 und p_1 das Zerreissen des Materials eintritt. Diese Wanddicke wird unendlich für $2\mathfrak{A} + 3p_1 - p_0 = 0$, oder für

$$p_0 = 2\mathfrak{A} + 3p_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

d. h. ein sphärisches Gefäss platzt bei jeder Wanddicke, wenn die Spannung im Innern zweimal so gross wird, als die Festigkeit des Materials, vorausgesetzt, dass der äussere Druck p_1 vernachlässiget werden darf. Dieses Ergebniss verglichen mit dem Seite 65 für cylindrische Gefässe gefundenen, so sieht man, dass ein kugelförmiges Gefäss im Maximum einen doppelt so grossen Druck aushält, als ein cylindrisches.

Wir haben uns bei Herleitung der Gleichung für δ so benommen, wie wenn die innere Pressung grösser wäre als die äussere. Die für δ gefundenen Ausdrücke gelten aber auch im umgekehrten Fall, wenn nämlich die äussere Pressung grösser ist als die innere, nur verwandelt sich dann $\mathfrak{A}$ in eine Pressung und ist negativ zu nehmen.

Bei ganz gleicher Wanddicke und gleicher Dichte eines Materials würde bei einem cylindrischen oder sphärischen Gefässe durch einen äusseren Druck nicht leicht eine Zerdrückung entstehen, allein so wie die Wand an einer Stelle schwächer ist, wird sie daselbst leicht durch einen äusseren Druck eingebogen, wodurch eine vollständige Verdrückung entstehen kann. Diese Rundgefässe haben daher gegen einen inneren Druck eine grössere Stabilität als gegen einen äusseren.

Nicht cylindrische oder sphärische Gefäße. Ist die Form einer Gefässwand weder cylindrisch noch sphärisch, so wird eine solche Form unter der Einwirkung von pressenden Flüssigkeiten nicht nur ausgeweitet oder zusammengedrückt, sondern in den meisten Fällen in der Weise deformirt, dass Formen entstehen, die mit den ursprünglichen nicht mehr geometrisch ähnlich sind. Dieses ist z. B. der Fall bei Gefässen mit flachen Wänden. Die Festigkeitstheorie dieser Gefässe erfordert sehr weitläufige und schwierige Rechnun-