Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Festigkeit cylindrischer Gefässe

urn:nbn:de:bsz:31-270970

Für einen cylindrischen Stab von einem Durchmesser d ist: $\mu = \frac{\pi}{32} d^4$, demnach wird:

$$\Theta^0 = 16 \frac{M}{G} l \frac{360}{d^4 \pi^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

Diese Resultate (11), (12), (13) sind nur als hypothetische anzusehen, weil dieselben auf der Annahme (8) beruhen, dass der Winkel α dem Werth von T proportional sei. Zahlreiche Versuche über die Torsion von Stäben haben aber gezeigt, dass diese Resultate wenigstens für nicht zu starke Verwindungen annähernd richtig sind.

Setzt man in (13) $\frac{d^2 \pi}{4} = 1$, $l = 1$, $\Theta^0 = 360$, so folgt aus denselben:

$$G = M,$$

d. h. die Grösse G, welche man den Modulus der Elastizität für Torsion zu nennen pflegt, drückt das Torsionsmoment aus, welches erforderlich wird, um einen Stab, dessen Querschnitt und Länge gleich der Einheit ist, um 360° zu verwinden, vorausgesetzt, dass das durch (13) ausgedrückte Gesetz selbst für eine so starke Verwindung richtig wäre.

Die Resultate des Maschinenbaues geben Seite 36 die für verschiedene Materialien durch Versuche gefundenen Werthe des Modulus der Elastizität G für Torsion.

Festigkeit der Gefäße.

Cylindrische Gefäße. Man denke sich, ein cylindrisches Gefäss Fig. 1, Tafel IV., enthalte eine eingepresste Flüssigkeit, die auf jeden Quadratcentimeter der innern Umfangsfläche einen gewissen sehr starken Druck ausübt. Das Gefäss sei aber auch aussen von einer Flüssigkeit umgeben, die auf jeden Quadratcentimeter der äussern Oberfläche mit einem jedoch schwächeren Druck wirkt. Da wir annehmen, der innere Druck sei beträchtlich stärker als der äussere, so muss in dem Gefäss durch die Wirkung der Kräfte eine Ausweitung entstehen, welche zur Folge hat, dass in jedem kleinen Volumtheilchen im Innern der Gefässwand nach radialer Richtung O r, Fig. 1, Tafel IV., eine Zusammenpressung, nach einer auf die Axe des Gefässes senkrechten Richtung $t t_1$ eine Materialausdehnung entsteht, und es ist für die Bestimmung des Gleichgewichtszustandes vor allem andern nothwendig, diese Spannungen und Pressungen zu bestimmen.

Es sei für den natürlichen Zustand des Gefässes, wenn nämlich keine Kräfte wirken, r_0 der innere, r_1 der äussere Halbmesser des Cylinders, x der Halbmesser eines Kreises, der zwischen dem innern und äussern Begrenzungskreis des Cylinders liegt. Nennen wir ferner p_0 die innere, p_1 die äussere Pressung auf einen Quadratcentimeter. Durch die Einwirkung dieser Pressungen wird der Cylinder ausgeweitet bis ein Gleichgewichtszustand zwischen diesen Pressungen und den Molekularkräften eintritt, was zur Folge hat, dass die Halbmesser r_0 r_1 x in ϱ_0 ϱ_1 ξ übergehen. Nennen wir nun für dieses erzwungene Gleichgewicht y die auf einen Quadratcentimeter bezogene Spannung, welche in der Entfernung ξ nach tangentialer Richtung stattfindet, z die auf einen Quadratcentimeter bezogene nach radialer Richtung in der Entfernung ξ stattfindende Pressung, und erlauben uns die Annahme, dass jede der Kräfte y und z so wirke, wie wenn die andern nicht vorhanden wären, so können wir diese Ausdehnungen und Pressungen nach unserem Erfahrungsgesetze Seite 3 berechnen. Das Material, welches ursprünglich zwischen den Cylindern, deren Halbmesser x und $x + dx$ eingeschlossen war, befindet sich nach erfolgter Ausweitung zwischen zwei Cylindern, deren Halbmesser ξ und $\xi + d\xi$ sind. Es ist demnach

$$2\pi\xi - 2\pi x = 2\pi(\xi - x)$$

die Ausdehnung, $dx - d\xi$ die Zusammendrückung dieses Materials.

Nennen wir ε den Modulus der Elastizität des Materials, so können wir nach dem oben erwähnten Erfahrungsgesetz schreiben:

$$\left.\begin{aligned} 2\pi(\xi - x) &= 2\pi x \frac{y}{\varepsilon} \\ dx - d\xi &= dx \frac{z}{\varepsilon} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Hieraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x\left(1 + \frac{y}{\varepsilon}\right) \\ d\xi &= dx\left(1 - \frac{z}{\varepsilon}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Nennt man df die Aenderung, welche in der Fläche

$$(x + dx)^2 \pi - x^2 \pi$$

durch die Wirkung der Pressungen eintritt, so ist:

$$d f = \left[(\xi + d \xi)^2 \pi - \xi^2 \pi \right] - \left[(x + d x)^2 \pi - x^2 \pi \right]$$

oder weil $d x$ und $d \xi$ Differenziale sind:

$$d f = 2 \pi (\xi d \xi - x d x) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Führt man für ξ und $d \xi$ die obigen Werthe (2) ein, so findet man:

$$\frac{d f}{2 \pi x d x} = \frac{1}{\varepsilon} (y - z) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Das Verhältniss linker Hand des Gleichheitszeichens ist die auf einen Quadratcentimeter bezogene Flächenänderung, welche in der Entfernung x eintritt, oder es ist die verhältnissmässige Flächenausdehnung.

Lamé hat in seinem Werke Théorie de l'élasticité nachgewiesen, dass diese verhältnissmässige Ausdehnung in jedem Punkt der Cylinderwand einen und denselben constanten Werth hat. Den analytischen Weg, durch welchen dieser Satz gewonnen wurde, können wir hier nicht betreten, müsssen uns also begnügen, denselben, ohne ihn selbst zu beweisen, als eine Wahrheit anzunehmen. Unter der Voraussetzung, dass $\frac{1}{\varepsilon} (y - z)$ eine Constante ist, können wir ihren Werth leicht finden, denn es ist für $x = r_0$ $z = p_0$ und wird y gleich einem bestimmten Werth $\mathfrak{A}$, nämlich gleich der Tangentialspannung am innern Umfang des Cylinders. Jenc Constante kann daher ausgedrückt werden durch $\frac{1}{\varepsilon} (\mathfrak{A} - p_0)$. Weil also

$$\frac{1}{\varepsilon} (y - z) = \frac{1}{\varepsilon} (\mathfrak{A} - p_0)$$

ist, so erhält man statt (4):

$$\frac{d f}{2 \pi x d x} = \frac{1}{\varepsilon} (\mathfrak{A} - p_0)$$

Durch Integration folgt hieraus:

$$f = \frac{1}{\varepsilon} (\mathfrak{A} - p_0) 2 \pi \frac{x^2}{2} + \text{Const}$$

oder wenn man dieses Integrale innerhalb der Grenze $x = r_0$ bis $x = x$ nimmt:

$$f = \frac{\pi}{\varepsilon} (\mathfrak{A} - p_0) \quad (x^2 - r_0^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad (5)$$

Dieses f ist aber die Ausdehnung, die in dem Material von r_0 bis x eintritt. Es ist demnach auch:

$$f = (\xi^2 - \varrho_0^2)\, \pi - (x^2 - r_0^2)\, \pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Man hat daher vermöge (5) und (6):

$$(\xi^2 - \varrho_0^2) - (x^2 - r_0^2) = \frac{1}{\varepsilon} (\mathfrak{A} - p_0)(x^2 - r_0^2) \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Setzt man in die erste der Gleichungen (2) $x = r_0 \quad y = \mathfrak{A} \quad \xi = \varrho_0$, so muss dieselbe erfüllt werden; man hat daher $\varrho_0 = r_0 \left(1 + \frac{\mathfrak{A}}{\varepsilon}\right)$

Führt man diesen Werth von ϱ_0, so wie den Werth von ξ den die erste der Gleichungen (2) darbietet in (7) ein, so gibt dieselbe nach einigen einfachen Reduktionen und wenn man die zweiten Potenzen von $\frac{y}{\varepsilon}$ und $\frac{\mathfrak{A}}{\varepsilon}$ vernachlässiget

$$y = \frac{\mathfrak{A} - p_0}{2} + \frac{\mathfrak{A} + p_0}{2} \frac{r_0^2}{x^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Führt man diesen Werth von y in die Gleichung $\frac{1}{\varepsilon}(y - z) = \frac{1}{\varepsilon}(\mathfrak{A} - p_0)$ ein, so findet man auch noch

$$z = \frac{\mathfrak{A} + p_0}{2} \frac{x_0^2}{x^2} - \frac{1}{2} (\mathfrak{A} - p_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Somit ist nun die Tangentialspannung y, als auch die radiale Presung z in der Entfernung x bestimmt.

Nun ist $2 \int_{r_0}^{r_1} y \, d\, x$ die Summe aller Spannungen in zwei diametral gegenüberstehenden Wanddicken; sind ferner $2\, r_0\, p_0$ und $2\, r_1\, p_1$ die inneren und äusseren Pressungen der Flüssigkeit, wodurch jene Materialspannungen hervorgerufen werden; man hat daher:

$$2 \int_{r_0}^{r_1} y \, d\, x = 2\, (r_0\, p_0 - r_1\, p_1)$$

Setzt man für y seinen Werth aus (7) und verrichtet die Integration, so ergibt sich ein Ausdruck, aus welchem durch ganz gewöhnliche Reduktionen gefunden wird:

$$\frac{r_1}{r_0} = \sqrt{\frac{\mathfrak{A} + p_0}{\mathfrak{A} + 2\,p_1 - p_0}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Bezeichnet man durch D den inneren Durchmesser des Cylinders und durch δ die Wanddicke, setzt also $r_1 - r_0 = \delta$. $2\,r_0 = D$, so folgt aus (10):

$$\delta = \frac{D}{2}\left(\sqrt{\frac{\mathfrak{A} + p_0}{\mathfrak{A} + 2\,p_1 - p_0}} - 1\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

In der Regel sind p_0 und p_1 sehr klein gegen $\mathfrak{A}$ und dann kann man auch statt (11) einen Annäherungswerth aufstellen. Es ist nämlich ganz genau:

$$\sqrt{\frac{\mathfrak{A} + p_0}{\mathfrak{A} + 2\,p_1 - p_0}} - 1 = \left(1 + 2\,\frac{p_0 - p_1}{\mathfrak{A} + 2\,p_1 - p_0}\right)^{\frac{1}{2}} - 1$$

ist dagegen annähernd:

$$\sqrt{\frac{\mathfrak{A} + p_0}{\mathfrak{A} + 2\,p_1 - p_0}} - 1 = \frac{p_0 - p_1}{\mathfrak{A} + 2\,p_1 - p_0}$$

demnach ist annähernd:

$$\delta = \frac{D}{2}\,\frac{p_0 - p_1}{\mathfrak{A} + 2\,p_1 - p_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Die Formel (10) hat zuerst Lamé aufgefunden, ohne von irgend einer Hypothese auszugehen.

Setzt man in (11) oder in (12) für $\mathfrak{A}$ die absolute Festigkeit des Materials, aus welchem der Cylinder besteht, so geben diese Gleichungen diejenige Wanddicke, bei welcher der Cylinder unter der Einwirkung der Kräfte p_0 und p_1 berstet. Nimmt man diese Pressungen p_0 und p_1 so an, dass $\mathfrak{A} + 2\,p_1 - p_0 = o$ wird, nimmt also

$$p_0 = \mathfrak{A} + 2\,p_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

so wird δ unendlich, d. h. ein Cylinder, wie dick auch seine Wand genommen werden mag, wird unter der Einwirkung eines inneren

Druckes von der Grösse (13) zum Bersten gebracht. Gewöhnlich ist der äussere Druck p_1 der Druck der Atmosphäre, ist also im Verhältniss zum Werth der Festigkeitscoeffizienten sehr klein, so dass $2\,p_1$ gegen $\mathfrak{A}$ beinahe vernachlässiget werden kann, man also sagen kann: wenn der Druck der Flüssigkeit im Innern auf einen Quadratcentimeter so gross wird, als die absolute Festigkeit des Materials per ein Quadratcentimeter, so muss der Cylinder bersten, wie gross auch seine Wanddicke sein mag. Es ist für

	Gusseisen	Schmiedeeisen	Kanonenmetall	Stahl
$\mathfrak{A}$	1300	4000	2600	10000

Da der Druck einer Atmosphäre auf 1 Quadratcentimeter nahe 1 Kilogramm beträgt, so sind diese Zahlen die in Atmosphären ausgedrückten inneren Pressungen, welche cylindrische Gefässe aus jenen Metallarten auszuhalten vermögen. In einem gusseisernen Cylinder kann man also Luft nicht bis zu 2000 Atmosphären comprimiren, wohl aber in einem Cylinder aus den übrigen der oben genannten Metalle.

Bei hydraulischen Pressen ist gewöhnlich die Wanddicke des Presscylinders gleich dem Halbmesser des inneren Cylinders, oder $\delta = \frac{D}{2}$. Gusseisen kann man höchstens bis zur Hälfte seiner absoluten Festigkeit in Anspruch nehmen, es darf also $\mathfrak{A}$ höchstens $\frac{1300}{2} = 650$ werden. Der äussere Druck p_1 der Atmosphäre ist sehr nahe $=$ 1 Kilogramm. Setzen wir in (12) $\delta = \frac{D}{2}$, $\mathfrak{A} = 650$, $p_1 = 1$, so folgt $p_0 = \frac{1}{2}(\mathfrak{A} + 3\,p_1) = 326$. Die innere Pressung des Wassers darf also bei solchen Construktionsverhältnissen und bei ganz gutem Guss nicht mehr als 326 Atmosphären betragen, damit das Material nicht über die Hälfte seiner Festigkeit in Anspruch genommen wird.

Kugelförmige Gefäße. Es sei auch hier für den natürlichen Zustand r_0 der innere, r_1 der äussere, x irgend ein zwischen r_0 und r_1 liegender Halbmesser der Kugelwand. Im ausgedehnten Zustande des Gefässes seien diese Halbmesser ϱ_0 ϱ_1 ξ. Die in einer Entfernung ξ herrschende Tangentialspannung sei y, die daselbst herrschende radiale Pressung gleich z.

Das Material, welches ursprünglich innerhalb zweier Kugelflächen, deren Halbmesser x und $x + d\,x$ sind, enthalten war, befindet sich