Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Torsionsfestigkeit

urn:nbn:de:bsz:31-270970

$$\int \xi \, df = o \quad \int v \, df = o \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Diese Gleichungen drücken aber aus, dass der Punkt A, um welchen die Drehung erfolgt, mit dem Schwerpunkt des Querschnittes zusammenfällt; denn nennt man X und Y die Coordinaten des Schwerpunktes des Querschnittes in Bezug auf das Axensystem $A\xi$ und Av, so hat man nach den bekannten Regeln, die zur Bestimmung des Schwerpunktes einer Fläche dienen

$$X = \frac{\int \xi \, df}{\int df} \qquad Y = \frac{\int v \, df}{\int df}, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

wenn also $\int \xi \, df = o$ und $\int v \, df = o$ ist, so hat man $X = o$ $Y = o$, d. h. der Schwerpunkt fällt in den Anfangspunkt der Coordinaten, was zu beweisen war.

Berechnung der Torsionsfestigkeit. Es sei in Fig. 9, Tafel III., df ein kleines Flächentheilchen des Querschnittes, $An = x$ die Entfernung desselben von der Axe; T die Intensität der Verschiebungskraft in dem von der Axe entferntesten Punkte m des Querschnittes; k die Entfernung dieser Stelle von der Axe, so ist die Intensität der Verschiebungskraft im Punkt n gleich $T\frac{x}{k}$; ist ferner die Verschiebungskraft für den Querschnitt df gleich $T\frac{x}{k}\,df$, ist sodann das Moment dieser Kraft $\frac{T}{k}\,x^2\,df$ und ist endlich die Summe der Momente aller im Querschnitt vorkommenden Verschiebungskräfte $\int \frac{T}{k}\,x^2\,df = \frac{T}{k}\int x^2\,df$. Da das äussere Kräftepaar, welches das Verwinden des Stabes bewirkt, mit den in jedem Querschnitt vorkommenden Verschiebungskräften im Gleichgewicht ist, so hat man, wenn das Moment der äusseren Kräfte mit M bezeichnet wird:

$$M = \frac{T}{k}\int x^2\,df \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Es ist $\int x^2\,df$ das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende, auf der Ebene des Querschnittes senkrechte Axe. Bezeichnet man dieses Moment mit μ, setzt also

$$\int x^2\,df = \mu \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

so wird der Ausdruck (1):

$$M = \frac{T}{k} \mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Da wir in diesem Abschnitt über die Elastizität und Festigkeit alle Längen in Centimetern und die Kräfte in Kilogrammen ausdrücken, so ist T die auf einen Quadratcentimeter bezogene Verschiebungskraft in der von der Axe entferntesten Faser, und ist ferner M das in Kilogrammen und Centimetern ausgedrückte Torsionsmoment der äusseren den Stab verwindenden Kraft.

Wenden wir obige Gleichung auf einige spezielle Fälle an.

Für einen cylindrischen Stab von einem Durchmesser d ist das Trägheitsmoment:

$$\mu = \int_0^{\frac{d}{2}} x^2 \; 2 \, x \, \pi \, d x = \frac{\pi}{32} d^4 \text{ und } k = \frac{d}{2}$$

demnach

$$M = \frac{T \pi}{16} d^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Für einen quadratischen Stab hat man, wenn b die Seite des Quadrates bezeichnet:

$$\mu = \frac{1}{6} b^4 \text{ und } k = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

demnach wird:

$$M = T \frac{b^3}{3\sqrt{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Für einen Stab, dessen Querschnitt ein Rechteck ist, findet man, wenn die Seiten des Rechteckes mit b und h bezeichnet werden:

$$\mu = \frac{1}{12} b h \left(b^2 + h^2\right)$$

$$k = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + h^2}$$

demnach:

$$M = \frac{T}{6} b h \sqrt{b^2 + h^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Diese Theorie der Torsion ist so unvollkommen, dass man den Ergebnissen derselben nicht unbedingtes Vertrauen schenken kann; es ist daher angemessen, dieselbe durch Versuche zu prüfen. Derlei Versuche sind schon viele gemacht worden, und sie haben in der

That die Richtigkeit der Resultate so weit bestätiget, als dieses durch Versuche möglich ist.

Nimmt man an, dass die Resultate nicht nur für schwache Verwindungen, sondern auch noch für die allerstärksten, also selbst für diejenigen Verwindungen gelten, bei welchen der Molekularzusammenhang aufgelöst wird, so kann die Gleichung (3) zur Bestimmung desjenigen Werthes von T benutzt werden, welcher der Torsionsfestigkeit entspricht. Wenn man nämlich durch einen wirklichen Verwindungsversuch das Torsionsmoment M bestimmt, welches die Auflösung des Zusammenhanges bewirkt, sodann diesen Werth, sowie auch die Werthe von μ und k in die Gleichung (3) einführt und daraus T sucht, so ist dies der Festigkeitscoeffizient für Torsion und für das Material, aus welchem der Stab besteht. Ist die Gleichung (3) in dieser Ausdehnung richtig, so muss man bei einerlei Material für T immer den gleichen Werth finden, welches auch die Dimensionen des Stabes sind. Dies haben auch annähernd die Versuche gezeigt und die mit T überschriebene Columne der Tafel Seite 36 der Resultate für den Maschinenbau enthält den Torsionsfestigkeits-Coeffizienten für verschiedene Materialien.

Da in der Gleichung (3) die Länge des Stabes nicht erscheint, so ist die Intensität der Verschiebungskraft und ist auch die Torsionsfestigkeit von der Länge des Stabes nicht abhängig. Aus Gleichung (4) sieht man, dass für einen cylindrischen Stab das einer bestimmten Torsionsintensität entsprechende Torsionsmoment dem Kubus des Durchmessers des Cylinders proportional ist. Will man den Durchmesser berechnen, den ein cylindrischer Stab erhalten muss, damit er einem gegebenen Torsionsmoment mit Sicherheit zu widerstehen vermag, so darf man in der Gleichung (4) für T nur einen aliquoten Theil des Torsionscoeffizienten in Rechnung bringen und findet dann:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16\,M}{T\,\pi}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Wir werden in der Folge erfahren, dass die Maschinenaxen so construirt werden, dass unter der Einwirkung der Kraft die Verschiebungsintensität bei Schmiedeeisen nur 210, bei Gusseisen nur 90 beträgt. Da nun die Torsionscoeffizienten für diese Materiale nach Tafel 36 der Resultate des Maschinenbaues für Schmiedeeisen 7000 für Gusseisen 3000 betragen, so sind diese Wellen nur bis auf $\frac{210}{7000} = \frac{1}{33}$ und $\frac{90}{3000} = \frac{1}{33}$ ihrer Torsionsfestigkeit angestrengt.