Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Drehung um die Schwerpunktfaser

urn:nbn:de:bsz:31-270970

so wird man erkennen, dass der Vorgang eine Gegeneinanderverschiebung ist, die an der Axe beginnt und von da an mit der Entfernung fort und fort wächst. Diese den Verschiebungen entsprechenden Kräfte liegen in der Querschnittsebene, stehen senkrecht auf den Radien und es ist naturgemäss anzunehmen, dass ihre Intensitäten der Grösse der Verschiebungen proportional sind.

Beweis des Satzes, daß die Schwerpunktfaser eines Stabes bei einer Drehung desselben gerade bleibt. Es sei Fig. 9, Tafel III., A der seiner Lage nach noch nicht bekannte Punkt, um welchen die Drehung eines Querschnittes erfolgt. m der von A entfernteste Punkt der Peripherie des Querschnittes. T die Intensität der Verschiebungskraft bei m. t die Intensität der Verschiebungskraft an einem Punkt n, dessen Entfernung von A gleich x ist. So hat man, wenn $\overline{Am} = k$ gesetzt wird:

$$t = \frac{T}{k} x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Nimmt man bei n ein unendlich kleines Flächentheilchen df an, so ist $t\,df$ die auf An senkrecht wirkende Verschiebungskraft dieses Flächentheilchens. Zerlegt man diese Kraft in eine horizontale und in eine vertikale, so ist erstere $t\,df \sin\varphi$, letztere $t\,df \cos\varphi$. Nennt man $\overline{Ap} = \xi$ $\overline{mp} = v$ die Coordinaten des Punktes n in Bezug auf das Axensystem $A\,\xi$ und $A\,v$, so ist $\cos\varphi = \frac{\xi}{x}$ $\sin\varphi = \frac{v}{x}$, demnach wird:

$$t\,df \sin\varphi = t\,df \frac{v}{x}, \quad t\,df \cos\varphi = t\,df \frac{\xi}{x}$$

oder wenn man für t seinen Werth aus (1) einführt:

$$t\,df \sin\varphi = \frac{T}{k} v\,df \quad t\,df \cos\varphi = \frac{T}{k} \xi\,df$$

Es sind demnach die Summen aller Horizontalkräfte und aller Vertikalkräfte sämmtlicher Verschiebungskräfte eines Querschnittes:

$$\frac{T}{k}\int v\,df \quad \frac{T}{k}\int \xi\,df$$

Allein für den Gleichgewichtszustand müssen diese Summen verschwinden, weil der Voraussetzung gemäss nur eine Torsion stattfindet. Man hat daher, weil $\frac{T}{k}$ nicht verschwindet:

$$\int \xi \, df = o \quad \int v \, df = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Diese Gleichungen drücken aber aus, dass der Punkt A, um welchen die Drehung erfolgt, mit dem Schwerpunkt des Querschnittes zusammenfällt; denn nennt man X und Y die Coordinaten des Schwerpunktes des Querschnittes in Bezug auf das Axensystem $A \xi$ und $A v$, so hat man nach den bekannten Regeln, die zur Bestimmung des Schwerpunktes einer Fläche dienen

$$X = \frac{\int \xi \, df}{\int df} \qquad Y = \frac{\int v \, df}{\int df}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

wenn also $\int \xi \, df = o$ und $\int v \, df = o$ ist, so hat man $X = o$ $Y = o$, d. h. der Schwerpunkt fällt in den Anfangspunkt der Coordinaten, was zu beweisen war.

Berechnung der Torsionsfestigkeit. Es sei in Fig. 9, Tafel III., df ein kleines Flächentheilchen des Querschnittes, $A n = x$ die Entfernung desselben von der Axe; T die Intensität der Verschiebungskraft in dem von der Axe entferntesten Punkte m des Querschnittes; k die Entfernung dieser Stelle von der Axe, so ist die Intensität der Verschiebungskraft im Punkt n gleich $T \frac{x}{k}$; ist ferner die Verschiebungskraft für den Querschnitt df gleich $T \frac{x}{k} \, df$, ist sodann das Moment dieser Kraft $\frac{T}{k} x^2 \, df$ und ist endlich die Summe der Momente aller im Querschnitt vorkommenden Verschiebungskräfte $\int \frac{T}{k} x^2 \, df = \frac{T}{k} \int x^2 \, df$. Da das äussere Kräftepaar, welches das Verwinden des Stabes bewirkt, mit den in jedem Querschnitt vorkommenden Verschiebungskräften im Gleichgewicht ist, so hat man, wenn das Moment der äusseren Kräfte mit M bezeichnet wird:

$$M = \frac{T}{k} \int x^2 \, df \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Es ist $\int x^2 \, df$ das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende, auf der Ebene des Querschnittes senkrechte Axe. Bezeichnet man dieses Moment mit μ, setzt also

$$\int x^2 \, df = \mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$