Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Verwindung oder Torsion eines Stabes

urn:nbn:de:bsz:31-270970

1) Ein im natürlichen Zustande gerader Stab, Fig. 1, Tafel III., sei einerseits eingespannt, andererseits mit P belastet. Es tritt eine Biegung ein, und man soll die Wirkung berechnen, welche dieser Biegung entspricht. Nennen wir $O\,n = x$ $m\,n = y$ die Coordinaten eines Punktes m der Axenlinie, so ist $P\,x = M$ das Biegungsmoment für den Punkt m. Ist die Biegung sehr schwach, so dürfen wir K vernachlässigen, weil in diesem Fall die Axenfaser keine merkliche Ausdehnung erleidet. Setzen wir in (7) $M = P\,x$, $K = o$, $\mu = E\,z$, und erlauben uns wegen der vorausgesetzten schwachen Biegung $d\,s_0 = d\,x$ zu setzen, so erhalten wir:

$$W = \frac{1}{2\,\varepsilon}\int_0^l \frac{P^2\,x^2}{E\,z}\,d\,x = \frac{P^2}{6\,\varepsilon\,E\,z}\,l^3 \quad \ldots\ldots (9)$$

Heissen wir $\mathfrak{S}_m$ die Maximalspannung, welche bei a eintritt, so ist $\mathfrak{S}_m\,E = P\,l$. Führt man den aus dieser Gleichung folgenden Werth von P in (9) ein, so folgt auch:

$$W = \frac{1}{6}\,\frac{\mathfrak{S}_m^2}{\varepsilon}\,\frac{E\,l}{z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

2) Ein ursprünglich gerader Stab von einer Länge l werde um einen Cylinder vom Halbmesser R herumgewickelt. Die Wirkungsgrösse, welche diesem Vorgang entspricht, soll berechnet werden.

Da in diesem Fall die Axenfaser nicht gedehnt wird, so ist zunächst $K = o$ zu setzen. Da ferner der Stab ursprünglich gerade war, so ist $\frac{1}{\varrho_0} = o$ und weil der Stab kreisförmig gebogen wird, so ist $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R}$ eine Constante. Wir erhalten daher vermöge (8):

$$W = \frac{1}{2\,\varepsilon}\int \frac{\varepsilon^2\,\mu}{R^2}\,d\,s_0 = \frac{\varepsilon\,\mu\,l}{2\,R^2}$$

Verwindung oder Torsion eines Stabes.

Erklärungen. Denken wir uns, ein stabförmiger Körper werde am einen Ende festgehalten und am anderen durch ein drehend wirkendes Kräftepaar angegriffen, so entsteht in dem ganzen Stabe eine Verwindung, bis die inneren Kräfte mit dem Kräftepaar ins Gleichgewicht gekommen sind.

Nennen wir auch hier wiederum eine Reihenfolge von Atomen, die in einer zur Richtung des Stabes parallelen geraden Linie liegen, eine Faser, so können wir uns denken, der Stab bestehe in seinem natürlichen Zustande aus einem Bündel von geradlinigen, neben einander liegenden und unter einander verbundenen Fasern, dagegen in verwundenem Zustande aus einem Bündel von um einander gewundenen aber unter einander verbundenen Fasern.

Der Gleichgewichtszustand des Stabes wäre vollkommen bekannt, wenn man im Stande wäre anzugeben: 1) die Gestalt jeder einzelnen Faser; 2) die Kräfte, welche jedes Faserstückchen in seiner Gleichgewichtslage erhalten. Allein diese genaue Ermittelung des Gleichgewichtes ist mit so vielen Schwierigkeiten verbunden, dass wir uns mit einer Annäherung begnügen müssen, und diese erhalten wir dadurch, dass wir über den Zustand der verwundenen Fasern folgende naturgemäss scheinende Annahmen machen.

Wir nehmen an: 1) die Atome, welche ursprünglich in einem und demselben Querschnitt lagen, ändern ihre relative Gegeneinanderlagerung während der Verwindung nicht; 2) jede Faser erhält durch die Verwindung die Gestalt einer Schraubenlinie. Nehmen wir überdies an, der Querschnitt des Stabes sei so beschaffen, dass er durch zwei auf einander senkrecht stehende, durch den Schwerpunkt gehende Linien in vier congruente Theile getheilt wird, so folgt aus obigen Annahmen, dass die Axen- oder Schwerpunktfaser durch das Verwinden des Stabes keine Krümmung erhält und dass die übrigen Fasern Schraubenlinien bilden, deren Steilheit mit ihrer Entfernung von der Axe fort und fort wächst.

Daraus folgt aber ferner, dass die Länge der Fasern mit ihrer Entfernung von der Axenfaser wächst; allein da die äusseren Kräfte der Voraussetzung gemäss nur drehend wirken, so können die verwundenen Fasern weder alle ausgedehnt, noch alle zusammengedrückt sein, sondern es muss ein Theil derselben ausgedehnt, ein anderer Theil zusammengedrückt sein, und da die Axenfaser am kürzesten, die peripherischen Fasern am längsten sind, so muss in der Axenfaser selbst und von ihr an bis auf eine gewisse Entfernung Zusammendrückung, von da an bis zur Oberfläche hinaus dagegen Ausdehnung herrschen, und somit gibt es eine cylindrische Schicht, in welcher weder Ausdehnung noch Zusammendrückung stattfindet. Diese Schicht zu bestimmen, ist für einen cylindrischen Stab nicht schwierig, wir wollen jedoch ihre Bestimmung unterlassen, weil ihre Kenntniss für praktische Zwecke von keiner Wichtigkeit ist.

Denkt man sich durch den Stab, senkrecht auf seine Axe eine Ebene gelegt, und richtet seine Aufmerksamkeit auf die Art und Weise, wie die diesseits und jenseits dieser Ebene liegenden Atome während der Verwindung des Stabes ihre Lage gegeneinander verändern, so wird man erkennen, dass der Vorgang eine Gegeneinanderverschiebung ist, die an der Axe beginnt und von da an mit der Entfernung fort und fort wächst. Diese den Verschiebungen entsprechenden Kräfte liegen in der Querschnittsebene, stehen senkrecht auf den Radien und es ist naturgemäss anzunehmen, dass ihre Intensitäten der Grösse der Verschiebungen proportional sind.

Beweis des Satzes, daß die Schwerpunktfaser eines Stabes bei einer Drehung desselben gerade bleibt. Es sei Fig. 9, Tafel III., A der seiner Lage nach noch nicht bekannte Punkt, um welchen die Drehung eines Querschnittes erfolgt. m der von A entfernteste Punkt der Peripherie des Querschnittes. T die Intensität der Verschiebungskraft bei m. t die Intensität der Verschiebungskraft an einem Punkt n, dessen Entfernung von A gleich x ist. So hat man, wenn $\overline{Am} = k$ gesetzt wird:

$$t = \frac{T}{k} x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Nimmt man bei n ein unendlich kleines Flächentheilchen df an, so ist $t\,df$ die auf An senkrecht wirkende Verschiebungskraft dieses Flächentheilchens. Zerlegt man diese Kraft in eine horizontale und in eine vertikale, so ist erstere $t\,df \sin\varphi$, letztere $t\,df\cos\varphi$. Nennt man $\overline{Ap} = \xi$ $\overline{mp} = v$ die Coordinaten des Punktes n in Bezug auf das Axensystem $A\,\xi$ und $A\,v$, so ist $\cos\varphi = \frac{\xi}{x}$ $\sin\varphi = \frac{v}{x}$, demnach wird:

$$t\,df\sin\varphi = t\,df\frac{v}{x}, \quad t\,df\cos\varphi = t\,df\frac{\xi}{x}$$

oder wenn man für t seinen Werth aus (1) einführt:

$$t\,df\sin\varphi = \frac{T}{k} v\,df \quad t\,df\cos\varphi = \frac{T}{k}\xi\,df$$

Es sind demnach die Summen aller Horizontalkräfte und aller Vertikalkräfte sämmtlicher Verschiebungskräfte eines Querschnittes:

$$\frac{T}{k}\int v\,df \quad \frac{T}{k}\int \xi\,df$$

Allein für den Gleichgewichtszustand müssen diese Summen verschwinden, weil der Vorausetzung gemäss nur eine Torsion stattfindet. Man hat daher, weil $\frac{T}{k}$ nicht verschwindet: