# Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Biegung eines im natürlichen Zustande krummen Stabes

urn:nbn:de:bsz:31-270970

5) Die Intensität $p$ der Pressung in irgend einem Punkte des gebogenen Stabes ist vermöge (6):

$$p = \frac{P \cos \varphi}{\Omega} - \frac{P}{E z} y \zeta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

6) Die Entfernung $v$ der Neutralfaser von der Schwerpunktfaser ist vermöge (7)

$$v = \frac{E z \cos \varphi}{\Omega y} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (22)$$

7) Zur Bestimmung des Winkels $\varphi$ hat man die Gleichung:

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{d y}{d x} = \mathfrak{M} k \cos k x$$

Vermittelst der Gleichung (22) kann die Gestalt der Neutralfaser bestimmt werden, wenn vorerst die Axenfaser vermittelst (20) ermittelt ist.

## Biegung eines im natürlichen Zustande krummen Stabes.

Wir wollen uns die Aufgabe vorlegen, den Gleichgewichtszustand zu bestimmen, der in einem ursprünglich krummen Stab eintritt, wenn auf denselben äussere Kräfte einwirken; beschränken uns jedoch auf den Fall, dass die Axenlinie des Stabes im ursprünglichen Zustande eine ebene Kurve ist, und dass die Angriffspunkte und die Richtungen aller äusseren Kräfte in der Ebene der Axenkurve liegen. Wir können uns zu diesen Untersuchungen der Figuren 7 und 8, Tafel I., bedienen, wenn wir uns so benehmen, wie wenn die Axenlinie $l_1\, n_1\, m_1\, k_1$ krumm gezeichnet, und $e_1\, g_1$ $f_1\, h_1$ die zu den Punkten $m_1$ und $n_1$ gehörigen Normalen wären.

Nennen wir für den natürlichen Zustand des Stabes, Fig. 7, Tafel I.:

$ds_0$ die Länge des Bogenelements $m_1\, n_1$.

$\varrho_0$ den Krümmungshalbmesser des Bogenelements $m_1\, n_1$.

$d\,\Theta_0$ den unendlich kleinen Winkel, unter welchem sich die Normalen $e_1\, g_1$ $f_1\, h_1$ im Krümmungsmittelpunkt schneiden.

$n_1\, v_1 = \zeta$ die Entfernung irgend eines Faserstückchens $u_1\, v_1$ von der Schwerpunktfaser.

$n_1\, f_1 = z$, $n_1\, h_1 = z_1$ die Entfernungen der obersten und der untersten Faser von der Schwerpunktfaser.

Nennen wir ferner für den durch die äusseren Kräfte deformirten Stab, Fig. 8, Tafel I.:

$\varrho$ den Krümmungshalbmesser des Bogenelements $m\,n$.

$d\,\Theta$ den unendlich kleinen Winkel $m\,O\,n$, den die Richtungen der zu $m$ und $n$ gezogenen Normalen einschliessen.

$\Omega$ den Querschnitt des Stabes.

$$\left.\begin{array}{l} \overline{n\,v} = \zeta \\ \overline{n\,f} = z \\ \overline{n\,h} = z_1 \end{array}\right\} \text{ wie im natürlichen Zustand des Stabes.}$$

$S$ die im Faserelement $m\,n$ herrschende Spannungsintensität.

Für den Fall, dass $m\,n$ nicht ausgedehnt, sondern zusammengedrückt ist, ist $S$ eine Pressung und daher negativ in Rechnung zu bringen.

$\overline{n\,q} = \nu$ die Entfernung der Neutralfaser von der Schwerpunktfaser.

$\sigma$ die im Faserelement $u\,v$ herrschende Spannungsintensität.

$x\,y$ die Coordinaten eines Punktes $n$ der Schwerpunktfaser in Bezug auf ein durch einen beliebigen Punkt $k$ gelegtes rechtwinkeliges Coordinatensystem.

$\varphi$ den Winkel, den die zum Punkt $n$ gezogene Berührungslinie mit der x-Axe bildet. Dann ist genau $\operatorname{tang} \varphi = \frac{d\,y}{d\,x}$

$\varepsilon$ den Modulus der Elastizität des Materials, aus welchem der Stab besteht.

$M$ die Summe der statischen Momente aller äusseren auf das Stabstück $n\,k$ in dem Sinne einwirkenden Kräfte, dass dieselben eine Biegung hervorrufen, wodurch eine Zunahme der Krümmung entsteht, oder $\varrho$ kleiner als $\varrho_0$ wird. Diese Momente sind zu nehmen in Bezug auf eine durch $n$ gehende, auf der Ebene der Axenlinie senkrechte Drehungsaxe.

$K$ die algebraische Summe aller äusseren auf das Stabstück $n\,k$ einwirkenden Kräfte, deren Richtungen parallel sind zu der zum Punkt $n$ der Axenlinie gehörenden Tangente. Diese Kräfte sind also die zur Tangente an $n$ parallelen Componenten, welche durch Zerlegung der wirklich einwirkenden äusseren Kräfte erhalten werden, und sie sind positiv oder negativ in Rechnung zu bringen, je nachdem sie eine Ausdehnung oder eine Zusammendrückung der zwischen $e\,g$ und $f\,h$ enthaltenen Faserstückchen hervorzubringen streben.

Dies vorausgesetzt hat man nun:

$$\overline{m_1\,n_1} = d s_0 = \varrho_0\,d\,\Theta_0\,, \qquad \overline{u_1\,v_1} = (\varrho_0 + \zeta)\,d\,\Theta_0\,,$$

$$\overline{m\,n} = \varrho\,d\Theta = d\,s_0 \left(1 + \frac{S}{\varepsilon}\right) \quad \overline{u\,v} = (\varrho + \zeta)\,d\,\Theta$$

Hieraus folgt: $\overline{u\,v} - \overline{u_1\,v_1} = (\varrho + \zeta)\, d\,\Theta - (\varrho_0 + \zeta)\, d\,\Theta_0 =$

$$\left(1 + \frac{\zeta}{\varrho}\right) \varrho\, d\,\Theta - \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) \varrho_0\, d\,\Theta_0 = \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho}\right) ds_0 \left(1 + \frac{S}{\varepsilon}\right) - \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) d\,s_0$$

$\overline{u\,v} = \overline{u_1\,v_1}$ ist aber die Ausdehnung der Faser, deren natürliche Länge gleich $\overline{u_1\,v_1} = (\varrho_0 + \zeta)\, d\,\Theta_0 = \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) \varrho_0\, d\,\Theta_0 = \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) ds_0$ war, und da die bei $v$ wirkende Spannungsintensität $\sigma$ ist, so hat man auch $\overline{u\,v} - \overline{u_1\,v_1} = \overline{u_1\,v_1}\; \frac{\sigma}{\varepsilon}$, wir erhalten daher:

$$\left(1 + \frac{\zeta}{\varrho}\right) d\,s_0 \left(1 + \frac{S}{\varepsilon}\right) - \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) d\,s_0 = \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) d\,s_0\, \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

oder:

$$\left(1 + \frac{\zeta}{\varrho}\right) \left(1 + \frac{S}{\varepsilon}\right) = \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) \left(1 + \frac{\sigma}{\varepsilon}\right)$$

In allen Fällen der Anwendung sind $\frac{\zeta}{\varrho}\; \frac{\zeta}{\varrho_0}\; \frac{S}{\varepsilon}\; \frac{\sigma}{\varepsilon}$ sehr kleine Grössen, deren Produkte vernachlässiget werden können. Unter dieser Voraussetzung folgt aus der letzten Gleichung:

$$\sigma = S + \varepsilon \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) \zeta \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

Hierdurch ist nun die Spannungsintensität in einer Entfernung $\zeta$ oberhalb der Axenfaser berechnet. Setzen wir in diesen Ausdruck $\zeta = -\, v$, so muss $\sigma$ gleich Null werden, denn die Neutralfaser ist ja diejenige Faser, in welcher weder Spannungen noch Pressungen vorkommen. Wir erhalten demnach aus (1):

$$v = \frac{S}{\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) \varepsilon} \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

Für den Fall, dass S eine Pressung ist, muss dieselbe negativ in Rechnung gebracht werden, fällt also auch $v$ negativ aus und liegt dann die Neutralfaser oberhalb der Axenfaser.

Theilen wir den Querschnitt f h, Fig. 8., durch Linien, die zur Ebene der Figur senkrecht sind, in unendlich viele unendlich schmale Streifen und nennen d f den Flächeninhalt des bei w befindlichen Streifens, so ist $\sigma$ d f die Kraft, welche die Fasern dieses Querschnittes d f spannt, ferner $\int \sigma \, df$ die Summe aller spannenden Kräfte, endlich $\int \sigma \, \zeta \, df$ die Summe der Momente derselben. Setzen wir in diese Integrale für $\sigma$ den Ausdruck (1), so folgt

$$\int \sigma \, df = \int \left[ S + \varepsilon \left( \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right) \zeta \right] df$$

$$\int \zeta \, \sigma \, df = \int \left[ S + \varepsilon \left( \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right) \zeta \right] \zeta \, df$$

wobei die Integrationen auf den ganzen Querschnitt f h auszudehnen sind. Da sich diese Integrationen auf $\zeta$ und nicht auf $\varrho$ beziehen und der Voraussetzung gemäss n der Schwerpunkt des Querschnittes ist, so hat man $\int \zeta \, df = 0$ und ist $\int \zeta^2 \, df$ das Trägheitsmoment des Querschnittes. Bezeichnen wir dasselbe mit $\mu$, so werden obige Integrale:

$$\left. \begin{aligned} &\int \sigma \, df = S \, \Omega \\ &\int \sigma \, \zeta \, df = \varepsilon \left( \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right) \mu \end{aligned} \right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Der Gleichgewichtszustand erfordert aber 1) dass die Summe K der äusseren auf Spannung wirkenden Kräften gleich ist der Summe aller im Querschnitt f h vorkommenden inneren Spannungen; 2) dass die Summe der Momente M aller äusseren Kräfte gleich ist der Summe der Momente aller im Querschnitt f h vorkommenden Spannungen.

Die Bedingungen des Gleichgewichtes sind demnach:

$$\left. \begin{aligned} &S \, \Omega = K \\ &\varepsilon \left( \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right) \mu = M \end{aligned} \right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Führt man den Werth von S und von $\left( \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right)$, welche sich aus diesen Ausdrücken ergeben in (1) und (2) ein, so erhält man:

$$\sigma = \frac{K}{\Omega} + \frac{M}{\mu} \zeta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

$$\upsilon = \frac{K}{\Omega} \frac{\mu}{M} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Diese Gleichungen (4), (5), (6) enthalten die Lösung unserer Aufgabe. Die erste der Gleichungen (4) bestimmt die im Allgemeinen variable Spannungsintensität, welche in einem beliebigen Punkt der Schwerpunktfaser herrscht. Die zweite der Gleichungen bestimmt die Gestalt der Axenfaser im gebogenen Zustande des Stabes. Die Gleichung (6) bestimmt die Gestalt der Neutralfaser; endlich die Gleichung (5) die Spannungsintensität in irgend einem Punkt im Innern des Stabes.

Wir wollen noch die Wirkungsgrösse berechnen, die erforderlich ist, um irgend eine Biegung des Stabes zu bewirken.

Wenn die Biegung beginnt, ist die Spannungsintensität im Faserstückchen $\overline{u_1 v_1}$ gleich Null; wenn die Biegung geschehen ist, beträgt diese Spannungsintensität $\sigma$. In irgend einem Augenblick während des Vorganges der Biegung hat die Spannungsintensität im Faserelement $\overline{u_1 v_1}$ einen gewissen Werth $\sigma_1$ und in diesem Moment ist die Ausdehnung desselben $d s_0 \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) \frac{\sigma_1}{\varepsilon}$. Schreitet die Biegung im nächsten Zeitelement weiter fort, so nimmt die Spannungsintensität um $d\sigma_1$ zu und wächst die Ausdehnung um $d s_0 \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) \frac{d \sigma_1}{\varepsilon}$. Die Wirkungsgrösse, welche erforderlich ist, um alle Faserstückchen des Querschnittes $d f$ um $d s_0 \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) \frac{d \sigma_1}{\varepsilon}$ auszudehnen, ist daher $\sigma_1 \, d f \, d s_0 \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) \frac{d \sigma_1}{\varepsilon}$. Integrirt man diesen Ausdruck in Bezug auf $\sigma_1$ von $\sigma_1 = 0$ bis $\sigma_1 = \sigma$, so erhält man die Wirkungsgrösse, welche erforderlich ist, um das Faserprisma, dessen Länge $d s_0$ und Querschnitt $d f$ ist, aus dem natürlichen Zustand in denjenigen zu versetzen, in welchem eine Spannungsintensität $\sigma$ eintritt und der Krümmungshalbmesser von $\overline{m n}$ gleich $\varrho$ wird. Diese Wirkung ist demnach:

$$d s_0 \, d f \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2} \sigma^2$$

oder wenn man für $\sigma$ aus (5) seinen Werth setzt:

$$d s_0 \, d f \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2} \left(\frac{K}{\Omega} + \frac{M}{\mu} \zeta\right)^2$$

Integrirt man diesen Ausdruck nach $\zeta$ und dehnt das Integrale über den ganzen Querschnitt aus, so erhält man die Wirkung, welche erforderlich ist, um die zwischen den Ebenen $e_1 g_1$ $f_1 h_1$, Fig. 7, eingeschlossene Parthie des Stabes aus dem ursprünglichen Zustand in denjenigen zu versetzen, in welchem der Krümmungshalbmesser $\varrho$ eintritt. Dieses Integrale ist:

$$d s_0 \frac{1}{2\varepsilon} \int \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right)\left(\frac{K}{\Omega} + \frac{M}{\mu}\zeta\right)^2 d f$$

Erlauben wir uns $\frac{\zeta}{\varrho_0}$ gegen die Einheit zu vernachlässigen, so begehen wir in allen Fällen der Anwendung keinen merklichen Fehler, gelangen aber hierdurch zu einem viel einfacheren Endresultat. Unter dieser Voraussetzung wird das obige Integrale:

$$\frac{d s_0}{2\varepsilon} \int \left[\left(\frac{K}{\Omega}\right)^2 + 2\,\frac{K}{\Omega}\,\frac{M}{\mu}\,\zeta + \left(\frac{M}{\mu}\right)^2 \zeta^2\right] d f$$

Es ist aber $\int d f = \Omega$, $\int \zeta\, d f = o$, $\int \zeta^2\, d f = \mu$. Demnach erhalten wir:

$$\frac{d s_0}{2\varepsilon}\left[\left(\frac{K}{\Omega}\right)^2 \Omega + \left(\frac{M}{\mu}\right)^2 \mu\right] = \frac{d s_0}{2\varepsilon}\left(\frac{K^2}{\Omega} + \frac{M^2}{\mu}\right)$$

Integriren wir endlich nach $s_0$ innerhalb derjenigen Punkte der Axenfaser, die das Bogenstück bestimmen, für welches die Wirkungsgrösse berechnet werden soll, so erhalten wir endlich für die totale Wirkung $W$, welche erforderlich ist, um ein bestimmtes Bogenstück des ursprünglich krummen Stabes zu biegen, folgenden Ausdruck:

$$W = \frac{1}{2\varepsilon} \int \left(\frac{K^2}{\Omega} + \frac{M^2}{\mu}\right) d s_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

In diesem Ausdruck sind aber $K^2$ und $M$ Funktionen von $s_0$.

Setzt man für $M$ den Werth. der aus der zweiten der Gleichungen (4) folgt, so erhält man auch:

$$W = \frac{1}{2\varepsilon} \int \left[\frac{K^2}{\Omega} + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right)^2 \mu\right] d s_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Die folgenden einfachen Beispiele werden die Anwendung dieser Resultate verständlich machen.

1) Ein im natürlichen Zustande gerader Stab, Fig. 1, Tafel III., sei einerseits eingespannt, andererseits mit P belastet. Es tritt eine Biegung ein, und man soll die Wirkung berechnen, welche dieser Biegung entspricht. Nennen wir $O\,n = x$ $m\,n = y$ die Coordinaten eines Punktes $m$ der Axenlinie, so ist $P\,x = M$ das Biegungsmoment für den Punkt $m$. Ist die Biegung sehr schwach, so dürfen wir $K$ vernachlässigen, weil in diesem Fall die Axenfaser keine merkliche Ausdehnung erleidet. Setzen wir in (7) $M = P\,x$, $K = o$, $\mu = E\,z$, und erlauben uns wegen der vorausgesetzten schwachen Biegung $d\,s_0 = d\,x$ zu setzen, so erhalten wir:

$$W = \frac{1}{2\,\varepsilon}\int_0^1 \frac{P^2\,x^2}{E\,z}\,d\,x = \frac{P^2}{6\,\varepsilon\,E\,z}\,l^3 \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Heissen wir $\mathfrak{S}_m$ die Maximalspannung, welche bei $a$ eintritt, so ist $\mathfrak{S}_m\,E = P\,l$. Führt man den aus dieser Gleichung folgenden Werth von $P$ in (9) ein, so folgt auch:

$$W = \frac{1}{6}\,\frac{\mathfrak{S}_m^2}{\varepsilon}\,\frac{E\,l}{z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

2) Ein ursprünglich gerader Stab von einer Länge $l$ werde um einen Cylinder vom Halbmesser $R$ herumgewickelt. Die Wirkungsgrösse, welche diesem Vorgang entspricht, soll berechnet werden.

Da in diesem Fall die Axenfaser nicht gedehnt wird, so ist zunächst $K = o$ zu setzen. Da ferner der Stab ursprünglich gerade war, so ist $\frac{1}{\varrho_0} = o$ und weil der Stab kreisförmig gebogen wird, so ist $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R}$ eine Constante. Wir erhalten daher vermöge (8):

$$W = \frac{1}{2\,\varepsilon}\int \frac{\varepsilon^2\,\mu}{R^2}\,d\,s_0 = \frac{\varepsilon\,\mu\,l}{2\,R^2}$$

## Verwindung oder Torsion eines Stabes.

**Erklärungen.** Denken wir uns, ein stabförmiger Körper werde am einen Ende festgehalten und am anderen durch ein drehend wirkendes Kräftepaar angegriffen, so entsteht in dem ganzen Stabe eine Verwindung, bis die inneren Kräfte mit dem Kräftepaar ins Gleichgewicht gekommen sind.

Nennen wir auch hier wiederum eine Reihenfolge von Atomen, die in einer zur Richtung des Stabes parallelen geraden Linie liegen,