Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Biegung durch Zusammendrückung

urn:nbn:de:bsz:31-270970

Es sei dagegen $m < n$ oder $\frac{c}{1} < \sqrt{3}$ dann wird $(m-n)x_1 + nc$ am grössten für den kleinsten Werth von x_1, also für $x_1 = c$ und dieses Maximum wird $(m - n)c + nc = mc$, das Maximum von mx ist aber ebenfalls gleich mc. Die Maximalspannung tritt also, wenn $m < n$ oder $\frac{c}{1} < \sqrt{3}$ ist, im Punkt B ein.

Biegung durch Zusammendrückung.

Aufstellung der Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes. Wenn ein langer stabförmiger Körper Fig. 6, Tafel III. auf eine Unterlage A_2 aufrecht gestellt und dann einem Vertikaldruck P ausgesetzt wird, tritt zunächst eine Zusammendrückung des Stabes ein, kann aber auch gleichzeitig eine bleibende Biegung entstehen. Diesen Gleichgewichtszustand wollen wir untersuchen, wobei wir abermals die Voraussetzungen machen, welche Seite 13 für die gewöhnliche Biegung ausgesprochen wurden.

Es sei $A\,A_1\,A_2$ Fig. 6 und 7, Tafel III. die Schwerpunktsfaser des im Allgemeinen zusammengedrückten und gebogenen Stabes $C\,B\,C_2\,B_2$.

Zieht man durch irgend einen Punkt m der Schwerpunktsfaser eine Normallinie $m_3\,m\,q$, so wird in derselben irgend ein Punkt m_2 zu finden sein, in welchem weder Ausdehnung noch Zusammendrückung stattfindet. Da dies von jedem Normalquerschnitt gesagt werden kann, so wird es überhaupt eine stetige Linie $D\,D_1\,D_2$ geben, in welcher weder Ausdehnung noch Zusammenpressung stattfindet, und diese Linie ist die neutrale Linie. Dieselbe muss aber nicht in den Raum fallen, den der Stab einnimmt, sie kann auch ausserhalb dieses Raumes fallen, und dann ist die Neutrallinie nur ein geometrisches Gebilde, welchem keine Realität entspricht. In der Figur liegt die Neutrallinie theils innerhalb, theils ausserhalb des Stabes. An der linken Seite der Linie herrscht Ausdehnung, an der rechten Zusammenpressung.

Wir nehmen $A\,A_2$ als Abscissenaxe und nennen

$\left.\begin{matrix} An = x \\ mn = y \end{matrix}\right\}$ die Coordinaten eines Punktes m der Schwerpunktfaser.

$m\,m_2 = v$ die Entfernung der Neutralfaser von der Schwerpunktsfaser.

Diese Entfernung gemessen in der Richtung der Normale.

$m\,m_1 = \zeta$ die Entfernung irgend einer zusammengedrückten Faser von der Schwerpunktsfaser, ebenfalls gemessen wie v.

$\left.\begin{matrix} m\,m_3 = z \\ m\,q = z_1 \end{matrix}\right\}$ die Entfernungen der Schwerpunktsfaser von den Kantenfasern.

$\mathfrak{P}$ die Intensität der Pressung im Punkte m der Schwerpunktsfaser.

$\widehat{n\,m\,q} = \varphi$ Winkel, den die Normale $m\,q$ mit der Ordinatenrichtung bildet. Es ist vollkommen genau $\tang \varphi = \frac{dy}{dx}$.

Ω den Querschnitt des Stabes.

p die Intensität der Pressung bei m_1.

Dies vorausgesetzt, findet man ganz auf ähnliche Weise, wie in dem Fundamentalproblem der gewöhnlichen Biegung:

$$p = \mathfrak{P} - \frac{\varepsilon}{\varrho} \zeta \quad \dots \dots \dots \dots \quad (1)$$

$$v = \mathfrak{P} \frac{\varrho}{\varepsilon} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (2)$$

$$\int p \, df = \mathfrak{P} \, \Omega \quad = \text{Summe der Pressungen.}$$

$$\int \zeta p \, df = \frac{\varepsilon}{\varrho} z E = \text{Summe der Momente.}$$

Zerlegt man P in zwei Kräfte, $P \cos \varphi$ und $P \sin \varphi$, so ist es die erstere derselben, welche die Zusammendrückung der Fasern im Querschnitt $m_3 q$ hervorbringt, und man erhält demnach:

$$\mathfrak{P} \, \Omega = P \cos \varphi \quad \dots \dots \dots \dots \quad (3)$$

$$P \, y = \frac{\varepsilon}{\varrho} z E \quad \dots \dots \dots \dots \quad (4)$$

Es ist aber auch annähernd:

$$\varrho = - \frac{dx^2}{d^2y} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (5)$$

Diese Gleichungen enthalten die Lösung der Aufgabe.

Eliminirt man aus (1) und (2) $\mathfrak{P}$ und $\frac{\varrho}{\varepsilon}$ vermittelst (3) und (4) so findet man:

$$p = \frac{P \cos \varphi}{\Omega} - \frac{P}{E\,z} y \zeta \quad \dots \dots \dots \quad (6)$$

$$v = \frac{E\,z \cos \varphi}{\Omega\, y} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (7)$$

Aus (4) und (5) folgt aber:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{P}{\varepsilon\, z\, E}\, y = o \quad \dots\dots\dots\dots \quad (8)$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{P}{\varepsilon\, z\, E} = k^2 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (9)$$

so ist das Integrale von (8):

$$y = \mathfrak{M} \sin k x + \mathfrak{N} \cos k x \quad \dots\dots\dots\dots \quad (10)$$

wobei $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ die Constanten der Integration bedeuten. Da für $x = o$ auch $y = o$ ist, so muss $\mathfrak{N} = o$ sein. Daher hat man:

$$y = \mathfrak{M} \sin k x \quad \dots\dots\dots\dots \quad (11)$$

und es bedeutet $\mathfrak{M}$ die grösste Ausbiegung bei A_1 Fig. 6, Tafel III.

Setzt man $\overline{A\, A_2} = c$, so ist für $x = c$, $y = o$ demnach:

$$\sin k c = o,$$

Der kleinste von o verschiedene Winkel, für welchen das Sinus gleich Null wird, ist π, wir erhalten daher:

$$k c = \pi, \quad k = \frac{\pi}{c} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (12)$$

Setzt man in (6) $\zeta = o$, so gibt dieser Ausdruck die im Punkte m der Schwerpunktfaser herrschende Spannungsintensität, und diese ist $\frac{P \cos \varphi}{\Omega}$.

Betrachtet man φ als eine unendlich kleine Grösse, von welcher die zweiten und höheren Potenzen vernachlässiget werden dürfen, so kann man $\cos \varphi = 1$ setzen und dann wird die Pressungsintensität in der Axenfaser constant gleich $\frac{P}{\Omega}$. Nennt man l die Länge des Stabes im natürlichen Zustand, so ist:

$$l \left(1 - \frac{P}{\Omega} \frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \dots\dots\dots\dots \quad (13)$$

die Länge der gebogenen und zusammengedrückten Axenfaser. Diese Länge ist aber auch:

$$2\int_{0}^{\frac{c}{2}} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 2\int_{0}^{\frac{c}{2}} dx \sqrt{1 + \mathfrak{M}^2\, k^2 \, \mathrm{Cos}^2\, k\, x}$$

Man hat daher die Gleichung:

$$l\left(1 - \frac{P}{\Omega}\,\frac{1}{\varepsilon}\right) = 2\int_{0}^{\frac{c}{2}} dx \sqrt{1 + \mathfrak{M}^2\, k^2\, \cos^2 k\, x} \quad . \; . \; . \quad (14)$$

Allein wenn φ unendlich klein ist, ist es auch $\mathfrak{M}$. Man kann daher schreiber:

$$\sqrt{1 + \mathfrak{M}^2\, k^2\, \cos^2\, k\, x} = 1 + \frac{1}{2}\, \mathfrak{M}^2\, k^2\, \cos^2 k\, x$$

demnach:

$$\int_{0}^{\frac{c}{2}} dx \sqrt{1 + \mathfrak{M}^2\, k^2\, \cos^2\, k\, x} = \int_{0}^{\frac{c}{2}} \left[1 + \frac{1}{2}\, \mathfrak{M}^2\, k^2\, \cos^2\, k\, x\right] d\, x$$

$$= \frac{c}{2} + \frac{1}{2}\, \mathfrak{M}^2\, k^2 \int_{0}^{\frac{c}{2}} \cos^2\, k\, x\, d\, x$$

$$= \frac{c}{2} + \frac{1}{2}\, \mathfrak{M}^2\, k\, \frac{k\, c}{4} = \frac{c}{2}\left[1 + \frac{1}{4}\, k^2\, \mathfrak{M}^2\right]$$

die Gleichung (14) wird demnach:

$$l\left[1 - \frac{P}{\Omega}\,\frac{1}{\varepsilon}\right] = c\left[1 + \frac{1}{4}\, k^2\, \mathfrak{M}^2\right]$$

und hieraus folgt:

$$\mathfrak{M} = \frac{2}{k}\sqrt{\frac{l}{c}\left[1 - \frac{P}{\Omega}\,\frac{1}{\varepsilon}\right] - 1}$$

oder wenn man für c seinen Werth $c = \frac{\pi}{k}$ aus (12) einführt:

$$\mathfrak{M} = \frac{2}{k}\sqrt{\frac{l\,k}{\pi}\left[1 - \frac{P}{\Omega}\,\frac{1}{\varepsilon}\right] - 1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

Hiermit ist nun die grösste Ausbiegung des Stabes berechnet. Allein dieser Ausdruck gibt nicht immer reelle Werthe, denn wenn P klein ist, ist auch vermöge (9) k klein. Im Gleichgewichtszustand kann also nur dann eine Biegung vorhanden sein, wenn P oder k so gross ist, dass der unter dem Wurzelzeichen stehende Ausdruck positiv ist, d. h. wenn

$$\frac{l\,k}{\pi}\left[1 - \frac{P}{\Omega}\,\frac{1}{\varepsilon}\right] > 1$$

Nennt man Q denjenigen Werth von P, welcher den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen gleich Null macht, so ist Q die grösste Belastung, welche der Stab gerade aufrecht stehend tragen kann, ohne eine Biegung anzunehmen. Mit Berücksichtigung von (9) ist für diesen Werth von Q

$$\frac{l}{\pi}\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon\,z\,E}}\left[1 - \frac{Q}{\Omega\,\varepsilon}\right] = 1$$

oder auch wenn man $\frac{Q}{\Omega\,\varepsilon}$ gegen die Einheit vernachlässiget:

$$\frac{l}{\pi}\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon\,z\,E}} = 1$$

demnach:

$$Q = \varepsilon\,\pi^2\,E\,\frac{z}{l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Diese Gleichung (16) kann auch direkt aus (12), nämlich aus $k = \frac{\pi}{c}$ erschlossen werden. Es ist nämlich wegen (9) $k^2 = \frac{P}{\varepsilon\,z\,E}$ demnach:

$$\frac{P}{\varepsilon\,z\,E} = \frac{\pi^2}{c^2}$$

$$P = \pi^2\,\frac{1}{c^2}\,\varepsilon\,z\,E$$

Diese Gleichung bestimmt also die Belastung, für welche eine gewisse Zusammenbiegung eintritt. Setzt man für c seinen grössten Werth, so erhält man diejenige Belastung, welche die kleinste Zusammenbiegung bewirkt. c wird aber am grössten und wird unendlich nahe gleich $l\left[1 - \frac{Q}{\Omega\,\varepsilon}\right]$ wenn die Biegung verschwindet. Setzt man demnach in obige Gleichung für $c = l \left[1 - \frac{Q}{\Omega \varepsilon} \right]$ und $= Q$ so erhält man:

$$Q = \frac{\pi^2 \varepsilon z E}{l^2 \left[1 - \frac{Q}{\Omega \varepsilon} \right]^2}$$

oder auch weil $\frac{Q}{\Omega \varepsilon}$ gegen 1 vernachlässiget werden kann:

$$Q = \varepsilon \pi^2 E \frac{z}{l^2}$$

Allein diese kleinste Belastung Q, welche im Stande ist eine Biegung hervorzubringen, ist gleich der grössten Belastung, die der Körper ohne sich zu biegen, also aufrecht stehend, tragen kann.

Fassen wir nun alle Ergebnisse unserer Untersuchung zusammen, so erhalten wir Folgendes:

1) Der Stab ist im Gleichgewichtszustand nur zusammengedrückt und nicht gebogen, so lange die Belastung P gleich oder kleiner ist, als:

$$Q = \varepsilon \pi^2 E \frac{z}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

2) Die grösste Belastung, welche ein Stab aufrecht stehend zu tragen vermag, ist:

$$Q = \varepsilon \pi^2 E \frac{z}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

3) Ist die Belastung P grösser als dieser Werth von Q, so ist der Stab im Gleichgewichtszustand nicht nur comprimirt, sondern auch gebogen. Die grösste Ausbiegung M ist, wegen (15)

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{M} = \frac{2}{k} \sqrt{\frac{l k}{\pi} \left[1 - \frac{P}{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} \right] - 1} \\ \text{wobei} \\ k = \sqrt{\frac{P}{\varepsilon z E}} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

4) Im gebogenen Zustand ist die Gleichung der Schwerpunktfaser vermöge (11)

$$y = \mathfrak{M} \sin k x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

5) Die Intensität p der Pressung in irgend einem Punkte des gebogenen Stabes ist vermöge (6):

$$p = \frac{P \cos \varphi}{\Omega} - \frac{P}{E z} y \zeta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

6) Die Entfernung v der Neutralfaser von der Schwerpunktfaser ist vermöge (7)

$$v = \frac{E z \cos \varphi}{\Omega y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

7) Zur Bestimmung des Winkels φ hat man die Gleichung:

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{d y}{d x} = \mathfrak{M} k \cos k x$$

Vermittelst der Gleichung (22) kann die Gestalt der Neutralfaser bestimmt werden, wenn vorerst die Axenfaser vermittelst (20) ermittelt ist.

Biegung eines im natürlichen Zustande krummen Stabes.

Wir wollen uns die Aufgabe vorlegen, den Gleichgewichtszustand zu bestimmen, der in einem ursprünglich krummen Stab eintritt, wenn auf denselben äussere Kräfte einwirken; beschränken uns jedoch auf den Fall, dass die Axenlinie des Stabes im ursprünglichen Zustande eine ebene Kurve ist, und dass die Angriffspunkte und die Richtungen aller äusseren Kräfte in der Ebene der Axenkurve liegen. Wir können uns zu diesen Untersuchungen der Figuren 7 und 8, Tafel I., bedienen, wenn wir uns so benehmen, wie wenn die Axenlinie $l_1 n_1 m_1 k_1$ krumm gezeichnet, und $e_1 g_1$ $f_1 h_1$ die zu den Punkten m_1 und n_1 gehörigen Normalen wären.

Nennen wir für den natürlichen Zustand des Stabes, Fig. 7, Tafel I.:

ds_0 die Länge des Bogenelements $m_1 n_1$.

ρ_0 den Krümmungshalbmesser des Bogenelements $m_1 n_1$.

$d\Theta_0$ den unendlich kleinen Winkel, unter welchem sich die Normalen $e_1 g_1$ $f_1 h_1$ im Krümmungsmittelpunkt schneiden.

$n_1 v_1 = \zeta$ die Entfernung irgend eines Faserstückchens $u_1 v_1$ von der Schwerpunktfaser.

$n_1 f_1 = z$, $n_1 h_1 = z_1$ die Entfernungen der obersten und der untersten Faser von der Schwerpunktfaser.