Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Fünfter Fall

urn:nbn:de:bsz:31-270970

Die Momente M und M_1 wachsen von B und A an bis D hin und erreichen demnach ihr Maximum in D; dieses ist für beide:

$$P \frac{c c_1}{l} + \frac{1}{2} p c \left[1 - \frac{c}{2 l}\right] = P \frac{c c_1}{l} + \frac{p c c_1}{4 l} = \frac{c c_1}{l} \left[P + \frac{p}{4}\right]$$

Es wird demnach:

$$\mathfrak{S}_m E = \frac{c c_1}{l} \left[P + \frac{p}{4}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (29)$$

und bei D ist der gefährliche Querschnitt.

Fünfter Fall. Fig. 5, Tafel III. Der Stab ist bei A befestiget, bei C unterstützt, bei B belastet.

Es sei:

l der Horizontalabstand der Punkte A und C.

c der Horizontalabstand der Punkte B und C.

$\left.\begin{array}{l} x = C n \\ y = m n \end{array}\right\}$ die Coordinaten eines Punktes zwischen B und C.

$\left.\begin{array}{l} x_1 = C n_1 \\ y_1 = m_1 n_1 \end{array}\right\}$ die Coordinaten eines Punktes zwischen A und B.

P die Belastung bei B.

X der unbekannte Druck gegen die Stütze C.

α der Winkel, den die zum Punkt B gezogene Berührungslinie mit der Axe C A bildet.

Y = B D die Ordinate des Punktes B.

Setzt man noch zur Abkürzuug:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{X}{\varepsilon E z} = m \\[2ex] \dfrac{P}{\varepsilon E z} = n \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (30)$$

und vernachlässiget das Gewicht des Stabes, so sind die Gleichungen der Kurvenstücke B C und B A:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = - m x, \quad \frac{d^2 y_1}{d x_1^2} = (n - m) x_1 - n c \quad \ldots \quad (31)$$

Die Integrale dieser Gleichungen sind:

$$\frac{d y}{d x} = - \frac{m x^2}{2} + A \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (32)$$

$$y = -\frac{m x^3}{6} + A x + B \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (33)$$

$$\frac{d y_1}{d x_1} = (n - m) \frac{x_1^2}{2} - n c x_1 + A_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (34)$$

$$y_1 = (n - m) \frac{x_1^3}{6} - n c \frac{x_1^2}{2} + A_1 x + B_1 \quad . \; . \; . \quad (35)$$

wobei A B A_1 B_1 die Constanten der Integrationen bedeuten;

für $x = o$ soll werden $y = o$, daher hat man wegen (33) . $B = o$

„ $x = c$ „ „ $y = Y$, „ „ „ „ (33)

$$Y = - m \frac{c^3}{6} + A c$$

„ $x = c$ „ „ $\frac{d y}{d x} = \text{tang}\, \alpha$, daher hat man wegen (32)

$$\text{tang}\, \alpha = - \frac{m c^2}{2} + A$$

„ $x_1 = l$ „ „ $y_1 = o$, daher hat man wegen (35)

$$o = (n - m) \frac{l^3}{6} - n c \frac{l^2}{2} + A_1 l + B_1$$

„ $x_1 = c$ „ „ $y_1 = Y$, daher hat man wegen (35)

$$Y = (n - m) \frac{c^3}{6} - \frac{n c^3}{2} + A_1 c + B_1$$

„ $x_1 = c$ „ „ $\frac{d y_1}{d x_1} = \text{tang}\, \alpha$, daher hat man wegen (34)

$$\text{tang}\, \alpha = (n - m) \frac{c^2}{2} - n c^2 + A_1$$

„ $x_1 = l$ „ „ $\frac{d y_1}{d x_1} = o$, daher hat man wegen (34)

$$o = (n - m) \frac{l^2}{2} - n c l + A_1$$

Aus diesen Bedingungsgleichungen findet man:

$$m = n \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{c}{l}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{c}{l}\right)^3 \right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (36)$$

$$Y = \frac{c^2 l}{2} (m + n) - \frac{c^3}{6} (m + 3 n) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (37)$$

$$\text{tang}\, \alpha = \frac{1}{2} (l - c) \left[m (l + c) - n (l - c) \right] \quad . \; . \; . \quad (38)$$

$$A = \frac{1}{2} m l^2 - \frac{1}{2} n (l - c)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

$$B = o \quad \ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

$$A_1 = n c l - (n - m) \frac{l^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

$$B_1 = -\frac{1}{2} n c l^2 + \frac{1}{3} (n - m) l^3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

Der Ausdruck (36) bestimmt wegen (30) den Druck X, welchen die Unterstützung C erleidet. Substituirt man den Werth von m, welchen (36) darbietet, in die folgenden Ausdrücke, so erhält man alle übrigen Grössen Y $\tan \alpha$ A B A_1 B_1 ausgedrückt durch die gegebenen Grössen der Aufgabe, und die Gleichungen (33) und (35) geben dann die Formen der Kurvenstücke B C und B A.

Nun ist noch die Frage zu beantworten, an welcher Stelle des Stabes das Maximum der Spannungsintensität eintritt. Dieses Maximum tritt an derjenigen Stelle ein, für welche der Krümmungshalbmesser den kleinsten Werth hat, für welchen demnach

$$m x \text{ oder } (m - n) x_1 + n c$$

am grössten wird.

Es sei $m > n$, was wegen (36) der Fall ist, wenn

$$\frac{1}{2} \left(\frac{c}{l}\right)^3 > \frac{3}{2} \left(\frac{c}{l}\right)$$

oder wenn

$$\left(\frac{c}{l}\right) > \sqrt{3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

Dann wird $(m - n) x_1 + n c$ am grössten für den grössten Werth von x_1, daher für $x_1 = l$ und dieser grösste Werth ist dann:

$$(m - n) l + n c$$

Der grösste Werth von $m x$ ist dagegen $m c$. Die Differenz dieser beiden Maxima ist:

$$m c - [(m - n) l + n c] = -(m - n)(l - c)$$

ist also, weil $m > n$ und $l > c$ ist negativ. Die Maximalspannung tritt demnach, wenn $m > n$ ist, in A ein.

Es sei dagegen $m < n$ oder $\frac{c}{l} < \sqrt{3}$ dann wird $(m-n)x_1 + nc$ am grössten für den kleinsten Werth von x_1, also für $x_1 = c$ und dieses Maximum wird $(m-n)c + nc = mc$, das Maximum von mx ist aber ebenfalls gleich mc. Die Maximalspannung tritt also, wenn $m < n$ oder $\frac{c}{l} < \sqrt{3}$ ist, im Punkt B ein.

Biegung durch Zusammendrückung.

Aufstellung der Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes. Wenn ein langer stabförmiger Körper Fig. 6, Tafel III. auf eine Unterlage A_2 aufrecht gestellt und dann einem Vertikaldruck P ausgesetzt wird, tritt zunächst eine Zusammendrückung des Stabes ein, kann aber auch gleichzeitig eine bleibende Biegung entstehen. Diesen Gleichgewichtszustand wollen wir untersuchen, wobei wir abermals die Voraussetzungen machen, welche Seite 13 für die gewöhnliche Biegung ausgesprochen wurden.

Es sei $A A_1 A_2$ Fig. 6 und 7, Tafel III. die Schwerpunktsfaser des im Allgemeinen zusammengedrückten und gebogenen Stabes $C B C_2 B_2$.

Zieht man durch irgend einen Punkt m der Schwerpunktsfaser eine Normallinie $m_3 m q$, so wird in derselben irgend ein Punkt m_2 zu finden sein, in welchem weder Ausdehnung noch Zusammendrückung stattfindet. Da dies von jedem Normalquerschnitt gesagt werden kann, so wird es überhaupt eine stetige Linie $D D_1 D_2$ geben, in welcher weder Ausdehnung noch Zusammenpressung stattfindet, und diese Linie ist die neutrale Linie. Dieselbe muss aber nicht in den Raum fallen, den der Stab einnimmt, sie kann auch ausserhalb dieses Raumes fallen, und dann ist die Neutrallinie nur ein geometrisches Gebilde, welchem keine Realität entspricht. In der Figur liegt die Neutrallinie theils innerhalb, theils ausserhalb des Stabes. An der linken Seite der Linie herrscht Ausdehnung, an der rechten Zusammenpressung.

Wir nehmen $A A_2$ als Abscissenaxe und nennen

$\left.\begin{array}{l} An = x \\ mn = y \end{array}\right\}$ die Coordinaten eines Punktes m der Schwerpunktfaser.

$m m_2 = v$ die Entfernung der Neutralfaser von der Schwerpunktsfaser.

Diese Entfernung gemessen in der Richtung der Normale.

$m m_1 = \zeta$ die Entfernung irgend einer zusammengedrückten Faser von der Schwerpunktsfaser, ebenfalls gemessen wie v.

$\left.\begin{array}{l} m m_3 = z \\ m q = z_1 \end{array}\right\}$ die Entfernungen der Schwerpunktsfaser von den Kantenfasern.