Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Vierter Fall

urn:nbn:de:bsz:31-270970

wird gleich Null für $x = l$, die Maximalspannung tritt also bei D ein und ist:

$$P c + \frac{1}{4} p l$$

Es ist demnach:

$$\mathfrak{S}_m E = \left(P c + \frac{1}{4} p l\right) \quad \ldots \ldots \ldots, \quad (21)$$

Vierter Fall. Der Stab liegt auf zwei Unterstützungen und ist in einem Punkt, der von diesen Unterstützungen um c und c_1 entfernt ist, mit $2P$ belastet. Das Gewicht des Stabes ist p. Fig. 4, Tafel III.

Setzt man $\overline{Bn} = x$, $mn = y$, $An_1 = x_1$, $n_1 m_1 = y_1$ das Moment für den Punkt m gleich M, jenes für den Punkt m_1 gleich M_1, so hat man:

Belastung des Punktes B . . . . $= \frac{1}{2} p + P \frac{c_1}{l}$

" " " A . . . . $= \frac{1}{2} p + P \frac{c}{l}$

und man findet nun:

$$\left.\begin{aligned} M &= \left(\frac{1}{2} p + P \frac{c_1}{l}\right) x - \frac{p}{2l} x \frac{x}{2} \\ M_1 &= \left(\frac{1}{2} p + P \frac{c}{l}\right) x_1 - \frac{p}{2l} x_1 \frac{x_1}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (22)$$

Die Gleichungen der Kurvenstücke B D und A D sind demnach:

$$\left(\frac{1}{2} p + P \frac{c_1}{l}\right) x - \frac{p}{4l} x^2 = - \varepsilon E z \frac{d^2 y}{d x^2}$$

$$\left(\frac{1}{2} p + P \frac{c}{l}\right) x_1 - \frac{p}{4l} x_1^2 = - \varepsilon E z \frac{d^2 y_1}{d x_1^2}$$

Die ersten Integrale dieser Gleichungen sind:

$$\left.\begin{aligned} - \varepsilon E z \frac{d y}{d x} &= \left(\frac{1}{2} p + P \frac{c_1}{l}\right) \frac{x^2}{2} - \frac{p}{12l} x^3 + C \\ - \varepsilon E z \frac{d y_1}{d x_1} &= \left(\frac{1}{2} p + P \frac{c}{l}\right) \frac{x_1^2}{2} - \frac{p}{12l} x_1^3 + C_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (23)$$

wobei C und C_1 die Constanten der Integration bezeichnen.

Zieht man zum Punkt D eine Berührungslinie und nennt α und α_1 den Winkel, welcher dieselbe mit den positiven Richtungen von x und x_1 bildet, so ist $\alpha + \alpha_1 = \pi$, demnach $\tang \alpha + \tang \alpha_1 = o$.

Allein es ist $\tang \alpha$ der Werth von $\frac{d\,y}{d\,x}$ für $x = c$ und $\tang \alpha_1$ der Werth von $\frac{d\,y_1}{d\,x_1}$ für $x = c_1$, demnach wegen der Gleichung (23):

$$o = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{2}\,p + P\,\frac{c_1}{l}\right)\frac{c^2}{2} - \frac{p\,c^3}{12\,l} + C \\ \left(\frac{1}{2}\,p + P\,\frac{c}{l}\right)\frac{c_1^{\,2}}{2} - \frac{p\,c_1^{\,3}}{12\,l} + C_1 \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

Integrirt man die Gleichungen (23), so folgt ferner:

$$\left. \begin{array}{l} -\,\varepsilon\,E\,z\,y = \left(\frac{1}{2}\,p + P\,\frac{c_1}{l}\right)\frac{x^3}{6} - \frac{p}{48\,l}\,x^4 + C\,x + D \\ -\,\varepsilon\,E\,z\,y_1 = \left(\frac{1}{2}\,p + P\,\frac{c}{l}\right)\frac{x_1^{\,3}}{6} - \frac{p}{48\,l}\,x_1^{\,4} + C_1\,x_1 + D_1 \end{array} \right\} \quad \ldots \quad (25)$$

Beide Integrations-Constanten sind jedoch Null, weil für $x = o$ und $x_1 = o$ auch y und y_1 verschieden. Dann ist aber für $x = c$ und $x_1 = c_1$, $y = y_1 = f$. Demnach:

$$\left(\frac{1}{2}p + P\frac{c_1}{l}\right)\frac{c^3}{6} - \frac{p}{48\,l}\,c^4 + C\,c = \left(\frac{1}{2}p + P\frac{c}{l}\right)\frac{c_1^{\,3}}{6} - \frac{p}{48\,l}\,c_1^{\,4} + C_1\,c_1 \quad . \quad (26)$$

Aus den Gleichungen (24) und (26) findet man für C und C_1 nachstehende Werthe:

$$\left. \begin{array}{l} C = \dfrac{-\left(\frac{1}{2}p + \frac{P c_1}{l}\right)\frac{c^2}{2}\left(\frac{c}{3} + c_1\right) - \left(\frac{1}{2}p + \frac{P\,c}{l}\right)\frac{c_1^{\,3}}{3} + \frac{p\,c_1^{\,4}}{16\,l} + \frac{p\,c^3}{12\,l}\left[\frac{c}{4} + c_1\right]}{c + c_1} \\ C_1 = \dfrac{-\left(\frac{1}{2}\,p + \frac{P\,c}{l}\right)\frac{c_1^{\,2}}{2}\left(\frac{c_1}{3} + c\right) - \left(\frac{1}{2}\,p + \frac{P c_1}{l}\right)\frac{c^3}{3} + \frac{p\,c^4}{16\,l} + \frac{p\,c_1^{\,3}}{12\,l}\left[\frac{c_1}{4} + c\right]}{c + c_1} \end{array} \right\} (27)$$

Diese Werthe sind nun in die Gleichung der Kurve zu setzen, nämlich in

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{\varepsilon\,E\,z}\left[\left(\frac{1}{2}\,p + P\,\frac{c_1}{l}\right)\frac{x^3}{6} - \frac{p}{48\,l}\,x^4 + C\,x\right] \\ y_1 = -\frac{1}{\varepsilon\,E\,z}\left[\left(\frac{1}{2}\,p + P\,\frac{c}{l}\right)\frac{x_1^{\,3}}{6} - \frac{p}{48\,l}\,x_1^{\,4} + C_1\,x_1\right] \end{array} \right\} \quad . \; . \quad (28)$$

Die Momente M und M_1 wachsen von B und A an bis D hin und erreichen demnach ihr Maximum in D; dieses ist für beide:

$$P \frac{c c_1}{l} + \frac{1}{2} p c \left[1 - \frac{c}{2l}\right] = P \frac{c c_1}{l} + \frac{p c c_1}{4l} = \frac{c c_1}{l} \left[P + \frac{p}{4}\right]$$

Es wird demnach:

$$\mathfrak{S}_m E = \frac{c c_1}{l} \left[P + \frac{p}{4}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (29)$$

und bei D ist der gefährliche Querschnitt.

Fünfter Fall. Fig. 5, Tafel III. Der Stab ist bei A befestiget, bei C unterstützt, bei B belastet.

Es sei:

l der Horizontalabstand der Punkte A und C.

c der Horizontalabstand der Punkte B und C.

$\left.\begin{array}{l} x = C n \\ y = m n \end{array}\right\}$ die Coordinaten eines Punktes zwischen B und C.

$\left.\begin{array}{l} x_1 = C n_1 \\ y_1 = m_1 n_1 \end{array}\right\}$ die Coordinaten eines Punktes zwischen A und B.

P die Belastung bei B.

X der unbekannte Druck gegen die Stütze C.

α der Winkel, den die zum Punkt B gezogene Berührungslinie mit der Axe C A bildet.

Y = B D die Ordinate des Punktes B.

Setzt man noch zur Abkürzuug:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{X}{\varepsilon E z} = m \\[2ex] \dfrac{P}{\varepsilon E z} = n \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (30)$$

und vernachlässiget das Gewicht des Stabes, so sind die Gleichungen der Kurvenstücke B C und B A:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = - m x, \quad \frac{d^2 y_1}{d x_1^2} = (n - m) x_1 - n c \ldots . \quad (31)$$

Die Integrale dieser Gleichungen sind:

$$\frac{d y}{d x} = - \frac{m x^2}{2} + A \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (32)$$