# Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Dritter Fall

urn:nbn:de:bsz:31-270970

Das Moment $M$ wird innerhalb $x = o$ und $x = l$ erst bei $x = l$ ein Maximum und beträgt dort:

$$M_{max} = \left(P + \frac{p}{4}\right) l$$

Für die bei $D$ eintretende grösste Spannung ist demnach:

$$\mathfrak{S}_m E = \left(P + \frac{p}{4}\right) l$$

**Dritter Fall.** Ein Stab liegt mit seinen Enden auf Stützen, ist in Entfernungen $c$ von denselben mit $P$ und $P$ belastet; sein Eigengewicht beträgt $p$. Fig. 3, Tafel III.

Setzt man für einen zwischen $E$ und $D$ gelegenen Punkt $m$ $Bn = x$, $mn = y$. Für einen zwischen $E$ und $B$ gelegenen Punkt $m_1$ dagegen $B n_1 = x_1$, $m_1 n_1 = y_1$, so sind die Momente $M$ und $M_1$ welche den Querschnitten bei $m$ und $m_1$ entsprechen

$$M = \left(P + \frac{1}{2} p\right) x - P (x - c) - \frac{p}{2 l} x \frac{1}{2} x$$

$$M_1 = \left(P + \frac{1}{2} p\right) x_1 - \frac{p}{2 l} x_1 \frac{1}{2} x_1$$

oder:

$$M = P c + \frac{1}{2} p x - \frac{p}{4 l} x^2$$

$$M_1 = \left(P + \frac{1}{2} p\right) x_1 - \frac{p}{4 l} x_1^2$$

Die Gleichungen der Stabstücke $B E$ und $E F$ sind demnach, vermöge (4):

$$-\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{1}{\varepsilon E z} \left[ P c + \frac{1}{2} p x - \frac{p}{4 l} x^2 \right]$$

$$-\frac{d^2 y_1}{d x_1^2} = \frac{1}{\varepsilon E z} \left[ \left(P + \frac{1}{2} p\right) x_1 - \frac{p}{4 l} x_1^2 \right]$$

Die erste dieser Gleichungen gilt von $x = c$ bis $x = l$, die zweite von $x_1 = o$ bis $x_1 = c$.

Im Punkt E, d. h. für $x = x_1 = c$, müssen beide Gleichungen einerlei Ordinate und einerlei Tangente geben, d. h. es muss für $x = x_1 = c$, $y = y_1$ und muss $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}$ werden.

Die ersten Integrale dieser zwei Gleichungen sind:

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varepsilon E z}\left[P c x + \frac{1}{4} p x^2 - \frac{p}{12 l} x^3\right] + C$$

$$-\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{1}{\varepsilon E z}\left[\left(P + \frac{1}{2} p\right)\frac{x_1^2}{2} - \frac{p}{12 l} x_1^3\right] + C_1$$

wobei C und $C_1$ die Constanten der Integrale bedeuten. Wegen $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}$ für $x = x_1 = c$ ist:

$$\frac{1}{\varepsilon E z}\left[P c^2 + \frac{1}{4} p c^2 - \frac{p}{12 l} c^3\right] + C =$$
$$\frac{1}{\varepsilon E z}\left[\left(P + \frac{1}{2} p\right)\frac{c^2}{2} - \frac{p c^3}{12 l}\right] + C_1$$

Hieraus folgt:

$$\frac{P c^2}{2} = (C_1 - C)\, \varepsilon E z \qquad (11)$$

Eine wiederholte Integration gibt nun weiter:

$$-y = \frac{1}{\varepsilon E z}\left[P c \frac{x^2}{2} + \frac{1}{12} p x^3 - \frac{p}{48 l} x^4\right] + C x + B \qquad (12)$$

$$-y_1 = \frac{1}{\varepsilon E z}\left[\left(P + \frac{1}{2} p\right)\frac{x_1^3}{6} - \frac{p}{48 l} x_1^4\right] + C_1 x_1 + B_1 \qquad (13)$$

wobei abermals B und $B_1$ die Constanten der Integration bezeichnen. Da für $x_1 = o$, auch $y_1 = o$ ist, so ist $B_1 = o$, nun ist aber für $x = x_1 = c$ $y = y_1$ daher:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\varepsilon E z}\left[\frac{P c^3}{2} + \frac{1}{12} p c^3 - \frac{p c^4}{48 l}\right] + C c + B = \\ &\frac{1}{\varepsilon E z}\left[\left(P + \frac{1}{2} p\right)\frac{c^3}{6} - \frac{p}{48 l} c^4\right] + C_1 c \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Endlich ist für $x = l$ $\frac{dy}{dx} = o$, demnach:

$$\frac{1}{\varepsilon E z}\left[P c l + \frac{1}{4} p l^2 - \frac{p}{12 l} l^3\right] + C = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (15)$$

Aus den Ausdrücken (11), (14), (15) folgen, mit Berücksichtigung, dass $B_1 = 0$ ist, die Werthe von $C$ $C_1$ $B$. Die Gleichung (14) reduzirt, gibt:

$$\frac{1}{3} P c^3 \left[(C - C_1)\; c + B\right] \varepsilon E z = 0$$

Für $C_1 - C$ den Werth gesetzt, der aus (11) folgt, erhält man:

$$B = -\frac{1}{6} \frac{P c^3}{E \varepsilon z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

Nun folgt aus (15):

$$C = -\frac{P c l + \frac{1}{6} p l^2}{E \varepsilon z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

und vermittelst dieses Werthes folgt aus (11):

$$C_1 = -\frac{P c l + \frac{1}{6} p l^2 - \frac{P c^2}{2}}{E \varepsilon z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

Führt man diese drei Werthe (16), (17), (18) in (12) und (13) ein, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{\varepsilon E z}\left[\frac{1}{6} P c^3 + \left(P c l + \frac{1}{6} p l^2\right) x \right. \\ \left. - \frac{1}{2} P c x^2 - \frac{1}{12} p x^3 + \frac{p}{48 l} x^4\right] \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (19)$$

$$y_1 = \frac{1}{\varepsilon E z}\left[\left(P c l + \frac{1}{6} p l^2 - \frac{P c^2}{2}\right) x_1 - \left(P + \frac{1}{2} p\right) \frac{x_1^3}{6} + \frac{p}{48 l} x_1^4\right] (20)$$

Was das Tragungsvermögen eines in der Art belasteten Balkens betrifft, so ergibt sich dieses aus dem Maximalwerth der Momente $M$ und $M_1$; der Werth von $M_1$ wird am grössten für $x_1 = c$, der Werth von $M$ ist für $x = c$ gleich dem Werth von $M_1$ für $x_1 = c$. Allein der Werth von $M$ ist für $x = c$ der kleinste und wird am grössten für $x = l$, denn $\frac{d M}{d x} = \frac{1}{2} p - \frac{p x}{2 l} = \frac{p}{2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)$

wird gleich Null für $x = l$, die Maximalspannung tritt also bei D ein und ist:

$$Pc + \frac{1}{4} pl$$

Es ist demnach:

$$\mathfrak{S}_m E = \left(Pc + \frac{1}{4} pl\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; , \quad (21)$$

**Vierter Fall.** Der Stab liegt auf zwei Unterstützungen und ist in einem Punkt, der von diesen Unterstützungen um $c$ und $c_1$ entfernt ist, mit $2P$ belastet. Das Gewicht des Stabes ist $p$. Fig. 4, Tafel III.

Setzt man $\overline{Bn} = x$, $mn = y$, $An_1 = x_1$, $n_1 m_1 = y_1$ das Moment für den Punkt $m$ gleich $M$, jenes für den Punkt $m_1$ gleich $M_1$, so hat man:

Belastung des Punktes B . . . . . . . . . . $= \frac{1}{2} p + P \frac{c_1}{l}$

" " " A . . . . . . . . . . $= \frac{1}{2} p + P \frac{c}{l}$

und man findet nun:

$$\left.\begin{aligned} M &= \left(\frac{1}{2} p + P \frac{c_1}{l}\right) x - \frac{p}{2l} x \; \frac{x}{2} \\ M_1 &= \left(\frac{1}{2} p + P \frac{c}{l}\right) x_1 - \frac{p}{2l} x_1 \; \frac{x_1}{2} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (22)$$

Die Gleichungen der Kurvenstücke B D und A D sind demnach:

$$\left(\frac{1}{2} p + P \frac{c_1}{l}\right) x - \frac{p}{4l} x^2 = -\varepsilon E z \frac{d^2 y}{d x^2}$$

$$\left(\frac{1}{2} p + P \frac{c}{l}\right) x_1 - \frac{p}{4l} x_1{}^2 = -\varepsilon E z \frac{d^2 y_1}{d x_1{}^2}$$

Die ersten Integrale dieser Gleichungen sind:

$$\left.\begin{aligned} -\varepsilon E z \frac{dy}{dx} &= \left(\frac{1}{2} p + P \frac{c_1}{l}\right) \frac{x^2}{2} - \frac{p}{12l} x^3 + C \\ -\varepsilon E z \frac{dy_1}{dx_1} &= \left(\frac{1}{2} p + P \frac{c}{l}\right) \frac{x_1{}^2}{2} - \frac{p}{12l} x_1{}^3 + C_1 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (23)$$

wobei $C$ und $C_1$ die Constanten der Integration bezeichnen.