Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Zweiter Fall

urn:nbn:de:bsz:31-270970

Das Zeichen — ist genommen, weil die Kurve ihre concave Seite der Abscissenlinie zuwendet. Das erste Integrale dieser Gleichung ist:

$$-\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{\varepsilon\,E\,z}\left(\frac{1}{2}\,P\,x^2 + \frac{1}{6}\,\frac{p}{l}\,x^3\right) + \text{Const}$$

Für $x = \overline{o\,n_1} = l$ (annähernd) ist $\frac{d\,y}{d\,x} = o$ (genau) demnach:

$$o = \frac{1}{\varepsilon\,E\,z}\left(\frac{1}{2}\,P\,l^2 + \frac{1}{6}\,\frac{p}{l}\,l^3\right) + \text{Const}$$

Die Differenz dieser Ausdrücke gibt:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{\varepsilon\,E\,z}\left[\frac{1}{2}\,P\,(l^2 - x^2) + \frac{1}{6}\,\frac{p}{l}\,(l^3 - x^3)\right]$$

Das Integrale dieser Gleichung ist:

$$y = \frac{1}{\varepsilon\,E\,z}\left[\left(\frac{1}{2}\,P\,l^2 + \frac{1}{6}\,p\,l^2\right)x - \frac{1}{6}\,P\,x^3 - \frac{1}{24}\,\frac{p}{l}\,x^4\right] \quad . \; . \; . \quad (6)$$

Eine Constante ist nicht hinzuzufügen, weil für $x = o$ auch $y = o$ wird. Dies ist die Gleichung der Axenfaser. Für $x = l$ wird $y = m_1\,n_1 = f$ und man findet:

$$f = \frac{l^3}{\varepsilon\,E\,z}\left[\frac{1}{3}\,P + \frac{1}{8}\,p\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Das Biegungsmoment M wird ein Maximum für $x = l$ und ist: $M_m = P\,l + \frac{p\,l}{2}$.

Die Maximalspannung an der Befestigungsstelle ist demnach vermöge (5):

$$\mathfrak{S}_m = \frac{P\,l + \frac{p}{2}\,l}{E} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Zweiter Fall. Der Stab liegt mit beiden Enden auf Unterstützungen, ist in der Mitte belastet und hat ein Gewicht p. Fig. 2, Tafel III.

Es sei $2\,l$ die Entfernung der Stützpunkte, $2\,P$ die Belastung in der Mitte, so ist $P + \frac{1}{2}\,p$ der Druck, welchen jeder Stützpunkt auszuhalten hat. Nimmt man B als Anfangspunkt der Coordinaten und setzt für irgend einen Punkt m der Axenfaser $Bn = x$, $mn = y$, so ist das Kraftmoment, welches in dem Querschnitte bei m die Spannungen und Pressungen hervorruft:

$$\left(P + \frac{1}{2}\,p\right) x - \frac{p}{2\,l}\,x\,\frac{x}{2} = M$$

Demnach erhält man wegen (4):

$$-\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{\left(P + \frac{1}{2}\,p\right) x - \frac{p}{4\,l}\,x^2}{\varepsilon E z}$$

Hieraus folgt durch Integration:

$$-\frac{d y}{d x} = \frac{1}{\varepsilon E z}\left[\frac{1}{2}\left(P + \frac{1}{2}\,p\right) x^2 - \frac{p}{12\,l}\,x^3 + \text{Const}\right]$$

Für $x = l$ wird $\frac{d y}{d x} = o$, demnach:

$$o = \frac{1}{\varepsilon E z}\left[\frac{1}{2}\left(P + \frac{1}{2}\,p\right) l^2 - \frac{p}{12\,l}\,l^3 + \text{Const}\right]$$

Die Differenz dieser Ausdrücke gibt:

$$\frac{d y}{d x} = \frac{1}{\varepsilon E z}\left[\frac{1}{2}\left(P + \frac{1}{2}\,p\right)\left(l^2 - x^2\right) - \frac{p}{12\,l}\left(l^3 - x^3\right)\right]$$

Die nochmalige Integration liefert:

$$y = \frac{1}{\varepsilon E z}\left[\frac{1}{2}\left(P + \frac{1}{2}\,p\right)\left(l^2 x - \frac{1}{3}\,x^3\right) - \frac{p}{12\,l}\left(l^3 x - \frac{1}{4}\,x^4\right)\right] . \quad (9)$$

Die Senkung $CD = f$ beträgt:

$$f = \frac{1}{\varepsilon E z}\left[\frac{1}{2}\left(P + \frac{1}{2}\,p\right)\frac{2}{3}\,l^3 - \frac{p}{12\,l}\,\frac{3}{4}\,l^3\right]$$

$$f = \frac{l^3}{\varepsilon E z}\left[\frac{1}{3}\,P + \frac{10}{96}\,p\right] \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Das Moment M wird innerhalb $x = o$ und $x = l$ erst bei $x = l$ ein Maximum und beträgt dort:

$$M_{max} = \left(P + \frac{p}{4}\right) l$$

Für die bei D eintretende grösste Spannung ist demnach:

$$\mathfrak{S}_m E = \left(P + \frac{p}{4}\right) l$$

Dritter Fall. Ein Stab liegt mit seinen Enden auf Stützen, ist in Entfernungen c von denselben mit P und P belastet; sein Eigengewicht beträgt p. Fig. 3, Tafel III.

Setzt man für einen zwischen E und D gelegenen Punkt m $B n = x$, $m n = y$. Für einen zwischen E und B gelegenen Punkt m_1 dagegen $B n_1 = x_1$, $m_1 n_1 = y_1$, so sind die Momente M und M_1 welche den Querschnitten bei m und m_1 entsprechen

$$M = \left(P + \frac{1}{2} p\right) x - P (x - c) - \frac{p}{2 l} x \frac{1}{2} x$$

$$M_1 = \left(P + \frac{1}{2} p\right) x_1 - \frac{p}{2 l} x_1 \frac{1}{2} x_1$$

oder:

$$M = P c + \frac{1}{2} p x - \frac{p}{4 l} x^2$$

$$M_1 = \left(P + \frac{1}{2} p\right) x_1 - \frac{p}{4 l} x_1^2$$

Die Gleichungen der Stabstücke $B E$ und $E F$ sind demnach, vermöge (4):

$$-\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{1}{\varepsilon E z} \left[P c + \frac{1}{2} p x - \frac{p}{4 l} x^2 \right]$$

$$-\frac{d^2 y_1}{d x_1^2} = \frac{1}{\varepsilon E z} \left[\left(P + \frac{1}{2} p\right) x_1 - \frac{p}{4 l} x_1^2 \right]$$

Die erste dieser Gleichungen gilt von $x = c$ bis $x = l$, die zweite von $x_1 = o$ bis $x_1 = c$.