Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Erster Fall

urn:nbn:de:bsz:31-270970

Dann ist aber vermöge Gleichung (6), Seite 17, wenn man s vernachlässiget:

$$\varrho\, \mathfrak{S} = z\, \varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Durch Elimination von $\mathfrak{S}$ vermittelst (1) findet man:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{\varepsilon\, E\, z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

oder auch weil für schwache Biegungen, und wenn $d^2\, x = o$ gesetzt wird $\frac{1}{\varrho} = \pm \frac{d^2\, y}{d\, x^2}$ ist

$$\pm \frac{d^2\, y}{d\, x^2} = \frac{M}{\varepsilon\, E\, z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Kennt man M als Funktion von x, so gibt diese Gleichung durch Integration die Gestalt der Schwerpunktsfaser. Aus (1) folgt:

$$\mathfrak{S} = \frac{M}{E} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Bestimmt man diejenigen Werthe von x, für welche M ein Maximum wird, so hat man die Stelle bestimmt, wo das Maximum der Spannung eintritt. Wird dieser Werth von x in (5) eingeführt, so erhält man den Werth der Maximalspannung, d. h. den Werth von $\mathfrak{S}_m$.

Wir wollen diese allgemeine Regel auf mehrere Beispiele anwenden.

Erster Fall. Ein Stab ist an dem einen seiner Enden eingespannt, am andern Ende belastet. Das Gewicht desselben sei p und soll berücksichtiget werden. Fig. 1, Tafel III.

Wählt man das freie Ende o zum Anfangspunkt eines Coordinatensystems und setzt $o\,n = x$, $m\,n = y$, so ist annähernd $p\,\frac{x}{l}$ das Gewicht des Stabstückes $m\,o$ und es ist ferner $p\,\frac{x}{l} \times \frac{x}{2}$ annähernd das Moment dieses Gewichtes in Bezug auf die durch m gehende Axe. Die Momentensumme der Kräfte, die den Stab bei m zu brechen streben, ist demnach $M = P\,x + \frac{p}{l}\,\frac{x^2}{2}$. Die Gleichung der Schwerpunktsfaser ist demnach vermöge (4):

$$-\frac{d^2\, y}{d\, x^2} = \frac{1}{\varepsilon\, E\, z}\left(P\,x + \frac{p}{l}\,\frac{x^2}{2}\right)$$

Das Zeichen — ist genommen, weil die Kurve ihre concave Seite der Abscissenlinie zuwendet. Das erste Integrale dieser Gleichung ist:

$$-\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{\varepsilon\,E\,z}\left(\frac{1}{2}\,P\,x^2 + \frac{1}{6}\,\frac{p}{l}\,x^3\right) + \text{Const}$$

Für $x = \overline{o\,n_1} = l$ (annähernd) ist $\frac{d\,y}{d\,x} = o$ (genau) demnach:

$$o = \frac{1}{\varepsilon\,E\,z}\left(\frac{1}{2}\,P\,l^2 + \frac{1}{6}\,\frac{p}{l}\,l^3\right) + \text{Const}$$

Die Differenz dieser Ausdrücke gibt:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{\varepsilon\,E\,z}\left[\frac{1}{2}\,P\,(l^2 - x^2) + \frac{1}{6}\,\frac{p}{l}\,(l^3 - x^3)\right]$$

Das Integrale dieser Gleichung ist:

$$y = \frac{1}{\varepsilon\,E\,z}\left[\left(\frac{1}{2}\,P\,l^2 + \frac{1}{6}\,p\,l^2\right)x - \frac{1}{6}\,P\,x^3 - \frac{1}{24}\,\frac{p}{l}\,x^4\right] \quad . \; . \; . \quad (6)$$

Eine Constante ist nicht hinzuzufügen, weil für $x = o$ auch $y = o$ wird. Dies ist die Gleichung der Axenfaser. Für $x = l$ wird $y = m_1\,n_1 = f$ und man findet:

$$f = \frac{l^3}{\varepsilon\,E\,z}\left[\frac{1}{3}\,P + \frac{1}{8}\,p\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Das Biegungsmoment M wird ein Maximum für $x = l$ und ist: $M_m = P\,l + \frac{p\,l}{2}$.

Die Maximalspannung an der Befestigungsstelle ist demnach vermöge (5):

$$\mathfrak{S}_m = \frac{P\,l + \frac{p}{2}\,l}{E} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Zweiter Fall. Der Stab liegt mit beiden Enden auf Unterstützungen, ist in der Mitte belastet und hat ein Gewicht p. Fig. 2, Tafel III.

Es sei $2\,l$ die Entfernung der Stützpunkte, $2\,P$ die Belastung in der Mitte, so ist $P + \frac{1}{2}\,p$ der Druck, welchen jeder Stützpunkt