Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Interpretation der Resultate

urn:nbn:de:bsz:31-270970

wobei l die Länge des Stabes bezeichnet und die Constante der Integration so bestimmt wurde, dass für $x = 0$ auch $y = 0$ wird, und dass für $x = l$, $\frac{dy}{dx} = 0$ ist. Nun ist aber ganz genau $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang.} \varphi$, oder annähernd, weil φ stets sehr klein ist, $\frac{dy}{dx} = \sin \varphi$, demnach vermöge (17)

$$\sin. \varphi = \frac{P}{2 \varepsilon z E} (l^2 - x^2) \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

Führt man diesen Werth von $\sin \varphi$ in die Ausdrücke (13), (14), (15) ein, so ergiebt sich:

$$s = \frac{P}{E z} x \zeta + \frac{P}{\Omega} \frac{P}{2 \varepsilon z E} (l^2 - x^2) \quad \ldots \quad (20)$$

$$\mathfrak{S} = \frac{P}{E} x + \frac{P}{\Omega} \frac{P}{2 \varepsilon z E} (l^2 - x^2) \quad \ldots \quad (21)$$

$$v = \frac{P}{2 \Omega \varepsilon} \frac{l^2 - x^2}{x} \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

und überdies hat man noch wegen (18)

$$y = \frac{P}{2 \varepsilon z E} \left(l^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \quad \ldots \ldots \quad (23)$$

Hiermit ist nun unsere Aufgabe vollständig gelöst. Die Gleichung (20) bestimmt die in irgend einem Punkt im Innern des Stabes herrschende Spannung. Die Gleichung (21) bestimmt die Spannung in jedem Punkt der oberen Faser $a b$. Die Gleichung (23) bestimmt die Gestalt der Schwerpunktfaser. Endlich die Gleichung (22) die Gestalt der Neutralfaser.

Interpretation der Resultate. Eliminirt man vermittelst (22) $l^2 - x^2$ aus (20) und (21), so findet man auch

$$s = \frac{P x}{E z} (\zeta + v) \quad \ldots \ldots \quad (24)$$

Vermittelst dieses Ausdruckes kann man die Spannungszustände im Innern des Stabes deutlich erkennen.

Betrachtet man x und v als Coordinaten eines rechtwinkeligen Coordinatensystems, so stellt die Gleichung (22) die Gleichung einer Hyperbel dar, da aber die wirklichen Werthe von v nach normaler Richtung auf die Axenfaser aufzutragen sind, so bestimmt die Gleichung (22) so zu sagen eine gebogene Hyperbel.

Betrachtet man in (24) s als eine constante Grösse, so bestimmt diese Gleichung für beliebige Werthe von x diejenigen Werthe von $\zeta + v$, für welche s einen constanten Werth hat, d. h. die Gleichung (24) bestimmt die Linie, in welcher einerlei Spannung herrscht.

Betrachtet man x und $\zeta + v$ als Coordinaten eines rechtwinkeligen Coordinatensystems, so stellt die Gleichung (24) eine Hyperbel dar. Da aber $\zeta + v$ von der neutralen Faser aus nach normaler Richtung gegen die Schwerpunktfaser aufzutragen ist, so ist die durch (24) ausgedrückte Linie eine Hyperbel, deren Abscissenaxe nach der neutralen Faser gekrümmt ist.

In Fig. 6 und 7, Tafel II., sind die Linien dargestellt, in welchen gleiche Spannungen herrschen.

Fig. 6 stellt die Linien von gleicher Spannung dar, wenn die Biegung des Stabes unendlich klein ist, also v gegen ζ vernachlässiget werden kann. Diese Linien sind Hyperbeln, deren Aeste gegen die Coordinatenaxen $k\,i$ und $k\,l$ assymptotisch verlaufen. Die Gleichung derselben folgt aus (24), wenn man $v = o$ setzt; dann wird:

$$\frac{s\,E\,z}{P} = x\,\zeta \qquad (25)$$

Die Spannungsdifferenzen in zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden Linien sind gleich gross, daher sind es auch die Ordinatendifferenzen in je zwei unmittelbar aufeinander folgenden Linien.

Nennt man ζ_0 den Werth von ζ für $x = \overline{k\,i} = l$, so hat man auch:

$$\frac{s\,E\,z}{P} = \zeta_0\, l \qquad (26)$$

demnach:

$$\zeta\, x = \zeta_0\, l\,, \quad \zeta = \zeta_0 \left(\frac{l}{x}\right) \qquad (27)$$

Vermittelst dieses Ausdruckes kann man sehr leicht eine Kurve verzeichnen, die in einer Entfernung ζ_0 von dem Punkt i ihren Anfang nimmt.

Die grösste Spannung findet statt im Punkt a, die grösste Pressung im Punkt d. Nennt man J diese grösste Spannung bei a, so hat man zur Bestimmung derselben (wegen $\zeta = z$ und $x = l$):

$$J = \frac{P\,l}{E} \qquad (28)$$

Fig. 7 zeigt die Kurven von gleicher Spannung, wenn der Stab merklich gebogen wird, und die Neutralfaser $o\,t$ merklich von der Axenfaser $i\,k$ abweicht. Diese Kurven ergeben sich, wenn man zuerst vermittelst (23) die Schwerpunktsfaser $i\,k$ verzeichnet, hierauf vermittelst (22) die Neutralfaser $o\,t$ darstellt und das Ordinatensystem der Linien von Fig. 6 von der Linie $o\,t$ aus nach Richtungen aufträgt, welche die Axenfaser normal durchschneiden. Die grösste Spannung findet im Punkt a statt und wird bestimmt, wenn man in (20) $x = l$, $\zeta = z$ setzt. Man findet

$$J = \frac{P\,l}{E} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (29)$$

also der Form nach den gleichen Ausdruck, wie in dem Fall einer unendlich schwachen Biegung. Für $x = o$ wird [vermöge (22)] $v = \infty$, d. h. in der Nähe des Punktes k entfernt sich die Neutralfaser plötzlich unendlich rasch von der Axenfaser. Aehnliches tritt jederzeit in denjenigen Punkten eines gebogenen Stabes ein, in welchem der Krümmungshalbmesser der neutralen Linie unendlich gross wird. So ist z. B. Fig. 8, Tafel II., ein auf zwei Stützen liegender, aber zu beiden Seiten über dieselben hinausragender Stab dargestellt, der an den Enden und in der Mitte belastet ist. In den Punkten β_1 und β_2, wo die Aenderungen der Krümmungsrichtungen stattfinden, sind die Krümmungshalbmesser unendlich und die neutrale Faser des ganzen Stabes besteht in diesem Fall aus den drei Theilen $\lambda\ \lambda_1\ \lambda_2$, deren Zweige assymptotisch gegen die Normalen $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$ $\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2$ verlaufen.

Bei den meisten Anwendungen der Elastizitätstheorie hat man es nur mit äusserst schwachen Formänderungen zu thun, so dass die Neutralfaser mit der Schwerpunktfaser zusammenfallend angenommen werden kann. Unter dieser Voraussetzung geben die Gleichungen (20) bis (23)

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{P}{E\,z}\,x\,\zeta \\ \mathfrak{S} &= \frac{P}{E}\,x \\ J &= \frac{P\,l}{E} \\ v &= o \\ y &= \frac{P}{2\,\varepsilon\,z\,E}\left(l^2\,x - \frac{1}{3}\,x^3\right) \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30)$$