Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Integration der Gleichungen

urn:nbn:de:bsz:31-270970

$$\varrho = \pm \frac{d\,s^3}{d\,x\,d^2y} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

wobei das obere oder das untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem die Linie der Abscissenaxe ihre convexe oder ihre concave Seite zuwendet. Im vorliegenden Falle gilt also das untere Zeichen. Da wir eine schwache Biegung voraussetzen, so begehen wir keinen merklichen Fehler, wenn wir in (11) $d\,s$ gleich $d\,x$ setzen. Dann aber erhalten wir:

$$\varrho = - \frac{d\,x^2}{d^2y} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

Hiermit sind nun alle, zur Lösung unseres Problems erforderlichen Gleichungen aufgestellt, und wir gehen nun zur weiteren Behandlung dieser Gleichungen über.

Behandlung der aufgestellten Gleichgewichtsgleichungen Aus der ersten der Gleichungen (10) folgt $S = \frac{P \sin. \varphi}{\Omega}$

Aus der dritten der Gleichungen (10) folgt $\frac{\varepsilon}{\varrho} = \frac{P\,x}{E\,z}$ führt man diese Werthe in die Ausdrücke (4), (5), (6) ein, so erhält man:

$$s = \frac{P}{\Omega} \sin \varphi + \frac{P}{E\,z}\,x\,\zeta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

$$\mathfrak{S} = \frac{P}{\Omega} \sin \varphi + \frac{P}{E}\,x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

$$v = \frac{z\,E}{\Omega} \; \frac{\sin \varphi}{x} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

In diesen Gleichungen ist noch sin φ unbekannt; dieser ergibt sich aus der Gleichung der Axenfaser. Zur Bestimmung derselben hat man wegen (10) und (12)

$$\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = - \frac{P}{\varepsilon\,z\,E}\,x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

Hieraus folgt durch Integration:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{P}{2\,\varepsilon\,z\,E}\,(l^2 - x^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

$$y = \frac{P}{2\,\varepsilon\,z\,E}\,(l^2\,x - \frac{1}{3}\,x^3) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

wobei l die Länge des Stabes bezeichnet und die Constante der Integration so bestimmt wurde, dass für $x = o$ auch $y = o$ wird, und dass für $x = l$, $\frac{dy}{dx} = o$ ist. Nun ist aber ganz genau $\frac{dy}{dx} = \text{tang.}\ \varphi$, oder annähernd, weil φ stets sehr klein ist, $\frac{dy}{dx} = \sin \varphi$, demnach vermöge (17)

$$\sin.\ \varphi = \frac{P}{2 \varepsilon z E} (l^2 - x^2) \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

Führt man diesen Werth von $\sin \varphi$ in die Ausdrücke (13), (14), (15) ein, so ergiebt sich:

$$s = \frac{P}{E z} x \zeta + \frac{P}{\Omega} \frac{P}{2 \varepsilon z E} (l^2 - x^2) \quad \ldots \quad (20)$$

$$\mathfrak{S} = \frac{P}{E} x + \frac{P}{\Omega} \frac{P}{2 \varepsilon z E} (l^2 - x^2) \quad \ldots \quad (21)$$

$$v = \frac{P}{2 \Omega \varepsilon} \frac{l^2 - x^2}{x} \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

und überdies hat man noch wegen (18)

$$y = \frac{P}{2 \varepsilon z E} \left(l^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \quad \ldots \ldots \quad (23)$$

Hiermit ist nun unsere Aufgabe vollständig gelöst. Die Gleichung (20) bestimmt die in irgend einem Punkt im Innern des Stabes herrschende Spannung. Die Gleichung (21) bestimmt die Spannung in jedem Punkt der oberen Faser a b. Die Gleichung (23) bestimmt die Gestalt der Schwerpunktfaser. Endlich die Gleichung (22) die Gestalt der Neutralfaser.

Interpretation der Resultate. Eliminirt man vermittelst (22) $l^2 - x^2$ aus (20) und (21), so findet man auch

$$s = \frac{P x}{E z} (\zeta + v) \quad \ldots \ldots \quad (24)$$

Vermittelst dieses Ausdruckes kann man die Spannungszustände im Innern des Stabes deutlich erkennen.

Betrachtet man x und v als Coordinaten eines rechtwinkeligen Coordinatensystems, so stellt die Gleichung (22) die Gleichung einer Hyperbel dar, da aber die wirklichen Werthe von v nach normaler Richtung auf die Axenfaser aufzutragen sind, so bestimmt die Gleichung (22) so zu sagen eine gebogene Hyperbel.