Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Aufstellung der Gleichgewichtsgleichungen

urn:nbn:de:bsz:31-270970

Aufstellung der Gleichgewichtsgleichungen. Zieht man durch q, Fig. 8, eine Linie s q r parallel mit e g, so ergeben sich zwei Dreiecke q s f und q r h, in welchen die in verschiedenen Entfernungen von q stattfindenden Ausdehnungen und Zusammendrückungen aller ursprünglich zwischen $e_1\ g_1$ und $f_1\ h_1$, Fig. 7, enthaltenen Faserstückchen zum Vorschein kommen.

Nennen wir:

ε den Modulus der Elastizität des Materials, und behandeln denselben als eine constante Grösse.

$\overline{f\ n} = z$ die Entfernung der Axenfasern von der obersten Faser ab.

$\overline{n\ w} = \zeta$ die Entfernung irgend eines Faserstückchens u w von den Axenfasern.

$\overline{n\ q} = v$ den Abstand der Neutralfaser von der Axenfaser im Querschnitt f h.

$\varrho = O\ m = O\ n$ den Krümmungshalbmesser des Bogenelementchens m n.

x y die Coordinaten des Punktes n in Bezug auf ein Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt k, dessen Abscissenaxe horizontal und dessen Ordinatenaxe vertikal gerichtet ist.

$S\ s\ \mathfrak{S}$ die Spannungsintensitäten in den Faserstücken m n u w e f.

$\Theta = \widehat{m\ O\ n}$ den Winkel, den die zu m und n gezogenen Normalen bilden.

$m_1\ n_1 = ds_0$ Fig. 7, die ursprüngliche Länge aller zwischen $e_1\ g_1$ und $f_1\ h_1$ enthaltenen Faserstückchen.

Dies vorausgesetzt, ist vermöge des Stabausdehnungsgesetzes

$$\overline{m\ n} = d\,s_0\left(1 + \frac{S}{\varepsilon}\right) = \varrho\ \Theta \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

$$\overline{u\ w} = d\,s_0\left(1 + \frac{s}{\varepsilon}\right) = (\varrho + \zeta)\ \Theta \quad \ldots \quad (2)$$

$$\overline{e\ f} = d\,s_0\left(1 + \frac{\mathfrak{S}}{\varepsilon}\right) = (\varrho + z)\ \Theta \quad \ldots \quad (3)$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$\frac{1 + \frac{s}{\varepsilon}}{1 + \frac{S}{\varepsilon}} = \frac{\varrho + \zeta}{\varrho} = 1 + \frac{\zeta}{\varrho} \text{ oder:}$$

$$1 + \frac{s}{\varepsilon} = \left(1 + \frac{S}{\varepsilon}\right)\left(1 + \frac{\zeta}{\varrho}\right)$$

Da jederzeit $\frac{S}{\varepsilon}$ und $\frac{\zeta}{\varrho}$ sehr kleine Grössen sind, so kann man die Produkte derselben vernachlässigen, und dann folgt aus dieser letzteren Gleichung:

$$s = S + \frac{\varepsilon}{\varrho} \zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Hierdurch ist die in einer Entfernung ζ oberhalb der Axenfaser herrschende Spannungsintensität ausgedrückt. Diese Spannungsintensität verschwindet für $\zeta = - v$, d. h. es ist:

$$o = S - \frac{\varepsilon}{\varrho} v$$

oder:

$$v = \frac{S \varrho}{\varepsilon} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Diese Gleichung bestimmt die Tiefe der Neutralfaser unterhalb der Axenfaser im Querschnitt f q h. Setzt man in (4) für ζ den Werth $z = n f$, so geht s in $\mathfrak{S}$ über und es ist:

$$\mathfrak{S} = S + \frac{\varepsilon}{\varrho} z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Theilen wir den Querschnitt f h durch horizontale Linien in unendlich viele unendlich schmale Streifen, und nennen $d f$ den Flächeninhalt des bei w befindlichen Streifens, so dürfen wir annehmen, dass in allen Punkten desselben die Spannungsintensität gleich s ist. Es ist demnach $s\, d f$ die Kraft, welche alle Fasern des Querschnittes $d f$ spannt und $\zeta\, s\, d f$ das statische Moment dieser Kraft, in Bezug auf eine durch n gehende, auf der Ebene der Figur senkrechte Axe. Die auf den ganzen Querschnitt f h ausgedehnten Integrale

$$\int s\, d f \text{ und } \int \zeta\, s\, d f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

drücken demnach aus: das erste die Summe aller Spannungen und Pressungen, welche im Querschnitt f h vorkommen; das zweite die Summe der Momente aller Spannungen und Pressungen. Setzt man für s den Werth (4) und berücksichtiget, dass sich die Integrationen nur auf ζ, nicht aber auf S und ϱ beziehen, so erhält man:

$$\int s\, d f = \int \left[S + \frac{\varepsilon}{\varrho} \zeta \right] d f = S \int d f + \frac{\varepsilon}{\varrho} \int \zeta\, d f$$

$$\int \zeta\, s\, d f = \int \zeta \left[S + \frac{\varepsilon}{\varrho} \zeta \right] d f = S \int \zeta\, d f + \frac{\varepsilon}{\varrho} \int \zeta^2\, d f$$

Nennt man Ω den Querschnitt des Stabes, so ist: $\int \mathrm{d\,f} = \Omega$. Berücksichtiget man, dass die ζ vom Schwerpunkt n des Querschnittes aus gemessen werden, so erkennt man, dass $\int \zeta \, \mathrm{d\,f} = 0$ ist und dass $\int \zeta^2 \, \mathrm{d\,f}$ das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende Queraxe ausdrückt. Setzen wir zur Abkürzung

$$\int \zeta^2 \, \mathrm{d\,f} = \mathrm{z\,E} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

so werden die obigen Integrale:

$$\left.\begin{aligned} \int \mathrm{s\,d\,f} &= \mathrm{S}\,\Omega \\ \int \zeta\,\mathrm{s\,d\,f} &= \frac{\varepsilon}{\varrho}\,\mathrm{z\,E} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Der Gleichgewichtszustand des Stabstückes n k erfordert, dass die inneren, am Querschnitt f h wirkenden Elastizitätskräfte mit allen äusseren, auf das Stabstück n k einwirkenden Kräften im Gleichgewicht sind. Nennt man Fig. 5, Tafel II., φ den Winkel, den die zum Punkt n der Axenfaser gezogene Berührungslinie mit der Abscissenaxe k x bildet, so ist auch φ der Winkel, den die Richtung der Kraft P mit der Richtung der Normalen f h bildet. Zerlegt man P in zwei Kräfte $\mathrm{P} \sin \varphi$ und $\mathrm{P} \cos \varphi$, so ist die Richtung der ersteren senkrecht auf f h, die Richtung der letzteren parallel mit f h. Vernachlässigen wir das Gewicht des Stabes, so muss im Gleichgewichtszustand sein:

1) $\mathrm{P} \sin \varphi$ gleich der Summe aller Spannungen und Pressungen, welche im Querschnitt f h stattfinden. 2) P x gleich der Summe der Momente dieser Spannungen und Pressungen. 3) $\mathrm{P} \cos \varphi$ gleich einer gewissen Abschiebungskraft T, welche den Theil f h b c des Stabes von dem Theil a f d h längs des Querschnitts f h abzushieben strebt.

Wir erhalten daher für den Gleichgewichtszustand des Stabes:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{P} \sin \varphi &= \Omega\,\mathrm{S} \\ \mathrm{P} \cos \varphi &= \mathrm{T} \\ \mathrm{P\,x} &= \frac{\varepsilon}{\varrho}\,\mathrm{z\,E} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Der Differenzialausdruck für den Krümmungshalbmesser einer ebenen Kurve ist:

$$\varrho = \pm \frac{d\,s^3}{d\,x\,d^2y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

wobei das obere oder das untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem die Linie der Abscissenaxe ihre convexe oder ihre concave Seite zuwendet. Im vorliegenden Falle gilt also das untere Zeichen. Da wir eine schwache Biegung voraussetzen, so begehen wir keinen merklichen Fehler, wenn wir in (11) $d\,s$ gleich $d\,x$ setzen. Dann aber erhalten wir:

$$\varrho = - \frac{d\,x^2}{d^2y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Hiermit sind nun alle, zur Lösung unseres Problems erforderlichen Gleichungen aufgestellt, und wir gehen nun zur weiteren Behandlung dieser Gleichungen über.

Behandlung der aufgestellten Gleichgewichtsgleichungen Aus der ersten der Gleichungen (10) folgt $S = \frac{P \sin.\ \varphi}{\Omega}$

Aus der dritten der Gleichungen (10) folgt $\frac{\varepsilon}{\varrho} = \frac{P\,x}{E\,z}$ führt man diese Werthe in die Ausdrücke (4), (5), (6) ein, so erhält man:

$$s = \frac{P}{\Omega} \sin \varphi + \frac{P}{E\,z}\, x\, \zeta \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

$$\mathfrak{S} = \frac{P}{\Omega} \sin \varphi + \frac{P}{E}\, x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

$$v = \frac{z\,E}{\Omega}\ \frac{\sin \varphi}{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

In diesen Gleichungen ist noch $\sin \varphi$ unbekannt; dieser ergibt sich aus der Gleichung der Axenfaser. Zur Bestimmung derselben hat man wegen (10) und (12)

$$\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = - \frac{P}{\varepsilon\,z\,E}\, x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Hieraus folgt durch Integration:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{P}{2\,\varepsilon\,z\,E}\,(l^2 - x^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

$$y = \frac{P}{2\,\varepsilon\,z\,E}\,(l^2\,x - \frac{1}{3}\,x^3) \quad \ldots\ldots \quad (18)$$