Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1862

Biegung eines Stabes. Vorbereitung

Biegung eines Stabes, relative Festigkeit der Materialien.

Voraussetzungen. Stäbe können auf verschiedene Weise gebogen werden. Wir betrachten zuerst einen speziellen Fall, der zwar in der Wirklichkeit selten vorkommt, worauf sich aber die verschiedenen Biegungsfälle zurückführen lassen.

Man denke sich, das eine Ende eines in natürlichem Zustande geraden Stabes werde nach horizontaler Richtung eingeklemmt, das andere Ende dagegen freigelassen, jedoch durch ein Gewicht belastet.

Fig. 7 sei der Stab im horizontal eingespannten, jedoch unbelasteten Zustand. Fig. 8 der Stab in belastetem, mithin gebogenem Zustand. Fig. 9 der Querschnitt des Stabes. Um uns eine klare Vorstellung zu verschaffen von dem im Innern des Stabes herrschenden Zustande, denken wir uns, der Stab bestehe aus einer grossen Anzahl von neben- und übereinandergelegten und mit einander verbundenen Fasern, wobei wir uns unter einer Faser eine Reihe von Atomen denken, die im geraden Zustand des Stabes in einer geraden, mit der Axe parallelen Linie liegen, in gebogenem Zustande des Stabes dagegen eine zur äusseren Krümmung a b äquidistante Linie bilden. i_1 k_1 sei die Faser, welche im unbelasteten Zustande durch die Schwerpunkte aller Querschnitte des Stabes geht; i k die gleiche Faser im belasteten Zustande. Wir wollen diese Faser die Axenfaser nennen. Der Gleichgewichtszustand des Stabes wird bekannt sein, wenn wir anzugeben im Stande sind: 1) den Zustand der Spannung oder Pressung in jedem einzelnen Punkte des Stabes, 2) die Gestalten der einzelnen Fasern des Stabes. Will man diese Gleichgewichtsaufgabe ganz scharf zur Lösung bringen, so hat man es mit einer äusserst schwierigen Aufgabe zu thun. Begnügt man sich aber mit einer Annäherung, so hat man es mit einer verhältnissmässig leichten Aufgabe zu thun, die schon unzählige Male behandelt worden ist.

Die folgende annähernde Behandlung beruht auf folgenden Annahmen, über deren Zulässigkeit wir uns später aussprechen werden. Wir nehmen an:

1) dass alle Atome, welche ursprünglich in einem ebenen Querschnitt e_1 g_1 lagen, auch im gebogenen Zustande in einer Ebene e g liegen, die in e auf der Faser a b senkrecht steht. Es ist also e g die Richtung der zum Punkt e der Kurve a b gehörigen Normale;

2) dass die Atome eines und desselben Querschnittes ihre relative Gegeneinanderlagerung nicht ändern, dass mithin die Querschnitte durch die Biegung weder ihre Form noch ihre Grösse verändern;

3) dass alle ursprünglich geraden Fasern im gebogenen Zustande des Stabes zur Faser a e f b äquidistante Linien bilden;

4) dass die Biegung nur so schwach sei, dass die früher Seite 3 und 5 aufgestellten Gesetze über die Ausdehnung und Zusammendrückung von Stäben angewendet werden dürfen.

Diesen Voraussetzungen wird ein eingespannter und belasteter Stab niemals mathematisch genau entsprechen. In der That denken wir uns z. B. einen Stab mit quadratischem Querschnitt, so ist zunächst klar, dass derselbe im gebogenen Zustande der zweiten Voraussetzung nicht entsprechen wird, denn so wie oben bei e f eine Ausdehnung und unten bei g h eine Zusammenziehung entsteht, wird gleichzeitig oben nach der Quere eine Zusammenziehung und unten nach der Quere eine Ausdehnung eintreten. Im gebogenen Zustande wird daher der Querschnitt nicht mehr die Gestalt Fig. 1, Tafel II., sondern die Form Fig. 2 haben. Der ganze Stab wird also in Folge der Biegung oben schmäler, unten breiter werden, als er ursprünglich war. So wie aber einmal eine Aenderung in der Querschnittsform und eine Gegeneinanderverschiebung der Atome eines und desselben Querschnittes eintritt, können auch die Voraussetzungen (1), (3) und (4) nicht mehr streng erfüllt sein. Nimmt man aber gar einen schienenartigen Stab an, d. h. einen Stab von verhältnissmässig grosser Höhe und geringer Dicke, so wird sich der belastete Stab in einem Gleichgewichtszustand befinden können, der von dem vorausgesetzten Zustand weit verschieden ist. Es kann z. B. ein Umschlagen der Schiene in der Art, wie Fig. 3 zeigt, oder es können an der unteren Kante Faltungen eintreten, in der Art, wie Fig. 4 zeigt.

Die vier Voraussetzungen oder Annahmen müssen gestellt werden, weil bei starken Belastungen und bei einem leicht zusammendrückbaren Materiale so komplizirte Molekularverschiebungen und Formänderungen eintreten würden, dass es ganz unmöglich wäre, dieselben durch Rechnung zu bestimmen. Diese sämmtlichen Voraussetzungen haben aber zugleich einen sehr wichtigen praktischen Sinn, denn sie sprechen Bedingungen aus, denen jeder auf relative Festigkeit in Anspruch genommene Bestandtheil entsprechen muss, um als ein solides Glied in irgend einer Konstruktion dienen zu können.

Indem wir also die folgenden Rechnungen unter jenen vier Voraussetzungen machen, werden wir solche Resultate erhalten, die sich jedenfalls auf praktisch brauchbare Konstruktionen anwenden lassen, nur sind wir leider nicht im Stande die Bedingungen oder Grenzen scharf anzugeben, bis zu welchen hin unsere Resultate noch Geltung haben, weil wir nicht im Stande sein werden zu sagen, wann die Verschiebungen der Moleküle eines und desselben Querschnittes merklich zu werden beginnen, wann ein Ueberwerfen oder Zusammenfalten oder Knicken eines Stabes einzutreten beginnt. Freilich in der Mehrzahl der Fälle, welche der Maschinenbau darbietet, weiss man schon mit dem Gefühl die Stabformen und Dimensionen so zu wählen, dass unsere Voraussetzungen zulässig sind.

Wir gehen nun zur Entwicklung der Theorie über. Richten wir unsere Aufmerksamkeit auf die Faserstückchen, welche ursprünglich zwischen den Querschnittsebenen e_1 g_1 und f_1 h_1 liegen, so treffen wir dieselben, nachdem die Biegung eingetreten ist, zwischen den Ebenen e g und f h (wegen Voraussetzung 1), die bei e und f auf der Faserlinie a e f b normal stehen, deren verlängerte Richtungen also in dem Krümmungsmittelpunkt O des Bogenelements e f sich scheiden.

Es ist klar dass $e\,f > e_1\,f_1$ und $g\,h < g_1\,h_1$. In e f herrscht also Ausdehnung, in g h dagegen Zusammendrückung. Geht man in Gedanken von e f an tiefer herab so begegnet man Faserstückchen, die weniger ausgedehnt sind als e f; geht man dagegen von g h an nach aufwärts, so begegnet man Faserstückchen die weniger zusammengepresst sind als g h; es muss also nothwendig irgendwo zwischen h und f eine Stelle geben, z. B. q, wo weder Ausdehnung noch Zusammendrückung stattfindet. Dies gilt aber auch für jeden anderen Querschnitt, demnach muss es eine ganze Schicht o p q t geben, wo weder Ausdehnung noch Zusammenpressung vorhanden ist. Diese Schicht wollen wir die neutrale Schicht nennen und die Linie, in welcher diese Schicht durch die Ebene der Figur geschnitten wird: neutrale Faser. Diese fällt im Allgemeinen nicht zusammen mit der Axenfaser i m n k. Aus dem bisher Gesagten erkennt man bereits, dass die Spannungen grösser und grösser werden, je mehr man sich von der neutralen Schicht nach aufwärts entfernt, dass dagegen die Pressungen mehr und mehr zunehmen, je mehr man sich von der neutralen Faser nach abwärts entfernt.

Es ist wohl auch zu vermuthen, dass die Spannungsintensitäten in einer und derselben Faser, z. B. in der Faser a e f b, nicht überall gleich gross sein werden, sondern dass sie von b an bis a hin wachsen. Hierdurch erkennt man, dass es in dem ganzen Stabe Schichten von gleicher Spannung und von gleicher Pressung geben muss, und dass die neutrale Schicht die Grenze bildet zwischen den gespannten und den gepressten Schichten.