Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1863

Effektberechnung der Maschine

Minute) richtet sich dagegen nicht nur nach dem mittleren Widerstand, sondern auch nach der Grösse der Heizfläche des Calorifers und nach der Brennstoffmenge, die in jeder Sekunde oder Stunde auf dem Rost des Calorifers verbrannt wird.

Effektberechnung der Maschine. Bei der folgenden Berechnung der Maschine setzen wir voraus: 1) dass ein Beharrungszustand vorhanden sei, 2) dass keine schädlichen Räume vorkommen, 3) dass die eigenen Reibungswiderstände der Maschine vernachlässigt werden dürfen, 4) dass die Spannungs- und Temperaturänderungen der Luft in dem ganzen Apparat nicht nach dem einfachen Mariott'schen Gesetz, sondern nach dem Seite 262 erklärten potenzirten Mariott'schen Gesetz statt finden.

Nennen wir:

F die Heizfläche des Calorifers,

$\mathfrak{C}_1 = 0 \cdot 2377$ die Wärmekapazität der atmosphärischen Luft bei constantem Druck,

$\mathfrak{C} = 0 \cdot 1686$ die Wärmekapazität der atmosphärischen Luft bei constantem Volumen,

$k = \frac{1}{253}$ den Wärmeübergangscoeffizienten auf die Zeitsekunde bezogen,

q die Luftmenge in Kilogrammen, welche in jeder Sekunde in den Calorifer getrieben wird,

Q die Luftmenge in Kilogrammen der Verbrennungsgase pro 1″,

A a die Querschnitte des Treibkolbens und des Pumpenkolbens,

L l die Kolbenschübe dieser beiden Kolben,

L_1 den Weg, den der Treibkolben zurücklegt, bis die Absperrung eintritt,

γ_0 das Gewicht von 1^{Kbm} atmosphärischer Luft bei 0° Temperatur und unter dem Druck der Atmosphäre,

R den auf einen Quadratmeter des Arbeitskolbens reduzirten Widerstand, welchen die zu betreibenden Arbeitsmaschinen verursachen,

$\mathfrak{A}$ den Druck der Atmosphäre auf einen Quadratmeter,

p die Spannkraft der Luft im Calorifer,

T_0 die Temperatur der Verbrennungsgase unmittelbar über dem Rost,

T_1 die Temperatur, mit welcher die Verbrennungsgase die Heizfläche des Calorifers verlassen und nach dem Kamin strömen,

t_0 die Temperatur, mit welcher die komprimirte Luft in den Calorifer eintritt,

t_1 die Temperatur, mit welcher die Luft den Calorifer verlässt und in den Treibcylinder c eintritt,

t die Temperatur der äussern atmosphärischen Luft,

$\mathfrak{H}$ die Heizkraft des Brennstoffs oder vielmehr die Wärmemenge, welche durch die Verbrennung von einem Kilogramm Brennstoff entwickelt wird,

$e = 2{\cdot}718$ die Basis der natürlichen Logarithmen,

B die Brennstoffmenge in Kilogrammen, welche in jeder Sekunde in dem Calorifer verbrannt wird.

Das potenzirte Mariott'sche Gesetz lautet, wie folgt: Wenn eine Luftmasse aus einem Zustand, in welchem ihre Dichte ϱ_0, ihre Temperatur Θ_0 und ihre Spannkraft s_0 ist, ohne Aenderung ihres Wärmegehaltes in eine andere Dichte ϱ_1 übergeht, so tritt eine Spannkraft s_1 und Temperatur Θ_1 ein und man hat:

$$s_1 = s_0 \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_0}\right)^{\mu} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$$\Theta_1 = (272{\cdot}5 + \Theta_0)\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_0}\right)^{\mu - 1} - 272{\cdot}5 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

$$\mu = 1{\cdot}421 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Dabei bedeutet μ das Verhältniss der beiden Wärmekapazitäten der Luft. Die Richtigkeit dieses potenzirten Mariott'schen Gesetzes haben wir Seite 261 nachgewiesen.

Wenn der Kolben der Luftpumpe einen Schub zu machen beginnt, herrscht hinter dem Kolben wie vor dem Kolben ein Druck $\mathfrak{A}$. Hat der Kolben einen Weg x zurückgelegt, so ist der Druck hinter dem Kolben gleich $\mathfrak{A}$, vor dem Kolben dagegen (wegen des potenzirten Mariott'schen Gesetzes) ein gewisser Druck y, der durch folgenden Ausdruck bestimmt wird:

$$y = \mathfrak{A}\left(\frac{1}{1 - x}\right)^{\mu} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Dieser Werth von y drückt die vor dem Kolben herrschende Spannung aus, bis das Druckventil sich öffnet, was in dem Augenblick geschieht, wenn y gleich p (gleich der Spannung im Calorifer) geworden ist. Nennt man ξ den Weg, den bis dahin der Kolben zurückgelegt hat, so ist:

$$p = \mathfrak{A}\left(\frac{1}{1 - \xi}\right)^{\mu}, \quad \xi = 1 - 1\left(\frac{\mathfrak{A}}{p}\right)^{\frac{1}{\mu}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Es ist ferner: $\int_0^\xi a\, y\, dx$ die Wirkung, welche der Compression entspricht, $a\, p\, (1-\xi)$ die Gegenwirkung vor dem Kolben während des Theils $1-\xi$ der Schublänge, während das Druckventil geöffnet ist. $a\, l\, \mathfrak{A}$ die Wirkung, welche der hinter dem Kolben während des ganzen Schubes wirkende Druck $\mathfrak{A}$ entwickelt. Nennt man w_2 die Wirkung, welche der Compression entspricht, w_1 die totale Wirkung, welche ein Schub erfordert, so findet man:

$$w_2 = \int_0^\xi a\, y\, dx, \quad w_1 = \int_0^\xi a\, y\, dx + a\, p\, (l-\xi) - a\, l\, \mathfrak{A}$$

Setzt man für y den Werth (4) und für ξ den Werth (5), so findet man:

$$w_2 = \frac{a\, l\, \mathfrak{A}}{\mu - 1}\left[\left(\frac{p}{\mathfrak{A}}\right)^{\frac{\mu-1}{\mu}} - 1\right] \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

$$w_1 = a\, l\, \mathfrak{A}\, \frac{\mu}{\mu-1}\left[\left(\frac{p}{\mathfrak{A}}\right)^{\frac{\mu-1}{\mu}} - 1\right] \quad \ldots \quad (7)$$

Diese Wirkungen können auch in anderer Weise ausgedrückt werden. Es ist vermöge (2):

$$\frac{1+\alpha\, t_0}{1+\alpha\, t} = \left(\frac{1}{1-\xi}\right)^{\mu-1} \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

oder wegen (5):

$$\frac{1+\alpha\, t_0}{1+\alpha\, t} = \left(\frac{p}{\mathfrak{A}}\right)^{\frac{\mu-1}{\mu}} \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

demnach

$$\left(\frac{p}{\mathfrak{A}}\right)^{\frac{\mu-1}{\mu}} - 1 = \frac{1+\alpha\, t_0}{1+\alpha\, t} - 1 = \frac{\alpha\,(t_0 - t)}{1+\alpha\, t}$$

daher wird:

$$w_2 = a\, l\, \frac{\mathfrak{A}}{\mu-1}\, \frac{\alpha\,(t_0-t)}{1+\alpha\, t} = \frac{a\, l\, \gamma_0}{1+\alpha\, t_0}\, \frac{\mathfrak{A}\, \alpha\, \mathfrak{C}}{\gamma_0\,(\mathfrak{C}_1 - \mathfrak{C})}\,(t_0 - t)$$

wobei $\mu = \frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}}$ das Verhältniss der beiden Wärmekapazitäten $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}$ für Luft bedeutet und γ_0 das Gewicht von einem Kubikmeter Luft bei 0° Temperatur und unter dem Druck der Atmosphäre.

Nun ist: $\frac{a\, l\, \gamma_0}{1+\alpha\, t} = G$ das Gewicht der atmosphärischen Luft einer Cylinderfüllung, $\frac{\mathfrak{A}\,\alpha}{\gamma_0\,(\mathfrak{C}_1 - \mathfrak{C})} = \mathfrak{k}$ der motorische Werth einer Wärmeeinheit (das mechanische Wärmeäquivalent), demnach wird:

$$w_2 = G\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{C}\,(t_0 - t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

und eben so wird:

$$w_1 = G\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{C}_1\,(t_0 - t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

die Wirkungsgrösse, welche zur Bewältigung eines Kolbenschubes nothwendig ist. Diese Gleichungen hätten wir gleich an die Spitze stellen und daraus (6) und (7) herleiten können. Hieraus sieht man aber auch, dass die Wirkung w_2, welche der Compression entspricht, nicht verloren geht, denn durch die Compression geht die Luft von der Temperatur t in t_0 über und dieser Temperaturerhöhung entspricht eine Wirkungsgrösse, die genau gleich w_2 (Gleichung 10) ist.

Nimmt man in den Ausdrücken statt G die Luftmengen, welche in jeder Sekunde komprimirt werden, so sind auch w_2 und w_1 die auf eine Sekunde bezogenen Wirkungsgrössen oder Effekte.

Die Wärmemenge, welche in die Heizröhren des Calorifers eindringen muss, damit die Luft ohne Aenderung ihrer Spannkraft von der Temperatur t_0 bis zu t_1 gebracht wird, ist: $G\,\mathfrak{C}_1\,(t_1 - t_0)$. Der motorische Werth dieser Wärmemenge ist:

$$\mathfrak{k}\,G\,\mathfrak{C}_1\,(t_1 - t_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Die Wirkung, welche der Arbeitskolben bei einem ganzen Schub produzirt, ist:

$$W_1 = \int_{L_1}^{L} y\,A\,d\,x + A\,p\,L_1 - A\,\mathfrak{A}\,L$$

dabei ist: $y = p\left(\frac{L_1}{x}\right)^{\mu}$

Verrichtet man die Integration, so findet man:

$$W_1 = A\,L\,p\left[\frac{L_1}{L} + \frac{L_1}{L}\,\frac{1 - \left(\frac{L_1}{L}\right)^{\mu - 1}}{\mu - 1} - \frac{\mathfrak{A}}{p}\right] \quad . \quad . \quad (13)$$

Nennen wir endlich $\mathfrak{W}_1$ die reine nützliche Wirkung, welche wir durch jede Wärmeeinheit des Brennstoffs gewinnen, so erhalten wir:

$$\mathfrak{W}_1 = \frac{W_1 - w_1}{G\,\mathfrak{C}_1\,(t_1 - t_0)} = \frac{1}{G\,\mathfrak{C}_1\,(t_1 - t_0)} \left\{ \begin{array}{l} A\,L\,p \left[\frac{L_1}{L} + \frac{L_1}{L} \frac{1 - \left(\frac{L_1}{L}\right)^{\mu - 1}}{\mu - 1} - \frac{\mathfrak{A}}{p} \right] \\ - a\,l\,\mathfrak{A}\,\frac{\mu}{\mu - 1} \left[\left(\frac{p}{\mathfrak{A}}\right)^{\frac{\mu - 1}{\mu}} - 1 \right] \end{array} \right\} \quad (14)$$

Allein $a\,l\,\frac{\gamma_0}{1 + \alpha\,t}$ ist das Gewicht q_1 einer Füllung des Pumpencylinders, $A\,L_1\,\frac{p}{\mathfrak{A}}\,\frac{\gamma_0}{1 + \alpha\,t_1}$ das Gewicht der Luftmenge, die bis zur Absperrung in den Arbeitscylinder eintritt. Da diese Gewichte gleich sind, so hat man:

$$\frac{a\,l\,\gamma_0}{1 + \alpha\,t} = A\,L_1\,\frac{p}{\mathfrak{A}}\,\frac{\gamma_0}{1 + \alpha\,t_1} = q_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Hieraus folgt:

$$A\,L\,p = \mathfrak{A}\,q_1\,\frac{L}{L_1}\,\frac{1 + \alpha\,t_1}{\gamma_0}, \quad a\,l\,\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\,q_1\,\frac{1 + \alpha\,t}{\gamma_0}$$

Führt man diese Werthe in (14) ein, so erhält man:

$$\mathfrak{W}_1 = \frac{\mathfrak{A}}{\gamma_0\,\mathfrak{C}_1\,(t_1 - t_0)} \times$$

$$\left\{ (1 + \alpha\,t_1) \left[1 + \frac{1 - \left(\frac{L_1}{L}\right)^{\mu - 1}}{\mu - 1} - \frac{L}{L_1}\,\frac{\mathfrak{A}}{p} \right] - (1 + \alpha\,t)\,\frac{\mu}{\mu - 1} \left[\left(\frac{p}{\mathfrak{A}}\right)^{\frac{\mu - 1}{\mu}} - 1 \right] \right\} (16)$$

Die reine Nutzwirkung, welche einem Kolbenschub entspricht, ist $W_1 - w_1$. Dividirt man diese durch die Zeit $\frac{L}{V}$ eines Schubes, so erhält man den reinen Nutzeffekt. Es ist demnach:

$$E_n = \frac{W_1 - w_1}{\frac{L}{V}} = \frac{V\,(W_1 - w_1)}{L}$$

Setzt man für W_1 und w_1 ihre Werthe, so wird:

$$E_n = A\,p\,V \left\{ \begin{array}{l} \frac{L_1}{L} + \frac{L_1}{L} \frac{1 - \left(\frac{L_1}{L}\right)^{\mu - 1}}{\mu - 1} - \frac{\mathfrak{A}}{p} \\ - \frac{a\,l\,\mathfrak{A}}{A\,L\,p}\,\frac{\mu}{\mu - 1} \left[\left(\frac{p}{\mathfrak{A}}\right)^{\frac{\mu - 1}{\mu}} - 1 \right] \end{array} \right\}$$

oder wegen (15):

$$E_n = A\,V\,p\left\{\begin{array}{l}\dfrac{L_1}{L} + \dfrac{L_1}{L}\,\dfrac{1-\left(\dfrac{L_1}{L}\right)^{\mu-1}}{\mu-1} - \dfrac{\mathfrak{A}}{p}\\[2ex] -\dfrac{L_1}{L}\,\dfrac{1+\alpha t}{1+\alpha t_1}\,\dfrac{\mu}{\mu-1}\left[\left(\dfrac{p}{\mathfrak{A}}\right)^{\frac{\mu-1}{\mu}}-1\right]\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (17)$$

Vermöge der Bedeutung des Zeichens R ist auch $E_n = R\,A\,V$, demnach:

$$R = p\left\{\begin{array}{l}\dfrac{L_1}{L} - \dfrac{L_1}{L}\,\dfrac{1-\left(\dfrac{L_1}{L}\right)^{\mu-1}}{\mu-1} - \dfrac{\mathfrak{A}}{p}\\[2ex] -\dfrac{L_1}{L}\,\dfrac{1+\alpha t}{1+\alpha t_1}\,\dfrac{\mu}{\mu-1}\left[\left(\dfrac{p}{\mathfrak{A}}\right)^{\frac{\mu-1}{\mu}}-1\right]\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (18)$$

Dieser Ausdruck bestimmt also den mittleren Werth R des nützlichen Widerstandes oder wenn R gegeben wäre, die Spannung p der Luft im Calorifer.

Wenn es sich um eine neu zu erbauende Maschine handelt, ist als gegeben anzusehen E_n, p, V u. s. f., zu suchen A, a, F.

Aus (17) folgt:

$$A = \frac{\dfrac{E_n}{V\,p}}{\left\{\begin{array}{l}\dfrac{L_1}{L} + \dfrac{L_1}{L}\,\dfrac{1-\left(\dfrac{L_1}{L}\right)^{\mu-1}}{\mu-1} - \dfrac{\mathfrak{A}}{p}\\[2ex] -\dfrac{L_1}{L}\,\dfrac{1+\alpha t}{1+\alpha t_1}\,\dfrac{\mu}{\mu-1}\left[\left(\dfrac{p}{\mathfrak{A}}\right)^{\frac{\mu-1}{\mu}}-1\right]\end{array}\right\}} \quad \ldots \quad (19)$$

Aus (15) ergibt sich dann ferner

$$a = A\,\frac{p}{\mathfrak{A}}\,\frac{1+\alpha t}{1+\alpha t_1}\left(\frac{L_1}{L}\right)\frac{L}{l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

$$q = \frac{a\,v\,\gamma_0}{1+\alpha t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

wobei q die in jeder Sekunde zu erwärmende Luftmenge bedeutet, v die Geschwindigkeit des Pumpenkolbens in einer Sekunde. Zur

Bestimmung der Heizfläche des Calorifers hat man, vorausgesetzt dass derselbe als Gegenstromapparat angeordnet wird,

$$F_g = \frac{1}{k} \frac{\text{lognat} \frac{T_0 - t_1}{T_1 - t_0}}{\frac{1}{Q\,S} - \frac{1}{q\,s}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

$$Q\,S = q\,s \frac{t_1 - t_0}{T_0 - T_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Die verschiedenen Temperaturzustände der Luft werden durch Gleichung (2) bestimmt.

Es ist:

$$t_0 = \left(t + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{p}{\mathfrak{A}}\right)^{\mu - 1} - \frac{1}{\alpha} \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

Den Temperaturunterschied $t_1 - t_0$ hat man durch die Anlage des Calorifers ganz in seiner Macht. Wenn man die Heizfläche gross genug nimmt und hinreichend Brennstoff verbrennt, kann man eine beliebige Luftmenge beliebig erhitzen.

Für die Temperatur $\mathfrak{T}$, die am Ende der Expansion vorhanden ist, hat man:

$$\mathfrak{T} = \left(t_1 + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{L_1}{L}\right)^{\mu - 1} - \frac{1}{\alpha} \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

Nennt man endlich p_1 die Spannung am Ende der Expansion, so ist wegen (1):

$$p_1 = p\left(\frac{L_1}{L}\right)^{\mu} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Maximalverhältnisse. Die Lufterhitzung $t_1 - t_0$ und die Expansion $\left(\frac{L_1}{L}\right)$ sind von einander ganz unabhängig. Wir wollen die vortheilhaftesten Werthe dieser Grössen zu bestimmen suchen.

Die vortheilhafteste Expansion ist offenbar diejenige, bei welcher die Spannkraft der Luft hinter dem Treibkolben am Ende der Expansion glei $\mathfrak{A}$ wird, d. h. wenn $p_1 = \mathfrak{A}$ gesetzt wird. Dann ist aber vermöge (26)

$$\frac{\mathfrak{A}}{p} = \left(\frac{L_1}{L}\right)^{\mu} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

und:

$$\left(\frac{p}{\mathfrak{A}}\right)^{\frac{\mu - 1}{\mu}} = \left(\frac{L}{L_1}\right)^{\mu - 1}$$