Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1863

Das Schwungrad für Woolf'sche Maschinen

urn:nbn:de:bsz:31-270981

Nun ist auch hier wieder zu setzen:

$$\left.\begin{aligned} Q\,\frac{2\,\varrho\,\pi\,n}{60} &= 75\,N \\ \mu &= \frac{G}{2\,g}\,R^2 \\ W^2 - w^2 &= \frac{2\,\mathfrak{G}^2}{i} \\ R\,\mathfrak{G} &= C \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (16)$$

Daher findet man schliesslich:

$$G = 30 \times 75 \times g\,\frac{i\,N}{n\,C^2}\left[\frac{\binom{k}{l_1\,x_2} - \frac{x_1}{l} - \left(\frac{x_2}{l} - \frac{x_1}{l}\right)\frac{\alpha + \beta\,r}{\alpha + \beta\,p}}{\binom{k}{l\,l_1} - \frac{\alpha + \beta\,r}{\alpha + \beta\,p}} - \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{180}\right] \quad (17)$$

wodurch das Gewicht des Schwungrades bestimmt ist.

Das Schwungrad für Woolf'sche Maschinen. Wir wollen uns erlauben, den Einfluss des schädlichen Raumes und das Volumen des Verbindungsrohres zwischen den beiden Cylindern zu vernachlässigen. Dieser Einfluss ist von keinem Belang, veranlasst jedoch einen sehr komplizirten Gang der Rechnung.

Wir nennen O und o die Cylinderquerschnitte, L, l die Schublängen der beiden Kolben, $\varrho = \frac{L}{2}$ den Kurbelhalbmesser.

Wenn der Niedergang der Kolben beginnt, ist der kleine Cylinder mit Kesseldampf gefüllt, ist also in demselben unterhalb des Kolbens eine Dampfmenge von $o\,l\,(\alpha + \beta\,p)$ Kilogramm enthalten. Nachdem der kleine Kolben eine Weglänge x nach abwärts zurückgelegt hat, ist der grosse Kolben um $\frac{L}{l}\,x$ niedergegangen. Da wir die schädlichen Räume und den Rauminhalt des Verbindungsrohres vernachlässigen, ist obige Dampfmenge in einem Raum

$$o\,(l - x) + O\,\frac{L}{l}\,x = o\,l + x\left(O\,\frac{L}{l} - o\right) = o\,l + o\,x\left(\frac{O\,L}{o\,l} - 1\right)$$

enthalten, wenn der kleine Kolben den Weg x zurückgelegt hat. Nennen wir y die Spannkraft dieses Dampfes, so hat man:

$$o\,l\,(\alpha + \beta\,p) = \left[o\,l + o\,x\left(\frac{O\,L}{o\,l} - 1\right)\right](\alpha + \beta\,y)$$

Hieraus folgt:

$$y = \left(\frac{\alpha}{\beta} + p\right) \frac{1}{1 + \frac{x}{l}\left(\frac{O\,L}{o\,l} - 1\right)} - \frac{\alpha}{\beta} \quad . \; . \quad (1)$$

Nun sind $\int_0^\xi o\,(p-y)\,d\,x$ und $\int_0^\xi O\,(y-r)\,\frac{L}{l}\,d\,x$ die nützlichen Wirkungen, welche die beiden Kolben vom Anfange des Schubes an bis zu dem Moment hin entwickeln, wenn der kleine Kolben einen Weg ξ zurückgelegt hat; ist ferner $Q\,\varrho\,\varphi$ die Wirkung, welche der Ueberwindung des nützlichen Widerstandes entspricht, und ist endlich $\mu\,(\omega^2 - \omega_0{}^2)$ die Aenderung der lebendigen Kraft des Schwungrades. Vermöge des Prinzipes der Thätigkeit der Kräfte hat man demnach:

$$\int_0^\xi o\,(p-y)\,d\,x + \int_0^\xi O\,(y-r)\,\frac{L}{l}\,d\,x - Q\,\varrho\,\varphi = \mu\,(\omega^2 - \omega_0{}^2) \quad . \quad (2)$$

oder

$$\int_0^\xi \left(o\,p - O\,r\,\frac{L}{l}\right) d\,x + \int_0^\xi \left(O\,\frac{L}{l} - o\right) y\,d\,x - Q\,\varrho\,\varphi = \mu\,(\omega^2 - \omega_0{}^2) \quad (3)$$

oder wenn man für y seinen Werth einführt:

$$\left\{\begin{aligned} &\int_0^\xi \left(o\,p - O\,r\,\frac{L}{l}\right) d\,x \\ &+\int_0^\xi \left(O\,\frac{L}{l} - o\right)\left[\frac{\frac{\alpha}{\beta} + p}{1 + \frac{x}{l}\left(\frac{O\,L}{o\,l} - 1\right)} - \frac{\alpha}{\beta}\right] d\,x - Q\,\varrho\,\varphi \\ &= \mu\,(\omega^2 - \omega_0{}^2) \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Durch Ausführung der Integrationen folgt:

$$\left(o\,p - O\,r\,\frac{L}{l}\right)\xi + o\,l\left(\frac{\alpha}{\beta} + p\right) \text{lognat}\left[1 + \frac{\xi}{l}\left(\frac{O\,L}{o\,l} - 1\right)\right]$$
$$- o\left(\frac{O\,L}{o\,l} - 1\right)\frac{\alpha}{\beta}\,\xi - Q\,\varrho\,\varphi = \mu\,(\omega^2 - \omega_0{}^2)$$

oder

$$\left\{\begin{aligned} &o\,l\left[\left(\frac{\alpha}{\beta} + p\right) - \frac{O\,L}{o\,l}\left(\frac{\alpha}{\beta} + r\right)\right]\frac{\xi}{l} \\ &+ o\,l\left(\frac{\alpha}{\beta} + p\right) \text{lognat}\left[1 + \frac{\xi}{l}\left(\frac{O\,L}{o\,l} - 1\right)\right] - Q\,\varrho\,\varphi = \mu\,(\omega^2 - \omega_0{}^2) \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Dehnt man dieses Integrale aus bis $\xi = 1$, so ist zu setzen: für $\varphi = \pi$ und wegen des Beharrungszustandes $\omega = \omega_0$, daher folgt:

$$o\,l\left[\left(\frac{\alpha}{\beta} + p\right)\left(1 + \text{lognat}\,\frac{O\,L}{o\,l}\right) - \frac{O\,L}{o\,l}\left(\frac{\alpha}{\beta} + r\right)\right] = Q\,\varrho\,\pi \quad (6)$$

Diese Gleichung bestimmt die im Beharrungszustand vorhandene Dampfspannung.

Differenzirt man die Gleichung (5) nach φ und setzt $\frac{d\,\omega^2}{d\,\varphi} = 0$, so ergibt sich eine Gleichung, welche die Werthe von φ bestimmt, die dem Maximum und Minimum der Winkelgeschwindigkeit entsprechen. Bei dieser Differenziation ist zu beachten, dass

$$\xi = \frac{1}{2}\,(1 - \cos\varphi) \quad d\,\xi = \frac{1}{2}\sin\varphi\;d\,\varphi$$

ist. Man erhält daher:

$$\left\{\begin{array}{l} o\,l\left[\left(\frac{\alpha}{\beta} + p\right) - \frac{O\,L}{o\,l}\left(\frac{\alpha}{\beta} + r\right)\right]\frac{1}{l} \\ + o\,l\left(\frac{\alpha}{\beta} + p\right)\dfrac{\frac{1}{l}\left(\frac{O\,L}{o\,l} - 1\right)}{1 + \frac{\xi}{l}\left(\frac{O\,L}{o\,l} - 1\right)} \end{array}\right\}\frac{1}{2}\sin\varphi - Q\,\varrho = 0$$

oder

$$o\,l\left\{\left(\frac{\alpha}{\beta} + p\right)\left[1 + \frac{\frac{O\,L}{o\,l} - 1}{1 + \frac{\xi}{l}\left(\frac{O\,L}{o\,l} - 1\right)}\right] - \frac{O\,L}{o\,l}\left(\frac{\alpha}{\beta} + r\right)\right\}\frac{\sin\varphi}{2} - Q\,\varrho = 0$$

Hieraus folgt, wenn man für $Q\,\varrho$ den Werth einführt, welchen die Gleichung (6) darbietet:

$$\sin\varphi = \frac{2}{\pi}\,\frac{1 + \text{lognat}\,\frac{O\,L}{o\,l} - \frac{O\,L}{o\,l}\,\frac{\alpha + \beta\,r}{\alpha + \beta\,p}}{1 + \dfrac{\frac{O\,L}{o\,l} - 1}{1 + \frac{\xi}{l}\left(\frac{O\,L}{o\,l} - 1\right)} - \frac{O\,L}{o\,l}\,\frac{\alpha + \beta\,r}{\alpha + \beta\,p}} \quad . \quad . \quad (7)$$

in dieser Gleichung ist zu setzen:

$$\xi = \frac{1}{2}\,(1 - \cos\varphi)$$

Nennen wir φ_1 und φ_2 die zwei zwischen 0 und π liegenden Wurzeln dieser Gleichung und nennen x_1 und x_2 die Werthe von ξ, welche diesen Wurzeln entsprechen, so dass also ist:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}(1-\cos\varphi_1) \\ x_2 &= \frac{1}{2}(1-\cos\varphi_2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Die kleine Wurzel φ_1 entspricht dem Minimum w, die grössere φ_2 dem Maximum W der Winkelgeschwindigkeit.

Der Gleichung (5) muss entsprochen werden, wenn wir setzen: statt ξ, φ, ω: x_1, φ_1, w und x_2, φ_2, W. Wir erhalten daher:

$$\left.\begin{aligned} &o\,l\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}+p\right)-\frac{O\,L}{o\,l}\left(\frac{\alpha}{\beta}+r\right)\right]\frac{x_1}{l} \\ &+o\,l\left(\frac{\alpha}{\beta}+p\right)\text{lognat}\left[1+\frac{x_1}{l}\left(\frac{O\,L}{o\,l}-1\right)\right]-Q\,\varrho\,\varphi_1=\mu\,(w^2-\omega_0{}^2) \\ &o\,l\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}+p\right)-\frac{O\,L}{o\,l}\left(\frac{\alpha}{\beta}+r\right)\right]\frac{x_2}{l} \\ &+o\,l\left(\frac{\alpha}{\beta}+p\right)\text{lognat}\left[1+\frac{x_2}{l}\left(\frac{O\,L}{o\,l}-1\right)\right]-Q\,\varrho\,\varphi_2=\mu\,(W^2-\omega_0{}^2) \end{aligned}\right\} (9)$$

Die Differenz dieser Gleichungen gibt:

$$o\,l\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}+p\right)-\frac{O\,L}{o\,l}\left(\frac{\alpha}{\beta}+r\right)\right]\frac{x_2-x_1}{l}$$

$$+o\,l\left(\frac{\alpha}{\beta}+p\right)\text{lognat}\,\frac{1+\frac{x_2}{l}\left(\frac{O\,L}{o\,l}-1\right)}{1+\frac{x_1}{l}\left(\frac{O\,L}{o\,l}-1\right)}-Q\,\varrho\,(\varphi_2-\varphi_1)=\mu\,(W^2-w^2)$$

oder auch:

$$Q\,\varrho\left\{\frac{\left\{\begin{aligned} &o\,l\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}+p\right)-\frac{O\,L}{o\,l}\left(\frac{\alpha}{\beta}+r\right)\right]\frac{x_2-x_1}{l} \\ &+o\,l\left(\frac{\alpha}{\beta}+p\right)\text{lognat}\,\frac{1+\frac{x_2}{l}\left(\frac{O\,L}{o\,l}-1\right)}{1+\frac{x_1}{l}\left(\frac{O\,L}{o\,l}-1\right)} \end{aligned}\right\}}{Q\,\varrho}-(\varphi_2-\varphi_1)\right\}=\mu\,(W^2-w^2)$$

Setzt man in den Nenner für $Q\,\varrho$ den Werth, welchen (6) darbietet, so wird:

$$Q\,\varrho\,\pi\left\{\frac{\left(1-\frac{O\,L}{o\,l}\,\frac{\alpha+\beta\,r}{\alpha+\beta\,p}\right)\frac{x_2-x_1}{l}+\text{lognat}\,\frac{1+\frac{x_2}{l}\left(\frac{O\,L}{o\,l}-1\right)}{1+\frac{x_1}{l}\left(\frac{O\,L}{o\,l}-1\right)}}{1-\frac{O\,L}{o\,l}\,\frac{\alpha+\beta\,r}{\alpha+\beta\,p}+\text{lognat}\,\frac{O\,L}{o\,l}}-\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\pi}\right\}$$

$$=\mu\,(W^2-w^2)\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(10)$$

Nun kann man auch hier setzen:

$$\left.\begin{aligned} Q\,\frac{2\,\varrho\,\pi\,n}{60} &= 75\ N \\ \mu &= \frac{G}{2\,g}\,R^2 \\ W^2 - w^2 &= \frac{2\,\mathfrak{G}^2}{i} \\ R\,\mathfrak{G} &= C \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

(R Halbmesser des Schwungrades, n Umdrehungen der Kurbelwelle in einer Minute, G Gewicht des Schwungringes, $\mathfrak{G}$ mittlere Winkelgeschwindigkeit des Schwungrades, C mittlere Geschwindigkeit des Schwungringes). Und dann findet man:

$$G = 30 \times 75 \times g\,\frac{i\,N}{n\,C^2} \times$$

$$\left\{\frac{\left(1 - \frac{OL}{ol}\,\frac{\alpha+\beta\,r}{\alpha+\beta\,p}\right)\frac{x_2 - x_1}{l} + \text{lognat}\,\dfrac{1 + \frac{x_2}{l}\left(\frac{OL}{ol} - 1\right)}{1 + \frac{x_1}{l}\left(\frac{OL}{ol} - 1\right)}}{1 - \frac{OL}{ol}\,\frac{\alpha+\beta\,r}{\alpha+\beta\,p} + \text{lognat}\,\frac{OL}{ol}} - \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi}\right\} \quad (12)$$

wodurch nun abermals das Gewicht des Schwungrades bestimmt ist.

Das Schwungrad mit Berücksichtigung der endlichen Länge der Schubstange und der hin- und hergehenden Massen. Wir wollen auch noch die Theorie des Schwungrades mit Berücksichtigung der endlichen Länge der Schubstange und der hin- und hergehenden Massen behandeln, wollen jedoch eine nicht expandirende Maschine mit einem Cylinder voraussetzen.

Es sei, Tafel XXVIII., Fig. 9, ϱ der Halbmesser der Kurbel, $\lambda = AB$ die Länge der Schubstange, φ und ψ die Winkel, welche in irgend einem Zeitmoment die Kurbel und die Schubstange mit der Bewegungsrichtung des Kolbens bilden, $AC = x$ die Entfernung des Gleitstückes A von der Kurbelaxe C. Dies vorausgesetzt, ist zunächst:

$$\left.\begin{aligned} \varrho \sin\varphi &= \lambda \sin\psi \\ x &= \varrho\cos\varphi + \lambda\cos\psi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Hieraus folgt: