Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1863

Theorie der Schwungräder

kann. Von der Richtigkeit des so eben Gesagten wird man sich überzeugen, wenn man bedenkt, dass bei einem solchen Hall'schen Condensator der Unterschied der Temperatur des Dampfes und des Condensationswassers ungefähr 100° beträgt, während bei einem Dampfkessel die mittlere Temperatur der Verbrennungsgase um circa 500° grösser ist, als jene des Wassers im Kessel, die Abkühlungsfläche der Röhren des Condensators muss demnach ungefähr 5 mal so gross ausfallen, als die Heizfläche des Kessels der Maschine, man würde also dem Condensator pro 1 Pferdekraft der Maschine $5 \times 1{\cdot}5 = 7{\cdot}5^{qm}$ Abkühlungsfläche zu geben haben. Diese kaum realisirbare Grösse der Abkühlungsfläche ist wohl der Grund, dass diese Hall'schen Condensatoren, welche nach ihrer Erfindung bei Marine-Maschinen häufig angewendet wurden, nun ausser Gebrauch gekommen sind. Für derlei Maschinen wäre die Condensation des Dampfes durch blosse Abkühlung der Röhrenwände von grossem Vortheil, weil zur Speisung des Kessels süsses Wasser, zur Abkühlung der Condensationsröhren dagegen salziges Meerwasser genommen werden kann.

Theorie der Schwungräder.

Einleitung. Die Bewegung des Schwungrades einer Dampfmaschine kann nicht gleichförmig sein, indem vermöge der Kurbel Kraft und Widerstand wohl in einzelnen Momenten, nie aber dauernd im Gleichgewicht sind. Die Ungleichförmigkeit der Schwungradsbewegung kann jedoch durch eine hinreichende Grösse des Schwungrades in beliebige Grenzen eingeschlossen werden, und die Aufgabe, welche die Theorie des Schwungrades zu lösen hat, besteht vorzugsweise in der Bestimmung des Trägheitsmomentes, welches das Schwungrad besitzen muss, damit dessen Bewegung innerhalb vorgeschriebener Grenzen bleibt.

Die Theorie des Schwungrades führt zu äusserst verwickelten Rechnungen, wenn man den höchsten Grad von Genauigkeit verlangt, wir begnügen uns daher mit einer Annäherung, indem wir den Einfluss der hin und her gehenden Massen des Kolbens, der Kolbenstange, der Schubstangen und (bei Balancier-Maschinen) des Balanciers vernachlässigen und ferner die Schubstange unendlich lang annehmen, also eine reine Sinus-Versus-Bewegung der Kolben voraussetzen. Die Resultate, welche wir unter diesen Beschränkungen erhalten, sind wenigstens für praktische Zwecke hinreichend genau.

Das Schwungrad für Maschinen mit einem Cylinder mit nicht expandirendem Dampf. Wir wollen unserer Berechnung eine horizontal liegende Maschine zu Grunde legen.

Nennen wir:

P die constante Kraft, mit welcher im Beharrungszustand der Bewegung der Kolben getrieben wird,

Q den constanten auf den Kurbelkreis reduzirten nützlichen Widerstand der Arbeitsmaschinen, die durch die Dampfmaschine getrieben werden,

ϱ den Halbmesser der Kurbel,

φ den Winkel, den in irgend einem Augenblick die Kurbelrichtung mit der Bewegungsrichtung des Kolbens bildet, Tafel XXVIII., Fig. 7,

ω_0 und ω die Winkelgeschwindigkeiten des Schwungrades für $\varphi = 0$ und für $\varphi = \varphi$,

μ das als Masse ausgedrückte Trägheitsmoment des Schwungrades,

G das Gewicht des Schwungringes,

C die mittlere Geschwindigkeit des Schwungringes.

Während der Winkel φ zurückgelegt wird, schreitet der Kolben um $\varrho\,(1 - \cos\varphi)$ vorwärts, entwickelt demnach die Kraft P eine Wirkungsgrösse $P\,\varrho\,(1 - \cos\varphi)$, gleichzeitig wird aber der Widerstand Q durch einen Weg $\varrho\,\varphi$ überwunden, wird also eine Wirkunngsgrösse $Q\,\varrho\,\varphi$ konsumirt. Die lebendige Kraft des Schwungrades ist: für $\varphi = 0$, $\mu\,\omega_0^2$; für $\varphi = \varphi$, $\mu\,\omega^2$. Die Aenderung der lebendigen Kraft ist demnach, während der Winkel φ zurückgelegt wird: $\mu\,(\omega^2 - \omega_0^2)$. Da wir die hin und her gehenden Massen und selbst auch die Massen der ganzen Arbeitsmaschine vernachlässigen, so erhalten wir vermöge des Prinzipes der Thätigkeit folgende Gleichung:

$$P\,\varrho\,(1 - \cos\varphi) - Q\,\varrho\,\varphi = \mu\,(\omega^2 - \omega_0^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Im Beharrungszustand der Bewegung muss für $\varphi = \pi$, $\omega = \omega_0$ werden, indem nach jedem Kolbenschub diejenige Winkelgeschwindigkeit wieder eintreten muss, welche am Anfang des Schubes vorhanden ist. Aus (1) folgt für $\varphi = \pi$ und $\omega = \omega_0$:

$$2\,P = Q\,\pi, \quad P = \frac{\pi}{2}\,Q \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Dieser Werth von P ist derjenige Kolbendruck, der im Beharrungszustand von selbst eintritt. Führt man diesen Werth von P in (1) ein, so erhält man:

$$Q\,\varrho\left[\frac{\pi}{2}\,(1 - \cos\varphi) - \varphi\right] = \mu\,(\omega^2 - \omega_0^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Diese Gleichung gilt für den Beharrungszustand und sie gibt für jeden Werth von φ die entsprechende Winkelgeschwindigkeit.

Innerhalb $\varphi = o$ und $\varphi = \pi$ kommt ein Minimum und ein Maximum der Winkelgeschwindigkeit vor, und man erhält die Werthe von φ, welche dem Minimum und dem Maximum entsprechen, wenn man (3) differenzirt und $\frac{d\,\omega^2}{d\,\varphi} = o$ setzt. Man findet:

$$\frac{\pi}{2} \sin \varphi - 1 = o$$

$$\sin \varphi = \frac{2}{\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Nennt man α den kleinsten Werth von φ, für welchen $\sin \varphi$ gleich $\frac{2}{\pi}$ wird, so findet man:

$$\alpha^0 = 39^0 + 32' + 25'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

und der grössere Winkel, für welchen ebenfalls $\sin \varphi$ gleich $\frac{2}{\pi}$ wird, ist dann:

$$180^0 - \alpha^0 = 180 - (39^0 + 32' + 25'') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Es ist klar, dass der erstere dieser Winkel dem Minimum, der letztere dagegen dem Maximum der Winkelgeschwindigkeit entspricht, denn so lange φ sehr klein ist, genügt die treibende Kraft nicht, um den Widerstand zu überwinden, muss also die Winkelgeschwindigkeit abnehmen.

Nennen wir nun w und W die kleinste und grösste Winkelgeschwindigkeit, so muss der Gleichung (3) entsprochen werden, sowohl wenn man $\varphi = \alpha$ und $\omega = w$ setzt, als auch, wenn man $\varphi = \pi - \alpha$ und $\omega = W$ nimmt. Wir erhalten demnach:

$$Q\,\varrho \left[\frac{\pi}{2}(1 - \cos \alpha) - \alpha\right] = \mu\,(w^2 - \omega_0^2)$$

$$Q\,\varrho \left\{\frac{\pi}{2}\left[1 - \cos\,(\pi - \alpha)\right] - (\pi - \alpha)\right\} = \mu\,(W^2 - \omega_0^2)$$

Die Differenz dieser Ausdrücke gibt:

$$Q\,\varrho\,(\pi \cos \alpha - \pi + 2\,\alpha) = \mu\,(W^2 - w^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Nun ist $\frac{2\,\varrho\,\pi\,n}{60}$ die mittlere Geschwindigkeit des Kurbelzapfens (wobei n die Anzahl der Umdrehungen der Kurbel in einer Minute bedeutet), demnach:

$$\frac{2\,\varrho\,\pi\,n}{60}\,Q = 75\,N \quad \text{oder} \quad Q\,\varrho = \frac{60 \times 75\,N}{2\,\pi\,n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

(N die Pferdekraft der Maschine).

Ferner ist annähernd, wenn man die Masse der Arme des Schwungrades vernachlässiget:

$$\mu = \frac{G}{2\,g}\,R^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

(R Halbmesser des Schwungrades).

Endlich kann man $W^2 - w^2$ auf folgende Weise ausdrücken: Nennt man $\mathfrak{G}$ die mittlere Winkelgeschwindigkeit, so kann man setzen: $\frac{1}{2}(W + w) = \mathfrak{G}$ und $W - w = \frac{\mathfrak{G}}{i}$, wobei i eine Zahl ist, welche den Gleichförmigkeitsgrad der Bewegung misst. Hieraus folgt:

$$W^2 - w^2 = (W + w)(W - w) = \frac{2}{i}\,\mathfrak{G}^2 \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Führt man (8), (9), (10) in (7) ein, so folgt:

$$G = 30 \times 75 \times g \left(\cos\alpha + \frac{2\,\alpha - \pi}{\pi}\right) \frac{N\,i}{n\,C^2} \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Setzen wir $\alpha^0 = 39^0 + 32' + 25''$, $\pi = 3{\cdot}142$, $g = 9\,808$, so folgt:

$$G = 4645\,\frac{N\,i}{n\,C^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Schwungräder für zwei gekuppelte nicht expandirende Maschinen. Wir nennen P die Kraft, mit welcher jeder der beiden Kolben getrieben wird, Q den auf den Kurbelkreis reduzirten nützlichen Widerstand, welchen die beiden Maschinen zusammen zu überwinden haben, N die Pferdekraft der beiden Maschinen zusammen.

Während der Winkel $\widehat{ACB} = \varphi$, Tafel XXVIII., Fig. 8, zurückgelegt wird, schreitet der eine der beiden Kolben um $AF = \varrho(1 - \cos\varphi)$, der andere um $DE = \varrho \sin\varphi$ vorwärts, wird der Widerstand Q durch einen Weg $\widehat{AB} = \varrho\,\varphi$ überwunden und ändert sich die lebendige Kraft des Schwungrades um $\mu(\omega^2 - \omega_0^2)$. Nach dem Prinzip der Thätigkeit der Kräfte hat man also die Gleichung

$$P\,[\varrho\,(1 - \cos\varphi) + \varrho \sin\varphi] - Q\,\varrho\,\varphi = \mu\,(\omega^2 - \omega_0^2) \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Im Beharrungszustand der Bewegung muss bei diesen gekuppelten Maschinen für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bereits die Geschwindigkeit eintreten, welche bei $\varphi = o$ vorhanden war, d. h. es muss für $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\omega = \omega_0$ werden. Demnach erhalten wir aus (1):

$$P \varrho (1 - \cos \pi + \sin \pi) - Q \varrho \frac{\pi}{2} = o$$

oder

$$P = \frac{\pi}{4} Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Führt man diesen Werth in (1) ein, so folgt:

$$Q \varrho \left[\frac{\pi}{4} (\sin \varphi - \cos \varphi + 1) - \varphi \right] = \mu (\omega^2 - \omega_0^2) \quad . \quad . \quad (3)$$

Die Werthe von φ, für welche ω^2 ein Maximum oder ein Minimum wird, ergeben sich, wenn man diese Gleichung (3) differenzirt und $\frac{d (\omega^2)}{d \varphi} = o$ setzt. Man findet:

$$\frac{\pi}{4} (\cos \varphi + \sin \varphi) - 1 = o$$

Es ist aber $\sin \varphi + \cos \varphi = \sqrt{1 + \sin 2 \varphi}$. Demnach folgt:

$$\sqrt{1 + \sin 2 \varphi} = \frac{4}{\pi}, \quad \sin 2 \varphi = \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 - 1 \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Nennt man α den kleinsten Werth von φ, welcher diesem Ausdruck entspricht, so ist:

$$\alpha^0 = 19^0 + 10' + 30'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

und ist der zweite (innerhalb o und 90^0) liegende Werth von φ, welcher der Gleichung (4) genügt:

$$90^0 - \alpha^0 = 70^0 + 49' + 30''$$

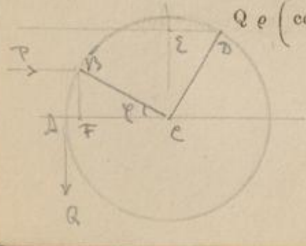
Der Winkel α entspricht dem Minimum w der Winkelgeschwindigkeit, der Winkel $\frac{\pi}{2} - \alpha$ dem Maximum W. Aus (3) folgt, wenn man $\varphi = \alpha$ und $\omega = w$, ferner $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$ und $\omega = W$ setzt,

$$Q \varrho \left[\frac{\pi}{4} (\sin \alpha - \cos \alpha + 1) - \alpha \right] = \mu (w^2 - \omega_0^2)$$

$$Q \varrho \left\{ \frac{\pi}{4} \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + 1 \right] - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right\} = \mu (W^2 - \omega_0^2)$$

Die Differenz dieser Gleichungen gibt:

$$Q \varrho \left(\cos \alpha - \sin \alpha - 1 + \frac{4 \alpha}{\pi} \right) \frac{\pi}{2} = \mu (W^2 - w^2) \quad . \quad . \quad (6)$$



Setzt man auch hier, wie früher Seite 555

$$Q \frac{2 \varrho \pi n}{60} = 75 \text{ N}$$

$$\mu = \frac{G}{2 g} R^2$$

$$W^2 - w^2 = \frac{2 \mathfrak{G}^2}{i}, \quad R \mathfrak{G} = C$$

so findet man:

$$G = \frac{60 \times 75 \text{ g}}{4} \left(\cos \alpha - \sin \alpha - 1 + \frac{4 \alpha}{\pi} \right) \frac{N i}{n C^2} \quad . \quad . \quad (7)$$

Nun ist $\sin \alpha = 0{\cdot}3284$, $\cos \alpha = 0{\cdot}9444$, $\frac{4 \alpha}{\pi} = 0{\cdot}4261$, daher wird:

$$G = 464{\cdot}5 \frac{N i}{n C^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Vergleicht man diesen Werth mit jenem, welcher Seite 555 für einfache Maschinen gefunden wurde, so ersieht man, dass das Gewicht des Schwungrades der Maschine mit zwei gekuppelten Cylindern *zehn* mal leichter sein darf, als das Schwungrad einer einfachen Maschine von gleicher Kraft. Hieraus ergibt sich der sehr praktische Vortheil der Doppelmaschinen, indem mit einem verhältnissmässig sehr leichten Schwungrad eine sehr hohe Gleichförmigkeit der Bewegung erzielt werden kann.

Das Schwungrad für Expansionsmaschinen mit einem Cylinder. Nennen wir y die Pressung des Dampfes auf einen Quadratmeter der Kolbenfläche, nachdem der Kolben einen Weg $x > l_1$ zurückgelegt hat. Wenn die Absperrung eintritt, ist das Volumen des eingeschlossen Dampfes $O l_1 + m O l$ und seine Spannkraft gleich p, mithin $O (l_1 + m l) (\alpha + \beta p)$ das Gewicht der eingeschlossenen Dampfmenge. Nachdem der Kolben einen Weg $x > l_1$ zurückgelegt hat, ist die eingeschlossene Dampfmenge $O (x + m l) (\alpha + \beta y)$. Man hat daher:

$$O (l_1 + m l) (\alpha + \beta p) = O (x + m l) (\alpha + \beta y)$$

Hieraus folgt:

$$y = \left(\frac{\alpha}{\beta} + p \right) \frac{l_1 + m l}{x + m l} - \frac{\alpha}{\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

So lange $x <$ als l_1 ist, ist die Gleichung der Bewegung:

$$O (p - r) x - Q \varrho \varphi = \mu (\omega^2 - \omega_0^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Von $x = l_1$ an bis $x = l$ ist dagegen die Gleichung der Bewegung des Schwungrades

$$O p l_1 + \int_{l_1}^{x} O y\, d x - O r x - Q \varrho \varphi = \mu (\omega^2 - \omega_0^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

oder wenn man für y seinen Werth aus (1) einführt:

$$O p l_1 + O \int_{l_1}^{x} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} + p \right) \frac{l_1 + m l}{x + m l} - \frac{\alpha}{\beta} \right] d x - O r x - Q \varrho \varphi = \mu (\omega^2 - \omega_0^2) \quad (4)$$

oder wenn man die angedeutete Integration ausführt:

$$\begin{aligned} O p l_1 + O \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} + p \right) (l_1 + m l) \operatorname{lognat} \frac{x + m l}{l_1 + m l} - \frac{\alpha}{\beta} (x - l_1) \right] & \\ - O r x - Q \varrho \varphi = \mu (\omega^2 - \omega_0^2) & \quad . \quad (5) \end{aligned}$$

Setzt man hier $\varphi = \pi$ und $x = l$, so muss wegen des Beharrungszustandes $\omega = \omega_0$ gesetzt werden; man erhält demnach:

$$\begin{aligned} O p l_1 + O \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} + p \right) (l_1 + m l) \operatorname{lognat} \frac{l + m l}{l_1 + m l} - \frac{\alpha}{\beta} (l - l_1) \right] & \\ - O r l - Q \varrho \pi = o & \end{aligned}$$

oder wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\binom{k}{l l_1} = \frac{l_1}{l} + \left(\frac{l_1}{l} + m \right) \operatorname{lognat} \frac{l + m l}{l_1 + m l} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$O l \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} + p \right) \binom{k}{l l_1} - \left(\frac{\alpha}{\beta} + r \right) \right] = Q \varrho \pi \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Diese Gleichung bestimmt die im Beharrungszustand eintretende Dampfspannung.

Nun müssen die Werthe von φ bestimmt werden, für welche die Winkelgeschwindigkeit des Schwungrades ein Minimum und ein Maximum wird. Das Minimum der Winkelgeschwindigkeit fällt vor den Eintritt der Expansion. Der Winkel φ_1, bei welchem das Minimum eintritt, wird daher aus (2) gefunden, wenn man diese Gleichung differenzirt und $\frac{d\,\omega^2}{d\,\varphi} = o$ setzt.

Man findet daher, wenn man berücksichtiget, dass $x = \varrho (1 - \cos \varphi)$, $d x = \varrho \sin \varphi \, d \varphi$ ist:

$$O (p - r) \varrho \sin \varphi_1 - Q \varrho = o$$

Hieraus folgt:

$$\sin \varphi_1 = \frac{Q \varrho}{O (p - r) \varrho} = \frac{Q \varrho}{O \left[\frac{\alpha}{\beta} + p - \left(\frac{\alpha}{\beta} + r \right) \right] \varrho}$$

Setzt man für $Q\varrho$ den Werth, welchen die Gleichung (6) darbietet, so findet man:

$$\sin\varphi_1 = \frac{\frac{O\,l}{\pi}\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}+p\right)\left(\frac{k}{1\,l_1}\right)-\left(\frac{\alpha}{\beta}+r\right)\right]}{O\,\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}+p\right)-\left(\frac{\alpha}{\beta}+r\right)\right]}$$

oder auch, wenn man mit $\frac{\alpha}{\beta}+p$ dividirt:

$$\sin\varphi_1 = \frac{2}{\pi}\,\frac{\left(\frac{k}{1\,l_1}\right)-\frac{\alpha+\beta r}{\alpha+\beta p}}{1-\frac{\alpha+\beta r}{\alpha+\beta p}} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Das Maximum der Winkelgeschwindigkeit fällt in die Expansionszeit. Man erhält daher den Winkel φ_2, der diesem Maximum entspricht, wenn man die Gleichung (4) differenzirt und $\frac{d(\omega^2)}{d\varphi}=0$ setzt. Wir erhalten daher, wenn wir $x_2 = \varrho\,(1-\cos\varphi_2)$ setzen,

$$O\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}+p\right)\frac{l_1+m\,l}{x_2+m\,l}-\frac{\alpha}{\beta}\right]\varrho\sin\varphi_2 - O\,r\,\varrho\sin\varphi_2 - Q\,\varrho = 0$$

Hieraus folgt:

$$\sin\varphi_2 = \frac{Q\,\varrho}{O\,\varrho\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}+p\right)\frac{l_1+m\,l}{x_2+m\,l}-\left(\frac{\alpha}{\beta}+r\right)\right]}$$

Setzt man für $Q\varrho$ den Werth, welchen die Gleichung (7) darbietet, so folgt:

$$\sin\varphi_2 = \frac{\frac{O\,l}{\pi}\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}+p\right)\left(\frac{k}{1\,l_1}\right)-\left(\frac{\alpha}{\beta}+r\right)\right]}{O\,\varrho\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}+p\right)\frac{l_1+m\,l}{x_2+m\,l}-\left(\frac{\alpha}{\beta}+r\right)\right]}$$

oder

$$\sin\varphi_2 = \frac{2}{\pi}\,\frac{\left(\frac{k}{1\,l_1}\right)-\frac{\alpha+\beta r}{\alpha+\beta p}}{\frac{l_1+m\,l}{x_2+m\,l}-\frac{\alpha+\beta r}{\alpha+\beta p}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

wobei ist:

$$x_2 = \frac{1}{2}\,(1\cos\varphi_2) \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Diese Gleichungen (9) und (10) bestimmen den Werth von φ_2.

Die Gleichung (5) gilt, wenn man in dieselbe x_2 statt x, φ_2 statt φ und W statt ω setzt. Man erhält daher:

$$\begin{aligned}\mathrm{O\,p\,l_1} + \mathrm{O}\left[\left(\frac{\alpha}{\beta} + \mathrm{p}\right)(\mathrm{l_1} + \mathrm{m\,l})\,\mathrm{lognat}\,\frac{\mathrm{x_2} + \mathrm{m\,l}}{\mathrm{l_1} + \mathrm{m\,l}} - \frac{\alpha}{\beta}\,(\mathrm{x_2} - \mathrm{l_1})\right] \\ - \mathrm{O\,r\,x_2} - \mathrm{Q}\,\varrho\,\varphi_2 = \mu\,(\mathrm{W}^2 - \omega_0^{\,2})\end{aligned} \quad (11)$$

Die Gleichung (2) muss erfüllt werden, wenn man setzt: für x, x_1, für φ, φ_1 und für ω, w, es ist demnach:

$$\mathrm{O\,(p - r)\,x_1} - \mathrm{Q}\,\varrho\,\varphi_1 = \mu\,(\mathrm{w}^2 - \omega_0^{\,2}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (12)$$

Die Differenz der Gleichungen (11) und (12) gibt:

$$\mathrm{O}\left\{\begin{aligned}&\mathrm{p\,l_1} - \frac{\alpha}{\beta}(\mathrm{x_2} - \mathrm{l_1}) - \mathrm{r\,x_2} - (\mathrm{p} - \mathrm{r})\,\mathrm{x_1} \\ &+\left(\frac{\alpha}{\beta} + \mathrm{p}\right)(\mathrm{l_1} + \mathrm{m\,l})\,\mathrm{lognat}\,\frac{\mathrm{x_2} + \mathrm{m\,l}}{\mathrm{l_1} + \mathrm{m\,l}}\end{aligned}\right\} - \mathrm{Q}\,\varrho\,(\varphi_2 - \varphi_1) = \mu(\mathrm{W}^2 - \mathrm{w}^2) \quad (13)$$

oder wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\left(\begin{matrix}\mathrm{k} \\ \mathrm{l_1\,x_2}\end{matrix}\right) = \frac{\mathrm{l_1}}{\mathrm{l}} + \left(\frac{\mathrm{l_1}}{\mathrm{l}} + \mathrm{m}\right)\,\mathrm{lognat}\,\frac{\mathrm{x_2} + \mathrm{m\,l}}{\mathrm{l_1} + \mathrm{m\,l}} \quad . \; . \; . \; (14)$$

so wird die Gleichung (13):

$$\begin{aligned}\mathrm{O\,l}\left[\left(\frac{\alpha}{\beta} + \mathrm{p}\right)\left(\begin{matrix}\mathrm{k} \\ \mathrm{l_1\,x_2}\end{matrix}\right) - \left(\frac{\alpha}{\beta} + \mathrm{p}\right)\frac{\mathrm{x_1}}{\mathrm{l}} - \left(\frac{\alpha}{\beta} + \mathrm{r}\right)\left(\frac{\mathrm{x_2}}{\mathrm{l}} - \frac{\mathrm{x_1}}{\mathrm{l}}\right)\right] \\ - \mathrm{Q}\,\varrho\,(\varphi_2 - \varphi_1) = \mu\,(\mathrm{W}^2 - \mathrm{w}^2)\end{aligned}$$

oder auch:

$$\mathrm{Q}\,\varrho\left\{\begin{matrix}\dfrac{\mathrm{O\,l}\left[\left(\dfrac{\alpha}{\beta} + \mathrm{p}\right)\left(\begin{matrix}\mathrm{k} \\ \mathrm{l_1\,x_2}\end{matrix}\right) - \left(\dfrac{\alpha}{\beta} + \mathrm{p}\right)\dfrac{\mathrm{x_1}}{\mathrm{l}} - \left(\dfrac{\alpha}{\beta} + \mathrm{r}\right)\left(\dfrac{\mathrm{x_2}}{\mathrm{l}} - \dfrac{\mathrm{x_1}}{\mathrm{l}}\right)\right]}{\mathrm{Q}\,\varrho} \\ -(\varphi_2 - \varphi_1)\end{matrix}\right\} = \mu\,(\mathrm{W}^2 - \mathrm{w}^2)$$

Setzt man im Nenner des Bruches für $\mathrm{Q}\,\varrho$ den Werth, welchen die Gleichung (7) darbietet, so findet man:

$$\mathrm{Q}\,\varrho\left\{\begin{matrix}\dfrac{\mathrm{O\,l}\left[\left(\dfrac{\alpha}{\beta} + \mathrm{p}\right)\left(\begin{matrix}\mathrm{k} \\ \mathrm{l_1\,x_2}\end{matrix}\right) - \left(\dfrac{\alpha}{\beta} + \mathrm{p}\right)\dfrac{\mathrm{x_1}}{\mathrm{l}} - \left(\dfrac{\alpha}{\beta} + \mathrm{r}\right)\left(\dfrac{\mathrm{x_2}}{\mathrm{l}} - \dfrac{\mathrm{x_1}}{\mathrm{l}}\right)\right]}{\dfrac{1}{\pi}\,\mathrm{O\,l}\left[\left(\dfrac{\alpha}{\beta} + \mathrm{p}\right)\left(\begin{matrix}\mathrm{k} \\ \mathrm{l\,l_1}\end{matrix}\right) - \left(\dfrac{\alpha}{\beta} + \mathrm{r}\right)\right]} \\ -(\varphi_2 - \varphi_1)\end{matrix}\right\} = \mu\,(\mathrm{W}^2 - \mathrm{w}^2)$$

oder endlich:

$$\mathrm{Q}\,\varrho\,\pi\left[\frac{\left(\begin{matrix}\mathrm{k} \\ \mathrm{l_1\,x_2}\end{matrix}\right) - \dfrac{\mathrm{x_1}}{\mathrm{l}} - \left(\dfrac{\mathrm{x_2}}{\mathrm{l}} - \dfrac{\mathrm{x_1}}{\mathrm{l}}\right)\dfrac{\alpha + \beta\,\mathrm{r}}{\alpha + \beta\,\mathrm{p}}}{\left(\begin{matrix}\mathrm{k} \\ \mathrm{l\,l_1}\end{matrix}\right) - \dfrac{\alpha + \beta\,\mathrm{r}}{\alpha + \beta\,\mathrm{p}}} - \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{180}\right] = \mu\,(\mathrm{W}^2 - \mathrm{w}^2) \quad . \; (15)$$

Nun ist auch hier wieder zu setzen:

$$\left.\begin{aligned} Q\,\frac{2\,\varrho\,\pi\,n}{60} &= 75\,N \\ \mu &= \frac{G}{2\,g}\,R^2 \\ W^2 - w^2 &= \frac{2\,\mathfrak{G}^2}{i} \\ R\,\mathfrak{G} &= C \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Daher findet man schliesslich:

$$G = 30 \times 75 \times g\,\frac{i\,N}{n\,C^2}\left[\frac{\left(\begin{matrix}k\\ l_1\,x_2\end{matrix}\right) - \frac{x_1}{l} - \left(\frac{x_2}{l} - \frac{x_1}{l}\right)\frac{\alpha + \beta\,r}{\alpha + \beta\,p}}{\left(\begin{matrix}k\\ l\,l_1\end{matrix}\right) - \frac{\alpha + \beta\,r}{\alpha + \beta\,p}} - \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{180}\right] \quad (17)$$

wodurch das Gewicht des Schwungrades bestimmt ist.

Das Schwungrad für Woolf'sche Maschinen. Wir wollen uns erlauben, den Einfluss des schädlichen Raumes und das Volumen des Verbindungsrohres zwischen den beiden Cylindern zu vernachlässigen. Dieser Einfluss ist von keinem Belang, veranlasst jedoch einen sehr komplizirten Gang der Rechnung.

Wir nennen O und o die Cylinderquerschnitte, L, l die Schublängen der beiden Kolben, $\varrho = \frac{L}{2}$ den Kurbelhalbmesser.

Wenn der Niedergang der Kolben beginnt, ist der kleine Cylinder mit Kesseldampf gefüllt, ist also in demselben unterhalb des Kolbens eine Dampfmenge von $o\,l\,(\alpha + \beta\,p)$ Kilogramm enthalten. Nachdem der kleine Kolben eine Weglänge x nach abwärts zurückgelegt hat, ist der grosse Kolben um $\frac{L}{l}\,x$ niedergegangen. Da wir die schädlichen Räume und den Rauminhalt des Verbindungsrohres vernachlässigen, ist obige Dampfmenge in einem Raum

$$o\,(l - x) + O\,\frac{L}{l}\,x = o\,l + x\left(O\,\frac{L}{l} - o\right) = o\,l + o\,x\left(\frac{O\,L}{o\,l} - 1\right)$$

enthalten, wenn der kleine Kolben den Weg x zurückgelegt hat. Nennen wir y die Spannkraft dieses Dampfes, so hat man:

$$o\,l\,(\alpha + \beta\,p) = \left[o\,l + o\,x\left(\frac{O\,L}{o\,l} - 1\right)\right](\alpha + \beta\,y)$$

Hieraus folgt:

$$y = \left(\frac{\alpha}{\beta} + p\right) \frac{1}{1 + \frac{x}{l}\left(\frac{O\,L}{o\,l} - 1\right)} - \frac{\alpha}{\beta} \quad . \; . \quad (1)$$

Nun sind $\int_0^\xi o\,(p - y)\,d\,x$ und $\int_0^\xi O\,(y - r)\,\frac{L}{l}\,d\,x$ die nützlichen Wirkungen, welche die beiden Kolben vom Anfange des Schubes an bis zu dem Moment hin entwickeln, wenn der kleine Kolben einen Weg ξ zurückgelegt hat; ist ferner $Q\,\varrho\,\varphi$ die Wirkung, welche der Ueberwindung des nützlichen Widerstandes entspricht, und ist endlich $\mu\,(\omega^2 - \omega_0^{\,2})$ die Aenderung der lebendigen Kraft des Schwungrades. Vermöge des Prinzipes der Thätigkeit der Kräfte hat man demnach:

$$\int_0^\xi o\,(p - y)\,d\,x + \int_0^\xi O\,(y - r)\,\frac{L}{l}\,d\,x - Q\,\varrho\,\varphi = \mu\,(\omega^2 - \omega_0^{\,2}) \quad . \quad (2)$$

oder

$$\int_0^\xi \left(o\,p - O\,r\,\frac{L}{l}\right) d\,x + \int_0^\xi \left(O\,\frac{L}{l} - o\right) y\,d\,x - Q\,\varrho\,\varphi = \mu\,(\omega^2 - \omega_0^{\,2}) \quad (3)$$

oder wenn man für y seinen Werth einführt:

$$\left\{\begin{array}{c} \int_0^\xi \left(o\,p - O\,r\,\frac{L}{l}\right) d\,x \\ + \int_0^\xi \left(O\,\frac{L}{l} - o\right) \left[\frac{\frac{\alpha}{\beta} + p}{1 + \frac{x}{l}\left(\frac{O\,L}{o\,l} - 1\right)} - \frac{\alpha}{\beta}\right] d\,x - Q\,\varrho\,\varphi \\ = \mu\,(\omega^2 - \omega_0^{\,2}) \end{array}\right\} \quad (4)$$

Durch Ausführung der Integrationen folgt:

$$\left(o\,p - O\,r\,\frac{L}{l}\right)\xi + o\,l\left(\frac{\alpha}{\beta} + p\right) \text{lognat}\left[1 + \frac{\xi}{l}\left(\frac{O\,L}{o\,l} - 1\right)\right]$$
$$- \,o\left(\frac{O\,L}{o\,l} - 1\right)\frac{\alpha}{\beta}\,\xi - Q\,\varrho\,\varphi = \mu\,(\omega^2 - \omega_0^{\,2})$$

oder

$$\left\{\begin{array}{c} o\,l\left[\left(\frac{\alpha}{\beta} + p\right) - \frac{O\,L}{o\,l}\left(\frac{\alpha}{\beta} + r\right)\right]\frac{\xi}{l} \\ + \,o\,l\left(\frac{\alpha}{\beta} + p\right) \text{lognat}\left[1 + \frac{\xi}{l}\left(\frac{O\,L}{o\,l} - 1\right)\right] - Q\,\varrho\,\varphi = \mu\,(\omega^2 - \omega_0^{\,2}) \end{array}\right\} \quad (5)$$

Dehnt man dieses Integrale aus bis $\xi = 1$, so ist zu setzen: für $\varphi = \pi$ und wegen des Beharrungszustandes $\omega = \omega_0$, daher folgt:

$$o\,l\left[\left(\frac{\alpha}{\beta} + p\right)\left(1 + \text{lognat}\,\frac{O\,L}{o\,l}\right) - \frac{O\,L}{o\,l}\left(\frac{\alpha}{\beta} + r\right)\right] = Q\,\varrho\,\pi \quad (6)$$

Diese Gleichung bestimmt die im Beharrungszustand vorhandene Dampfspannung.

Differenzirt man die Gleichung (5) nach φ und setzt $\frac{d\,\omega^2}{d\,\varphi} = 0$, so ergibt sich eine Gleichung, welche die Werthe von φ bestimmt, die dem Maximum und Minimum der Winkelgeschwindigkeit entsprechen. Bei dieser Differenziation ist zu beachten, dass

$$\xi = \frac{1}{2}\,(1 - \cos\varphi) \quad d\,\xi = \frac{1}{2}\,\sin\varphi\,d\,\varphi$$

ist. Man erhält daher:

$$\left\{\begin{array}{l} o\,l\left[\left(\frac{\alpha}{\beta} + p\right) - \frac{O\,L}{o\,l}\left(\frac{\alpha}{\beta} + r\right)\right]\frac{1}{l} \\ + o\,l\left(\frac{\alpha}{\beta} + p\right)\dfrac{\frac{1}{l}\left(\frac{O\,L}{o\,l} - 1\right)}{1 + \frac{\xi}{l}\left(\frac{O\,L}{o\,l} - 1\right)} \end{array}\right\}\frac{1}{2}\,\sin\varphi - Q\,\varrho = 0$$

oder

$$o\,l\left\{\left(\frac{\alpha}{\beta} + p\right)\left[1 + \frac{\frac{O\,L}{o\,l} - 1}{1 + \frac{\xi}{l}\left(\frac{O\,L}{o\,l} - 1\right)}\right] - \frac{O\,L}{o\,l}\left(\frac{\alpha}{\beta} + r\right)\right\}\frac{\sin\varphi}{2} - Q\,\varrho = 0$$

Hieraus folgt, wenn man für $Q\,\varrho$ den Werth einführt, welchen die Gleichung (6) darbietet:

$$\sin\varphi = \frac{2}{\pi}\,\frac{1 + \text{lognat}\,\frac{O\,L}{o\,l} - \frac{O\,L}{o\,l}\,\frac{\alpha + \beta\,r}{\alpha + \beta\,p}}{1 + \dfrac{\frac{O\,L}{o\,l} - 1}{1 + \frac{\xi}{l}\left(\frac{O\,L}{o\,l} - 1\right)} - \frac{O\,L}{o\,l}\,\frac{\alpha + \beta\,r}{\alpha + \beta\,p}} \quad . \quad . \quad (7)$$

in dieser Gleichung ist zu setzen:

$$\xi = \frac{1}{2}\,(1 - \cos\varphi)$$

Nennen wir φ_1 und φ_2 die zwei zwischen 0 und π liegenden Wurzeln dieser Gleichung und nennen x_1 und x_2 die Werthe von ξ, welche diesen Wurzeln entsprechen, so dass also ist:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}(1-\cos\varphi_1) \\ x_2 &= \frac{1}{2}(1-\cos\varphi_2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Die kleine Wurzel φ_1 entspricht dem Minimum w, die grössere φ_2 dem Maximum W der Winkelgeschwindigkeit.

Der Gleichung (5) muss entsprochen werden, wenn wir setzen: statt ξ, φ, ω: x_1, φ_1, w und x_2, φ_2, W. Wir erhalten daher:

$$\left.\begin{aligned} & o\,l\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}+p\right)-\frac{OL}{o\,l}\left(\frac{\alpha}{\beta}+r\right)\right]\frac{x_1}{l} \\ & +o\,l\left(\frac{\alpha}{\beta}+p\right)\text{lognat}\left[1+\frac{x_1}{l}\left(\frac{OL}{o\,l}-1\right)\right]-Q\varrho\varphi_1=\mu(w^2-\omega_0^2) \\ & o\,l\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}+p\right)-\frac{OL}{o\,l}\left(\frac{\alpha}{\beta}+r\right)\right]\frac{x_2}{l} \\ & +o\,l\left(\frac{\alpha}{\beta}+p\right)\text{lognat}\left[1+\frac{x_2}{l}\left(\frac{OL}{o\,l}-1\right)\right]-Q\varrho\varphi_2=\mu(W^2-\omega_0^2) \end{aligned}\right\} (9)$$

Die Differenz dieser Gleichungen gibt:

$$o\,l\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}+p\right)-\frac{OL}{o\,l}\left(\frac{\alpha}{\beta}+r\right)\right]\frac{x_2-x_1}{l}$$

$$+o\,l\left(\frac{\alpha}{\beta}+p\right)\text{lognat}\frac{1+\frac{x_2}{l}\left(\frac{OL}{o\,l}-1\right)}{1+\frac{x_1}{l}\left(\frac{OL}{o\,l}-1\right)}-Q\varrho(\varphi_2-\varphi_1)=\mu(W^2-w^2)$$

oder auch:

$$Q\varrho\left\{\frac{\left\{\begin{aligned} & o\,l\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}+p\right)-\frac{OL}{o\,l}\left(\frac{\alpha}{\beta}+r\right)\right]\frac{x_2-x_1}{l} \\ & +o\,l\left(\frac{\alpha}{\beta}+p\right)\text{lognat}\frac{1+\frac{x_2}{l}\left(\frac{OL}{o\,l}-1\right)}{1+\frac{x_1}{l}\left(\frac{OL}{o\,l}-1\right)} \end{aligned}\right\}}{Q\varrho}-(\varphi_2-\varphi_1)\right\}=\mu(W^2-w^2)$$

Setzt man in den Nenner für $Q\varrho$ den Werth, welchen (6) darbietet, so wird:

$$Q\varrho\pi\left\{\frac{\left(1-\frac{OL}{o\,l}\frac{\alpha+\beta r}{\alpha+\beta p}\right)\frac{x_2-x_1}{l}+\text{lognat}\frac{1+\frac{x_2}{l}\left(\frac{OL}{o\,l}-1\right)}{1+\frac{x_1}{l}\left(\frac{OL}{o\,l}-1\right)}}{1-\frac{OL}{o\,l}\frac{\alpha+\beta r}{\alpha+\beta p}+\text{lognat}\frac{OL}{o\,l}}-\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\pi}\right\}$$

$$=\mu(W^2-w^2)\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(10)$$

Nun kann man auch hier setzen:

$$\left.\begin{aligned} Q\,\frac{2\,\varrho\,\pi\,n}{60} &= 75\,N \\ \mu &= \frac{G}{2\,g}\,R^2 \\ W^2 - w^2 &= \frac{2\,\mathfrak{C}^2}{i} \\ R\,\mathfrak{C} &= C \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

(R Halbmesser des Schwungrades, n Umdrehungen der Kurbelwelle in einer Minute, G Gewicht des Schwungringes, $\mathfrak{C}$ mittlere Winkelgeschwindigkeit des Schwungrades, C mittlere Geschwindigkeit des Schwungringes). Und dann findet man:

$$G = 30 \times 75 \times g\,\frac{i\,N}{n\,C^2} \times$$

$$\left\{\frac{\left(1 - \frac{OL}{ol}\,\frac{\alpha + \beta\,r}{\alpha + \beta\,p}\right)\frac{x_2 - x_1}{l} + \text{lognat}\,\frac{1 + \frac{x_2}{l}\left(\frac{OL}{ol} - 1\right)}{1 + \frac{x_1}{l}\left(\frac{OL}{ol} - 1\right)}}{1 - \frac{OL}{ol}\,\frac{\alpha + \beta\,r}{\alpha + \beta\,p} + \text{lognat}\,\frac{OL}{ol}} - \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi}\right\} \quad (12)$$

wodurch nun abermals das Gewicht des Schwungrades bestimmt ist.

Das Schwungrad mit Berücksichtigung der endlichen Länge der Schubstange und der hin- und hergehenden Massen. Wir wollen auch noch die Theorie des Schwungrades mit Berücksichtigung der endlichen Länge der Schubstange und der hin- und hergehenden Massen behandeln, wollen jedoch eine nicht expandirende Maschine mit einem Cylinder voraussetzen.

Es sei, Tafel XXVIII., Fig. 9, ϱ der Halbmesser der Kurbel, $\lambda = AB$ die Länge der Schubstange, φ und ψ die Winkel, welche in irgend einem Zeitmoment die Kurbel und die Schubstange mit der Bewegungsrichtung des Kolbens bilden, $AC = x$ die Entfernung des Gleitstückes A von der Kurbelaxe C. Dies vorausgesetzt, ist zunächst:

$$\left.\begin{aligned} \varrho \sin\varphi &= \lambda \sin\psi \\ x &= \varrho\cos\varphi + \lambda\cos\psi \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Hieraus folgt:

$$\left.\begin{array}{l} \sin\psi = \frac{\varrho}{\lambda}\sin\varphi \\ \cos\psi = \sqrt{1-\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^2\sin^2\varphi} \\ x = \varrho\cos\varphi + \lambda\sqrt{1-\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^2\sin^2\varphi} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

Da $\frac{\varrho}{\lambda}$ in der Regel nicht mehr als $\frac{1}{6}$ beträgt, so begehen wir keinen merklichen Fehler, wenn wir setzen:

$$\sqrt{1-\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^2\sin^2\varphi} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^2\sin^2\varphi$$

Dann wird:

$$\left.\begin{array}{l} \sin\psi = \frac{\varrho}{\lambda}\sin\varphi \\ \cos\psi = \left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^2\sin^2\varphi\right] \\ x = \varrho\cos\varphi + \lambda\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^2\sin^2\varphi\right] \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

Nennen wir:

$\left.\begin{array}{l} Cp = \xi \\ mp = \upsilon \end{array}\right\}$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes m der Axe der Schubstange. $A\,m = \sigma$, so ist:

$$\xi = x - \sigma\cos\psi$$
$$\upsilon = \sigma\sin\psi$$

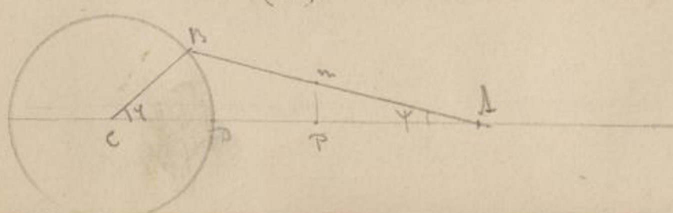
oder wegen (3):

$$\left.\begin{array}{l} \xi = \varrho\cos\varphi + (\lambda-\sigma)\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^2\sin^2\varphi\right] \\ \upsilon = \sigma\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)\sin\varphi \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (4)$$

Durch Differenziation dieser Ausdrücke folgt:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d\xi}{d\varphi} = -\varrho\sin\varphi - (\lambda-\sigma)\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^2\sin\varphi\cos\varphi \\ \frac{d\upsilon}{d\varphi} = \sigma\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)\cos\varphi \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (5)$$

Vernachlässiget man die Glieder, welche vierte und höhere Potenzen von $\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)$ enthalten, so folgt aus (5):



$$\frac{d\,\xi^2 + d\,v^2}{d\,\varphi^2} = \varrho^2 \sin^2\varphi \left[1 + 2\left(1 - \frac{\sigma}{\lambda}\right)\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)\cos\varphi + \left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)^2\left(\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)^2\right] \quad (6)$$

Nun ist $\frac{d\,\varphi}{d\,t} = \omega$ die Winkelgeschwindigkeit der Kurbel. Setzt man überdies $\frac{d^2\,\xi + d^2\,v}{d\,t^2} = u^2$, so bedeutet u die Geschwindigkeit des Punktes m der Schubstange. Man erhält demnach aus (6):

$$u^2 = \varrho^2 \sin^2\varphi \left[1 + 2 \;\; 1 - \frac{\sigma}{\lambda}\right)\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)\cos\varphi + \left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)^2\left(\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)^2\right]\omega^2 \quad (7)$$

Betrachtet man die Schubstange als eine gerade Linie, längs welcher eine Masse gleichförmig vertheilt ist und nennt m die auf die Längeneinheit vorhandene Masse, so ist

$$\int_0^\lambda m\,d\,\sigma\,u^2$$

die lebendige Kraft der Masse der Schubstange und man findet:

$$\int_0^\lambda m\,u^2\,d\sigma$$

$$= m\int_0^\lambda \varrho^2\,\omega^2 \sin^2\varphi \left[1 + 2\left(1 - \frac{\sigma}{\lambda}\right)\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)\cos\varphi + \left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)^2\left(\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)^2\right] d\,\sigma$$

oder

$$\int_0^\lambda m\,u^2\,d\,\sigma$$

$$= m\,\varrho^2\,\omega^2 \sin^2\varphi \left[\lambda \;\left(1 + 2\frac{\varrho}{\lambda}\right)\cos\varphi - \frac{2}{\lambda}\,\frac{\varrho}{\lambda}\cos\varphi\,\frac{\lambda^2}{2} + \frac{1}{3}\,\lambda\left(\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)^2\right]$$

$$\int_0^\lambda m\,u^2\,d\,\sigma = m\,\lambda\,\varrho^2\,\omega^2 \sin^2\varphi \left[1 + \frac{\varrho}{\lambda}\cos\varphi + \frac{1}{3}\left(\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)^2\right] \quad . \quad (8)$$

oder wenn wir $m\,\lambda = m_1$ setzen, so dass m_1 die Masse der Schubstange bedeutet:

$$\int_0^\lambda m\;u^2\,d\,\sigma = m_1\;\varrho^2\,\omega^2 \sin^2\varphi \left[1 + \frac{\varrho}{\lambda}\cos\varphi + \frac{1}{3}\left(\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)^2\right] \quad . \quad (9)$$

Nennt man m_2 die Massen der Kolbenstange des Kreuzkopfes und des Kolbens, so ist die lebendige Kraft dieser drei Massen:

$$m_2\left(\frac{d\,x}{d\,t}\right)^2 = m_2\;\varrho^2\,\omega^2 \sin^2\varphi \left(1 + 2\frac{\varrho}{\lambda}\cos\varphi\right) \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Die Aenderung der lebendigen Kraft des Schwnngrades ist, während die Kurbel den Winkel φ zurücklegt,

$$\mu\left(\omega^2 - \omega_0^2\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

Der Weg, den der Kolben zurücklegt, während der Winkel φ beschrieben wird, ist wegen (3):

$$\varrho\left(1 - \cos\varphi\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^2 \sin^2\varphi \quad \ldots \quad (12)$$

Der Weg, welchen der nützliche auf den Kurbelkreis reduzirte Widerstand zurücklegt, ist $\varrho\,\varphi$.

Nach dem Grundsatz der Thätigkeit ist nun die Gleichung der Bewegung:

$$\left.\begin{aligned} & P\left[\varrho\left(1-\cos\varphi\right) + \frac{\lambda}{2}\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^2 \sin^2\varphi\right] - Q\,\varrho\,\varphi = \mu\left(\omega^2 - \omega_0^2\right) \\ & \qquad + m_1\,\varrho^2\,\omega^2\,\sin^2\varphi\left[1 + \frac{\varrho}{\lambda}\cos\varphi + \frac{1}{3}\left(\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)^2\right] \\ & \qquad + m_2\,\varrho^2\,\omega^2\,\sin^2\varphi\left[1 + 2\,\frac{\varrho}{\lambda}\cos\varphi\right] \\ & \qquad - m_1\,\varrho^2\,\omega_0^2\,\frac{1}{3} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (13)$$

Im Beharrungszustand der Bewegung muss für $\varphi = \pi$, $\omega = \omega_0$ werden. Daher findet man aus (13):

$$P = \frac{\pi}{2}\,Q$$

Führt man diesen Werth von P in (13) ein und sucht ω, so findet man:

$$\omega^2 = \frac{Q\,\varrho\,\frac{\pi}{2}\left[1 - \cos\varphi + \frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)\sin^2\varphi - \frac{2\,\varphi}{\pi}\right] + \mu\,\omega_0^2 + \frac{1}{3}\,m_1\,\varrho^2\,\omega_0^2}{\mu + m_1\,\varrho^2\sin^2\varphi\left[1 + \frac{\varrho}{\lambda}\cos\varphi + \frac{1}{3}\left(\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)^2\right] + m_2\,\varrho^2\sin^2\varphi\left(1 + 2\,\frac{\varrho}{\lambda}\cos\varphi\right)}$$

oder

$$\omega^2 = \omega_0^2\,\frac{1 + \frac{1}{3}\,\frac{m_1}{\mu}\,\varrho^2 + \frac{Q\,\varrho\,\frac{\pi}{2}}{\mu\,\omega_0^2}\left[1 - \cos\varphi + \frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)\sin^2\varphi - \frac{2\,\varphi}{\pi}\right]}{\left\{\begin{aligned} & 1 + \frac{m_1\,\varrho^2}{\mu}\sin^2\varphi\left[1 + \frac{\varrho}{\lambda}\cos\varphi + \frac{1}{3}\left(\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)^2\right] \\ & \qquad + \frac{m_2\,\varrho^2}{\mu}\sin^2\varphi\left(1 + 2\,\frac{\varrho}{\lambda}\cos\varphi\right) \end{aligned}\right\}} \quad (14)$$

Da in allen Fällen der Anwendung die Winkelgeschwindigkeit nur wenig veränderlich ist, so begeht man keinen merklichen Fehler, wenn man die mit μ dividirten Glieder des Zählers und Nenners als sehr kleine Grössen betrachtet und sich erlaubt, die Ausdrücke nach dem Binomialsatz zu entwickeln, dabei alle Produkte der sehr kleinen Glieder vernachlässiget. Dann findet man:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\omega}{\omega_0} = 1 + \frac{1}{2}\frac{Q\varrho\frac{\pi}{2}}{\mu\,\omega_0^2}\left[1 - \cos\varphi + \frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)\sin^2\varphi - \frac{2\,\varphi}{\pi}\right] \\ + \frac{m_1\,\varrho^2}{\mu}\left\{\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\sin^2\varphi\left[1 + \frac{\varrho}{\lambda}\cos\varphi + \frac{1}{3}\left(\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)^2\right]\right\} \\ - \frac{1}{2}\frac{m_2\,\varrho^2}{\mu}\sin^2\varphi\left(1 + 2\frac{\varrho}{\lambda}\cos\varphi\right)\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Diese Gleichung gibt die Winkelgeschwindigkeit ω für jeden Werth von φ.

Für die innerhalb o und π vorkommenden kleinsten und grössten Winkelgeschwindigkeiten ist $\frac{d\,\omega}{d\,\varphi} = o$. Man erhält daher durch Differenziation von (15) zur Bestimmung der Winkel, welche dem Maximum und Minimum entsprechen, folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}\frac{d\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{d\,\varphi} = o = \frac{\pi}{4}\frac{Q\,\varrho}{\mu\,\omega_0^2}\left[\sin\varphi + \left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)\sin\varphi\cos\varphi - \frac{2}{\pi}\right] \\ - \frac{m_1\,\varrho^2}{\mu}\left[\frac{1}{3}\sin 2\,\varphi - \frac{1}{8}\frac{\varrho}{\lambda}\,(\sin\varphi - 3\,\sin 3\,\varphi)\right] \\ - \frac{1}{2}\frac{m_2\,\varrho^2}{\mu}\left[\sin 2\,\varphi - \frac{1}{2}\frac{\varrho}{\lambda}\,(\sin\varphi - 3\,\sin 3\,\varphi\right]\end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\left.\begin{aligned}\sin\varphi = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)\sin 2\,\varphi \\ + 2\,\frac{\omega_0^2\,\varrho^2}{Q\,\varrho\,\pi}\left[\sin 2\,\varphi\left(\frac{2}{3}\,m_1 + m_2\right) - \frac{1}{4}\frac{\varrho}{\lambda}(m_1 + 2\,m_2)(\sin\varphi - 3\sin 3\,\varphi)\right]\end{aligned}\right\} (16)$$

Die beiden zwischen 0 und 180° liegenden Wurzeln dieser Gleichung, welche α und β genannt werden mögen, bestimmen die Positionen der Kurbel, welche dem Minimum w und dem Maximum W der Winkelgeschwindigkeit entsprechen.

Die Gleichung (15) gibt, wenn man zuerst α und w und dann β und W statt φ und ω setzt:

$$\frac{w}{\omega_0} = 1 + \frac{1}{4}\frac{Q\,\varrho\,\pi}{\mu\,\omega_0^2}\left[1 - \cos\alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)\sin^2\alpha - \frac{2\,\alpha}{\pi}\right]$$
$$+ \frac{m_1\,\varrho^2}{\mu}\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\sin^2\alpha\left(1 + \frac{\varrho}{\lambda}\cos\alpha + \frac{1}{3}\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)\right]$$
$$- \frac{1}{2}\frac{m_2\,\varrho^2}{\mu}\sin^2\alpha\left(1 + 2\frac{\varrho}{\lambda}\cos\alpha\right)$$

$$\frac{W}{\omega_0} = 1 + \frac{1}{4}\frac{Q\,\varrho\,\pi}{\mu\,\omega_0^2}\left[1 - \cos\beta + \frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)\sin^2\beta - \frac{2\,\beta}{\pi}\right]$$
$$+ \frac{m_1\,\varrho^2}{\mu}\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\sin^2\beta\left(1 + \frac{\varrho}{\lambda}\cos\beta + \frac{1}{3}\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta}\right)\right]$$
$$- \frac{1}{2}\frac{m_2\,\varrho^2}{\mu}\sin^2\beta\left(1 + 2\frac{\varrho}{\lambda}\cos\beta\right)$$

Die Differenz dieser Gleichungen ist:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{W-w}{\omega_0} = \frac{1}{4}\frac{Q\,\varrho\,\pi}{\mu\,\omega_0^2}&\left[\cos\alpha - \cos\beta - \frac{2}{\pi}(\beta-\alpha) + \frac{1}{2}\frac{\varrho}{\lambda}(\sin^2\beta - \sin^2\alpha)\right) \\
- \frac{m_1\,\varrho^2}{2\,\mu}&\left[\sin^2\beta - \sin^2\alpha + \frac{\varrho}{\lambda}(\sin^2\beta\cos\beta - \sin^2\alpha\cos\alpha)\right. \\
&\left. + \frac{1}{3}(\cos^2\beta - \cos^2\alpha)\right] \\
- \frac{m_2\,\varrho^2}{2\,\mu}&\left[\sin^2\beta - \sin^2\alpha + 2\frac{\varrho}{\lambda}(\sin^2\beta\cos\beta - \sin^2\alpha\cos\alpha)\right]
\end{aligned}\right\}(17)$$

In den bisher aufgestellten Gleichungen erscheint ω_0, welche Winkelgeschwindigkeit nicht bekannt ist, wohl aber durch die bekannte mittlere Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{G}$ berechnet werden kann. Es ist:

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \omega\,d\varphi$$

oder wenn man für ω seinen Werth aus (15) einführt:

$$\mathfrak{G} = \frac{\omega_0}{\pi}\int_0^\pi \left\{\begin{aligned}
&1 + \frac{1}{4}\frac{Q\,\varrho\,\pi}{\mu\,\omega_0^2}\left[1 - \cos\varphi + \frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)\sin^2\varphi - \frac{2\,\varphi}{\pi}\right] \\
&+ \frac{m_1\,\varrho^2}{\mu}\left\{\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\sin^2\varphi\left[1 + \frac{\varrho}{\lambda}\cos\varphi + \frac{1}{3}\left(\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)^2\right]\right\} \\
&- \frac{1}{2}\frac{m_2\,\varrho^2}{\mu}\sin^2\varphi\left(1 + 2\frac{\varrho}{\lambda}\cos\varphi\right)
\end{aligned}\right\} d\varphi$$

Nun ist:

$$\int_0^\pi \cos \varphi \, d\varphi = 0 \qquad \int_0^\pi \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\pi \sin^2 \varphi \cos \varphi \, d\varphi = 0 \qquad \int_0^\pi \cos^2 \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2}$$

Daher findet man:

$$\mathfrak{G} = \frac{\omega_0}{\pi} \left\{ \begin{aligned} &\pi + \frac{1}{4} \frac{Q \varrho \pi}{\mu \omega_0^2} \left(\pi + \frac{1}{2} \frac{\varrho}{\lambda} \frac{\pi}{2} - \pi \right) \\ &+ \frac{m_1 \varrho^2}{\mu} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{6} \frac{\pi}{2} \right) \\ &- \frac{1}{2} \frac{m_2 \varrho^2}{\mu} \left(\frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad . \; . \; . \quad (18)$$

oder

$$\mathfrak{G} = \omega_0 \left(1 + \frac{1}{16} \frac{Q \varrho \pi}{\mu \omega_0^2} \frac{\varrho}{\lambda} - \frac{1}{6} \frac{m_1 \varrho^2}{\mu} - \frac{1}{4} \frac{m_2 \varrho^2}{\mu} \right) \quad . \; . \; . \quad (19)$$

Hieraus folgt:

$$\frac{1}{\omega_0} = \frac{8 \mu \mathfrak{G}}{Q \varrho \pi} \frac{\lambda}{\varrho} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{Q \varrho \pi}{4 \mathfrak{G}^2 \mu} \frac{\varrho}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{6} \frac{m_1 \varrho^2}{\mu} - \frac{1}{4} \frac{m_2 \varrho^2}{\mu} \right)} \right] (20)$$

Nun ist $\frac{Q \varrho \pi}{4 \mathfrak{G}^2 \mu} \frac{\varrho}{\mu}$ eine kleine Grösse und $1 - \frac{1}{6} \frac{m_1 \varrho^2}{\mu} - \frac{1}{4} \frac{m_2 \varrho^2}{\mu}$ ist nur wenig von der Einheit verschieden. Man begeht also keinen merklichen Fehler, wenn man obige Wurzel nach der Binomialreihe entwickelt und nur die zwei ersten Glieder beibehält. Dann aber findet man, weil nur das untere der Zeichen $\pm$ dem Sinne der Aufgabe entsprechen kann,

$$\frac{1}{\omega_0} = \frac{8 \mu \mathfrak{G}}{Q \varrho \pi} \frac{\lambda}{\varrho} \left\{ 1 - \left[1 - \frac{1}{2} \frac{Q \varrho \pi}{4 \mathfrak{G}^2 \mu} \frac{\varrho}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{6} \frac{m_1 \varrho^2}{\mu} - \frac{1}{4} \frac{m_2 \varrho^2}{\mu} \right) \right] \right\}$$

oder

$$\frac{1}{\omega_0} = \frac{1}{\mathfrak{G}} \left(1 - \frac{1}{6} \frac{m_1 \varrho^2}{\mu} - \frac{1}{4} \frac{m_2 \varrho^2}{\mu} \right) \quad . \; . \; . \; . \quad (21)$$

Hieraus folgt auch annähernd:

$$\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{\mathfrak{G}^2} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{m_1 \varrho^2}{\mu} - \frac{1}{2} \frac{m_2 \varrho^2}{\mu} \right) \quad . \; . \; . \; . \quad (22)$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned}
&\cos\alpha - \cos\beta - \frac{2}{\pi}(\beta-\alpha) + \frac{1}{2}\frac{\varrho}{\lambda}(\sin^2\beta - \sin^2\alpha) = \mathfrak{A}\\
&\sin^2\beta - \sin^2\alpha + \frac{\varrho}{\lambda}(\sin^2\beta\cos\beta - \sin^2\alpha\cos\alpha) + \frac{1}{3}(\cos^3\beta - \cos^3\alpha) = \mathfrak{B}\\
&\sin^2\beta - \sin^2\alpha + 2\frac{\varrho}{\lambda}(\sin^2\beta\cos\beta - \sin^2\alpha\cos\alpha) = \mathfrak{D}
\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

so wird die Gleichung (17), wenn man die Werthe von $\frac{1}{\omega_0}$ und von $\frac{1}{\omega_0{}^2}$ der Ausdrücke (21) und (22) berücksichtiget:

$$\left.\begin{aligned}
&(W-w)\frac{1}{\mathfrak{G}}\left(1 - \frac{1}{6}\frac{m_1\varrho^2}{\mu} - \frac{1}{4}\frac{m_2\varrho^2}{\mu}\right)\\
&= \frac{1}{4}\frac{Q\varrho\pi}{\mu\mathfrak{G}^2}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{m_1\varrho^2}{\mu} - \frac{1}{2}\frac{m_2\varrho^2}{\mu}\right)\mathfrak{A}\\
&- \frac{m_1\varrho^2}{2\mu}\mathfrak{B}\\
&- \frac{m_2\varrho^2}{2\mu}\mathfrak{D}
\end{aligned}\right\} \quad . \ . \ (24)$$

Vernachlässiget man die Glieder, welche μ^2 im Nenner enthalten, so findet man aus dieser Gleichung, wenn man $W-w=\frac{\mathfrak{G}}{i}$ setzt:

$$\mu = i\left(\frac{1}{4}\frac{Q\varrho\pi}{\mathfrak{G}^2}\mathfrak{A} - \frac{m_1\varrho^2}{2}\mathfrak{B} - \frac{m_2\varrho^2}{2}\mathfrak{D}\right) + \frac{1}{6}m_1\varrho^2 + \frac{1}{4}m_2\varrho^2 \ . \quad (25)$$

Nun ist:

$$\left.\begin{aligned}
Q\frac{2\varrho\pi n}{60} &= 75\ N\\
\mu &= \frac{G}{2g}R^2\\
m_1 &= \frac{q_1}{2g}\\
m_2 &= \frac{q_2}{2g}\\
C = R\mathfrak{G},\ c &= \varrho\mathfrak{G}
\end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (26)$$

(N Pferdekraft der Maschine, n Anzahl der Umdrehungen des Schwungrades in einer Minute, R Halbmesser des Schwungrades, G Gewicht des Schwungringes, C Umfangsgeschwindigkeit des Schwungrades, q_1 q_2 Gewicht der Schubstange und Kolben sammt Kolbenstange, c mittlere Geschwindigkeit des Kurbelzapfens).

Führt man diese Ausdrücke (26) in (25) ein, so findet man schliesslich:

$$G = \frac{60 \times 75 \times g}{4} \mathfrak{A} \frac{i N}{n C^2} + \left(\frac{c}{C}\right)^2 \left[q_1 \left(\frac{1}{6} - i \frac{\mathfrak{B}}{2}\right) + q_2 \left(\frac{1}{4} - i \frac{\mathfrak{D}}{2}\right) \right] \tag{27}$$

Mit Berücksichtigung von (26) wird die Gleichung (16), wenn man sich erlaubt $\mathfrak{G}^2$ statt $\omega_0{}^2$ zu setzen:

$$\left.\begin{cases} \sin \varphi = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right) \sin 2\varphi \\ + \frac{16\,\pi^2}{75(60)^2 2g} \frac{\varrho^2 n^3}{N} \left[\sin 2\varphi \left(\frac{2}{3} q_1 + q_2\right) + \frac{1}{4} \frac{\varrho}{\lambda} (q_1 + 2 q_2)(3 \sin 3\varphi - \sin \varphi) \right] \end{cases}\right\} \tag{28}$$

Theorie des Schwungkugelregulators.

Differenz zwischen der Spannung des Dampfes im Kessel und im Cylinder. Die Spannung des Dampfes im Cylinder wird, wie wir früher Seite 527 gezeigt haben, durch den Expansionsgrad und durch die auf die Flächeneinheit bezogenen Widerstände bestimmt, welche der Bewegung der Maschine entgegenwirken, und ist von allem Anderen, namentlich von der Geschwindigkeit der Maschine und von der Dampfmenge, welche in jeder Sekunde auf die Maschine wirkt, ganz unabhängig.

Nennen wir p die Spannung, welche im Cylinder hinter dem Kolben vorhanden ist, so lange der Cylinder mit dem Kessel kommunizirt. Die Spannung des Dampfes p_1 im Kessel fällt im Beharrungszustand stets grösser aus als jene im Cylinder, denn sonst könnte ja der Dampf nicht überströmen. Die Differenz $p_1 - p$ dieser Spannungen richtet sich nach den verschiedenen Widerständen, welche dem Uebergang des Dampfes aus dem Kessel in den Cylinder entgegenwirken und denselben erschweren, ähnlich wie dies bei einer komplizirteren Wasserleitung der Fall ist. Diese Widerstände entspringen theils aus den Reibungen des Dampfes an den Wänden des Röhren- oder Kanalsystems, durch welches die Dampfleitung statt findet, theils aus den Verengungen und Erweiterungen und plötzlichen Querschnittsänderungen, theils endlich aus den Ecken und Krümmungen, welche in diesem Kanalsystem vorkommen. Insbesondere kommen zweierlei solcher Verengungen vor, durch welche die Differenz $p_1 - p$ einen erheblichen Werth erreichen kann, nämlich durch die sogenannte Dampfklappe und durch den engen Durchgang, welchen die Steuerungsschieber bei gewissen Stellungen her-