Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1863

Das Erkalten

urn:nbn:de:bsz:31-270981

Visual Library

Alles was im vorhergehenden Problem über die Auflösung der transcendenten Gleichung (53), Seite 407, gesagt wurde, findet auf die vorliegende Gleichung seine Anwendung.

Wir dürfen annehmen, dass der Gleichung (23) ein Genüge geleistet wird, wenn man setzt:

$$\mu\,\varepsilon = (2\,i + 1)\frac{\pi}{2} + \zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

wobei ζ eine im Verhältniss zu $(2\,i+1)\frac{\pi}{2}$ kleine Grösse bezeichnet, und i jede ganze positive Zahl (Null mit eingeschlossen) bedeutet.

Nun ist:

$$\operatorname{tang}\mu\,\varepsilon = \operatorname{tang}\left[(2\,i+1)\frac{\pi}{2} + \zeta\right] = -\operatorname{Cotg}\zeta$$

Führt man diesen Werth von $\operatorname{tang}\mu\,\varepsilon$ in die Gleichung (23) ein und setzt für μ, $(2\,i+1)\frac{\pi}{2}$, vernachlässiget demnach ζ, so findet man:

$$\left\{ \begin{array}{c} -\operatorname{Cotg}\zeta = (2\,i+1)\dfrac{\pi}{2} \times \\ \dfrac{\left[(2\,i+1)\dfrac{\pi}{2}\right]^2\left(1+\dfrac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) - \left(b_1 + \dfrac{\gamma_2}{\gamma_1}\,b\right)}{\left[(2\,i+1)\dfrac{\pi}{2}\right]^2\dfrac{\lambda}{\gamma_1}\left\{\left[(2\,i+1)\dfrac{\pi}{2}\right]^2 - b\right\} - \dfrac{\gamma_2}{\lambda}\left\{\left[(2\,i+1)\dfrac{\pi}{2}\right]^2 - b_1\right\}} \end{array} \right\} \quad (28)$$

Diese Gleichung gibt annähernd den Werth der Korrektur ζ.

Das Erkalten. Betrachten wir nun den Vorgang der Abkühlung eines Raumes und der denselben einschliessenden Wände.

Die Abkühlung beginnt von dem Augenblick an, in welchem die Heizung aufhört, also von dem Augenblick an, in welchem die Luft des Raumes keine Wärme empfängt. Hat die Heizung, welche der Abkühlung vorherging, lange genug gedauert, so ist am Anfang der Abkühlung ein Beharrungszustand vorhanden, für welchen man hat, Tafel XVIII, Fig. 6,

$$W = (T_1 - \varDelta_1)\,\gamma_1\,\mathfrak{F} = (\Theta_1 - \mathfrak{T})\,\gamma_2\,\mathfrak{F} = (\varDelta_1 - \Theta_1)\,\frac{\lambda}{\varepsilon}\,\mathfrak{F} \quad . \quad . \quad (1)$$

woraus folgt:

$$\left. \begin{array}{l} T_1 = \mathfrak{T} + \dfrac{W}{\mathfrak{F}}\left(\dfrac{1}{\gamma_1} + \dfrac{1}{\gamma_2} + \dfrac{\varepsilon}{\lambda}\right) \\ \varDelta_1 = \mathfrak{T} + \dfrac{W}{\mathfrak{F}}\left(\dfrac{1}{\gamma_2} + \dfrac{\varepsilon}{\lambda}\right) \\ \Theta_1 = \mathfrak{T} + \dfrac{W}{\mathfrak{F}\,\gamma_2} \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Während des Aktes der Abkühlung, d. h. nachdem derselbe durch die Zeit t gedauert hat, ist:

$$\frac{du}{dt} = a \frac{d^2 u}{dx^2} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

$$a = \frac{\lambda}{c_1 \varrho} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=\varepsilon} + \frac{\gamma_2}{\lambda} (\Theta - \mathfrak{T}) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=0} + \frac{\gamma_1}{\lambda} (T - \varDelta) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

$$- L c\, dT = (T - \varDelta) \gamma_1 \mathfrak{F}\, dt \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Für $t = 0$ ist $u_1 = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} x$ . . . . (8)

Der Gleichung (3) wird entsprochen, wenn man nimmt:

$$u = \mathfrak{M} + \mathfrak{N} x + \Sigma e^{-\beta t} (\mathfrak{C}_1 \cos \mu x + \mathfrak{D}_1 \sin \mu x) \quad \ldots \quad (9)$$

$$\beta = a \mu^2 \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

Für $t = \infty$ muss offenbar $u = \mathfrak{T}$ werden, demnach

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{T}, \quad \mathfrak{N} = 0$$

daher:

$$u = \mathfrak{T} + \Sigma e^{-\beta t} (\mathfrak{C}_1 \cos \mu x + \mathfrak{D}_1 \sin \mu x) \quad \ldots \quad (11)$$

Hieraus folgt:

$$\varDelta = \mathfrak{T} + \Sigma e^{-\beta t} \mathfrak{C}_1 \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

$$\Theta = \mathfrak{T} + \Sigma e^{-\beta t} (\mathfrak{C}_1 \cos \mu \varepsilon + \mathfrak{D}_1 \sin \mu \varepsilon) \quad \ldots \quad (13)$$

$$\frac{du}{dx} = - \Sigma e^{-\beta t} \mu (\mathfrak{C}_1 \sin \mu x - \mathfrak{D}_1 \cos \mu x) \quad \ldots \quad (14)$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=0} = + \Sigma e^{-\beta t} \mathfrak{D}_1 \mu \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=\varepsilon} = - \Sigma e^{-\beta t} \mu (\mathfrak{C}_1 \sin \mu \varepsilon - \mathfrak{D}_1 \cos \mu \varepsilon) \quad . \quad (16)$$

Die Gleichung (5) wird:

$$-\Sigma e^{-\beta t}\mu(\mathfrak{C}_1 \sin\mu\varepsilon - \mathfrak{D}_1 \cos\mu\varepsilon) + \frac{\gamma_2}{\lambda}\left[\Sigma e^{-\beta t}(\mathfrak{C}_1 \cos\mu\varepsilon + \mathfrak{D}_1 \sin\mu\varepsilon)\right] = 0$$

$$-\mu(\mathfrak{C}_1 \sin\mu\varepsilon - \mathfrak{D}_1 \cos\mu\varepsilon) + \frac{\gamma_2}{\lambda}(\mathfrak{C}_1 \cos\mu\varepsilon + \mathfrak{D}_1 \sin\mu\varepsilon) = 0$$

$$\frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{D}_1} = \frac{\cos\mu\varepsilon + \frac{\gamma_2}{\lambda\mu}\sin\mu\varepsilon}{\sin\mu\varepsilon - \frac{\gamma_2}{\lambda\mu}\cos\mu\varepsilon} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

Die Gleichung (6) wird:

$$\Sigma e^{-\beta t}\mathfrak{D}_1 \mu + \frac{\gamma_1}{\lambda}\left(T - \mathfrak{T} - \Sigma e^{-\beta t}\mathfrak{C}_1\right) = 0$$

$$T = \mathfrak{T} + \Sigma e^{-\beta t}\mathfrak{C}_1 - \frac{\lambda}{\gamma_1}\Sigma e^{-\beta t}\mathfrak{D}_1 \mu \quad . \; . \; . \quad (18)$$

Hieraus folgt durch Differenziation

$$\frac{dT}{dt} = -\Sigma e^{-\beta t}\beta\mathfrak{C}_1 + \frac{\lambda}{\gamma_1}\Sigma e^{-\beta t}\beta\mu\mathfrak{D}_1 \quad . \; . \; . \quad (19)$$

(18) und (19) in (7) eingeführt, folgt:

$$-Lc\left(-\Sigma e^{-\beta t}\beta\mathfrak{C}_1 + \frac{\lambda}{\gamma_1}\Sigma e^{-\beta t}\beta\mu\mathfrak{D}_1\right)$$

$$= \left(\begin{matrix}\mathfrak{T} + \Sigma e^{-\beta t}\mathfrak{C}_1 - \frac{\lambda}{\gamma_1}\Sigma e^{-\beta t}\mathfrak{D}_1\mu \\ -\mathfrak{T} - \Sigma e^{-\beta t}\mathfrak{C}_1\end{matrix}\right)\gamma_1\mathfrak{F}$$

oder:

$$-Lc\left(-\Sigma e^{-\beta t}\beta\mathfrak{C}_1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}\Sigma e^{-\beta t}\beta\mu\mathfrak{D}_1\right) = \gamma_1\mathfrak{F}\left(-\frac{\lambda}{\gamma_1}\Sigma e^{-\beta t}\mathfrak{D}_1\mu\right)$$

$$-Lc\left(-\beta\mathfrak{C}_1 + \frac{\lambda}{\gamma_1}\beta\mu\mathfrak{D}_1\right) = -\mathfrak{F}\lambda\mathfrak{D}\mu$$

$$\frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{D}_1} = \lambda\mu\left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{\mathfrak{F}}{Lc\beta}\right)$$

oder wegen $\beta = a\mu^2$:

$$\frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{D}_1} = \lambda\left(\frac{\mu}{\gamma_1} - \frac{\mathfrak{F}}{Lac}\frac{1}{\mu}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

wegen (17) und (20) hat man:

$$\frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{D}_1} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}} = m = \lambda\left(\frac{\mu}{\gamma_1} - \frac{\mathfrak{F}}{Lac}\frac{1}{\mu}\right) = \frac{\cos\mu\varepsilon + \frac{\gamma_2}{\lambda\mu}\sin\mu\varepsilon}{\sin\mu\varepsilon - \frac{\gamma_2}{\lambda\mu}\cos\mu\varepsilon} \quad (21)$$

Dies ist die transcendente Gleichung für μ.

Die Gleichung (18) wird, wenn man für $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$ den Werth aus (20) einführt:

$$T = \mathfrak{T} + \Sigma e^{-\beta t} \mathfrak{D}_1 \left(+ \frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{D}_1} - \frac{\lambda}{\gamma_1} \mu \right)$$

$$T = \mathfrak{T} + \Sigma e^{-\beta t} \mathfrak{D}_1 \left(+ \frac{\lambda \mu}{\gamma_1} - \frac{\mathfrak{F} \lambda}{L a c} \frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{\gamma_1} \mu^2 \right)$$

$$T = \mathfrak{T} - \frac{\mathfrak{F} \lambda}{L a c} \Sigma e^{-\beta t} \frac{\mathfrak{D}_1}{\mu} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (22)$$

Für $\mathfrak{D}_1$ findet man, wie beim Anheizen:

$$\mathfrak{D}_1 = \frac{\int_0^{\varepsilon} (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x - \mathfrak{T})] \, (m \cos \mu x + \sin \mu x) \, d x}{\int_0^{\varepsilon} (m \cos \mu x + \sin \mu x)^2 \, d x} \quad \ldots \quad (23)$$

Dieses $\mathfrak{D}_1$ ist gleich $- \mathfrak{D}$, denn beim Anheizen steht eigentlich $\mathfrak{T} - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x)$.

Weil hier wie beim Anheizen eine genügende Genauigkeit erreicht wird, wenn man von der Summe nur das erste Glied nimmt, für welches $i = o$, demnach $\mu \varepsilon = (2 i + 1) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ ist, m dagegen sehr gross, und zwar $m = - \frac{\mathfrak{F} \lambda}{L a c} \frac{1}{\mu}$, so wird:

$$m \, \mathfrak{D}_1 = \frac{2}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x - \mathfrak{T}) \cos \mu x \, d x$$

$$\frac{\mathfrak{D}_1}{\mu} = - \frac{2}{\varepsilon} \frac{L a c}{\mathfrak{F} \lambda} \int_0^{\varepsilon} (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x - \mathfrak{T}) \cos \mu x \, d x$$

und nun wird:

$$u = \mathfrak{T} + \Sigma e^{-\beta t} \mathfrak{D}_1 \left(\frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{D}_1} \cos \mu x + \sin \mu x \right) = \mathfrak{T} + \Sigma e^{-\beta t} \mathfrak{D}_1 (m \cos \mu x + \sin \mu x)$$

$$u = \mathfrak{T} + \left[\frac{2}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x - \mathfrak{T}) \cos \mu x \, d x \right] \cos \mu x \, e^{-\beta t}$$

$$T = \mathfrak{T} + \frac{2}{\varepsilon} e^{-\beta t} \int_0^{\varepsilon} (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x - \mathfrak{T}) \cos \mu x \, d x$$

$$\int_0^{\varepsilon} (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x - \mathfrak{T}) \cos \mu x \, d x = (\mathfrak{A} - \mathfrak{T}) \int_0^{\varepsilon} \cos \mu x \, d x + \mathfrak{B} \int_0^{\varepsilon} x \cos \mu x \, d x$$

$$= \frac{\mathfrak{A}-\mathfrak{T}}{\mu} \int_0^\varepsilon \cos \mu x \, d(\mu x) + \frac{\mathfrak{B}}{\mu^2} \int_0^\varepsilon \mu x \cos \mu x \, d(\mu x)$$

$$= \frac{\mathfrak{A}-\mathfrak{T}}{\mu} \sin \mu \varepsilon + \frac{\mathfrak{B}}{\mu^2} (\mu \varepsilon \sin \mu \varepsilon + \cos \mu \varepsilon - 1)$$

$$= \frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\varepsilon-\mathfrak{T}) \sin \mu \varepsilon}{\mu} - \mathfrak{B} \frac{1-\cos \mu \varepsilon}{\mu^2}$$

oder wegen $\mu \varepsilon = \frac{\pi}{2}$, $\sin \mu \varepsilon = 1$, $\cos \mu \varepsilon = 0$:

$$\frac{2}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x-\mathfrak{T}) \cos \mu x \, dx = \left[\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\varepsilon-\mathfrak{T}}{\frac{\pi}{2\varepsilon}} - \frac{\mathfrak{B}}{\left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2} \right] \frac{2}{\varepsilon}$$

$$= \frac{4}{\pi} \left(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\varepsilon-\mathfrak{T}-\frac{2\varepsilon}{\pi} \mathfrak{B} \right)$$

$$u = \mathfrak{T} + \frac{4}{\pi} \left(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\varepsilon-\mathfrak{T}-\frac{2\varepsilon}{\pi} \mathfrak{B} \right) \cos \mu x \, e^{-\beta t}$$

$$u = \mathfrak{T} + \frac{4}{\pi} \left(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\varepsilon-\mathfrak{T}-\frac{2\varepsilon}{\pi} \mathfrak{B} \right) \cos \frac{\pi}{2} \frac{x}{\varepsilon} \, e^{-a \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 t}$$

$$T = \mathfrak{T} + \frac{4}{\pi} \left(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\varepsilon-\mathfrak{T}-\frac{2\varepsilon}{\pi} \mathfrak{B} \right) e^{-a \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 t}$$

Die Dampfheizung.

Allgemeine Beschreibung der Einrichtung einer Dampfheizung. Die wesentlichen Bestandtheile einer Dampfheizung sind: 1) eine vollständige Dampfkesseleinrichtung zur Erzeugung des Wasserdampfes; 2) ein vertikales Standrohr, um den Dampf vom Kessel aus in die verschiedenen Stockwerke des zu heizenden Gebäudes zu leiten; 3) die Wärmeröhren, welche die Wärme des Dampfes an die Luft der Räume abgeben, die geheizt werden sollen.

Tafel XVIII., Fig. 7 und 8 zeigen einen Grund- und Aufriss der Einrichtung einer Dampfheizung für ein Fabrikgebäude. A ist der in einem Anbau aufgestellte Dampfapparat, a ist das Standrohr, b_1 b_2 b_3 sind die Wärmeröhren in den einzelnen Stockwerken, die je nach der Breite des Gebäudes in jedem Stockwerk aus zwei oder drei Zweigröhren bestehen. Das Standrohr a wird gewöhnlich mit Hanf oder Stroh umwickelt, weil dasselbe nur zur Fortleitung und Vertheilung, nicht aber zur Wärmeabgabe dient. Die Wärmeröhren b_1 b_2 b_3 .... liegen nicht horizontal, sondern haben vom Standrohr