Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1863

Auflösung der transcendenten Gleichung

urn:nbn:de:bsz:31-270981

β_1 und μ_1, so verschwindet das Summenglied welchem $\beta = \beta_1$ entspricht; wir erhalten daher:

$$\int_0^\varepsilon X_1 \xi_1 \, dx = e^{-\beta_1 t} \int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x)] X_1 \, dx$$

und wenn man

$$X_1 = \mathfrak{D}_1 (m_1 \cos \mu_1 x + \sin \mu_1 x)$$

$$\xi_1 = e^{-\beta t} (m_1 \cos \mu_1 x + \sin \mu_1 x) \mathfrak{D}_1$$

setzt,

$$\int_0^\varepsilon e^{-\beta_1 t} \mathfrak{D}_1^2 (m_1 \cos \mu_1 x + \sin \mu_1 x)^2 \, dx$$

$$= e^{-\beta_1 t} \int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x)] \mathfrak{D}_1 (m_1 \cos \mu_1 x + \sin \mu_1 x) \, dx$$

und hieraus folgt endlich:

$$\mathfrak{D} = \frac{\int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x)] (m \cos \mu x + \sin \mu x)}{\int_0^\varepsilon (m \cos \mu x + \sin \mu x)^2 \, dx} \quad . \; . \; (24)$$

Aus den Gleichungen (13) und (17) findet man für $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ folgende Werthe:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{T} + \frac{\left(1 + \frac{\gamma_2}{\lambda} \varepsilon\right) (W + l c \eta - \mathfrak{T} l c)}{\left(1 + \frac{\gamma_2}{\lambda} \varepsilon\right) (l c + k_1 \mathfrak{F}_1) + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} (l c + \gamma_1 \mathfrak{F} + k_1 \mathfrak{F}_1)} \quad . \; . \; (25)$$

$$\mathfrak{B} = - \frac{\frac{\gamma_2}{\lambda} (W + l c \eta - \mathfrak{T} l c)}{\left(1 + \frac{\gamma_2}{\lambda} \varepsilon\right) (l c + k_1 \mathfrak{F}_1) + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} (l c + \gamma_1 \mathfrak{F} + k_1 \mathfrak{F}_1)} \quad . \; . \; (26)$$

Hiermit ist unsere Aufgabe in analytischer Hinsicht gelöst und es kommt nun weiter darauf an, die Lösung für praktische Rechnungen zu vereinfachen, was durch eine angenäherte Auflösung der transcendenten Gleichung geschehen kann.

Auflösung der transcendenten Gleichung. Diese Gleichung (23) ist:

$$\mu \varepsilon \tang \mu \varepsilon = \frac{\mu^2 \left(1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) - \left(b_1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} b\right)}{\mu^2 \frac{\lambda}{\gamma_1} (\mu^2 - b) - \frac{\gamma_2}{\lambda} (\mu^2 - b_1)} \mu^2 \varepsilon \quad . \; . \; (23)$$

Alles was im vorhergehenden Problem über die Auflösung der transcendenten Gleichung (53), Seite 407, gesagt wurde, findet auf die vorliegende Gleichung seine Anwendung.

Wir dürfen annehmen, dass der Gleichung (23) ein Genüge geleistet wird, wenn man setzt:

$$\mu\, \varepsilon = (2\,i + 1)\frac{\pi}{2} + \zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (27)$$

wobei ζ eine im Verhältniss zu $(2\,i+1)\frac{\pi}{2}$ kleine Grösse bezeichnet, und i jede ganze positive Zahl (Null mit eingeschlossen) bedeutet.

Nun ist:

$$\text{tang}\, \mu\, \varepsilon = \text{tang}\left[(2\,i+1)\frac{\pi}{2} + \zeta\right] = -\,\text{Cotg}\, \zeta$$

Führt man diesen Werth von $\text{tang}\, \mu\, \varepsilon$ in die Gleichung (23) ein und setzt für μ, $(2\,i+1)\frac{\pi}{2}$, vernachlässiget demnach ζ, so findet man:

$$\left\{\begin{array}{c} -\,\text{Cotg}\, \zeta = (2\,i+1)\dfrac{\pi}{2} \times \\ \dfrac{\left[(2\,i+1)\dfrac{\pi}{2}\right]^2\left(1+\dfrac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)-\left(b_1+\dfrac{\gamma_2}{\gamma_1}\,b\right)}{\left[(2\,i+1)\dfrac{\pi}{2}\right]^2\dfrac{\lambda}{\gamma_1}\left\{\left[(2\,i+1)\dfrac{\pi}{2}\right]^2 - b\right\} - \dfrac{\gamma_2}{\lambda}\left\{\left[(2\,i+1)\dfrac{\pi}{2}\right]^2 - b_1\right\}} \end{array}\right\} \qquad (28)$$

Diese Gleichung gibt annähernd den Werth der Korrektur ζ.

Das Erkalten. Betrachten wir nun den Vorgang der Abkühlung eines Raumes und der denselben einschliessenden Wände.

Die Abkühlung beginnt von dem Augenblick an, in welchem die Heizung aufhört, also von dem Augenblick an, in welchem die Luft des Raumes keine Wärme empfängt. Hat die Heizung, welche der Abkühlung vorherging, lange genug gedauert, so ist am Anfang der Abkühlung ein Beharrungszustand vorhanden, für welchen man hat, Tafel XVIII, Fig. 6,

$$W = (T_1 - \varDelta_1)\,\gamma_1\,\mathfrak{F} = (\Theta_1 - \mathfrak{T})\,\gamma_2\,\mathfrak{F} = (\varDelta_1 - \Theta_1)\,\frac{\lambda}{\varepsilon}\,\mathfrak{F} \quad . \quad . \qquad (1)$$

woraus folgt:

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = \mathfrak{T} + \dfrac{W}{\mathfrak{F}}\left(\dfrac{1}{\gamma_1} + \dfrac{1}{\gamma_2} + \dfrac{\varepsilon}{\lambda}\right) \\ \varDelta_1 = \mathfrak{T} + \dfrac{W}{\mathfrak{F}}\left(\dfrac{1}{\gamma_2} + \dfrac{\varepsilon}{\lambda}\right) \\ \Theta_1 = \mathfrak{T} + \dfrac{W}{\mathfrak{F}\,\gamma_2} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (2)$$