Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1863

Gleichzeitiges Anheizen und Ventiliren

urn:nbn:de:bsz:31-270981

demnach wird:

$$\frac{W}{W_1} = \frac{1}{1 - \frac{24 \cdot 6}{\gamma_2 \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right)} e^{-\frac{t}{222\,\varepsilon^2}}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{t}{222\,\varepsilon^2}}}$$

oder annähernd, weil $e^{-\frac{t}{222\,\varepsilon^2}} = 1 - \frac{t}{222\,\varepsilon^2}$ gesetzt werden kann, so lange t nicht gross ist,

$$\frac{W}{W_1} = \frac{222\,\varepsilon^2}{t}$$

und

$$W = \frac{\mathfrak{F}\,(T - \mathfrak{T})}{\left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right)\left(1 - e^{-\frac{t}{222\,\varepsilon^2}}\right)}$$

$$W = \frac{\mathfrak{F}\,(T - \mathfrak{T})\,222\,\varepsilon^2}{\left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right) t}.$$

Gleichzeitiges Anheizen und Ventiliren. Wir wollen noch den Fall behandeln, wenn während der Anheizung auch gleichzeitig ventilirt wird. Auch wollen wir annehmen, dass die Umschliessungsflächen theils aus Mauern, theils aus Glasfenstern bestehen.

Es sei $\mathfrak{F}$ die Mauerflächen, $\mathfrak{F}_1$ die Fensterflächen, k der Wärmedurchgangscoeffizient für die Mauer, k_1 der Coeffizient für den Durchgang der Wärme durch die Glasfenster, l die Luftmenge in Kilogrammen, welche in jeder Stunde durch die Ventilationseinrichtung dem Raum im erwärmten Zustand zugeführt, und in jeder Stunde abgeleitet wird, η die Temperatur der zugeleiteten Luft, T zur Zeit t die Temperatur der entweichenden Luft. Wir wollen auch noch annehmen, dass der Raum auch noch durch eine Ofenheizung stündlich W Wärmeeinheiten erhalte.

Unter diesen Umständen wird die Aufgabe durch folgende Gleichungen charakterisirt:

$$\frac{d\,u}{d\,t} = a\,\frac{d^2\,u}{d\,x^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$a = \frac{\lambda}{c_1\,\varrho} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\left(\frac{d\,u}{d\,x}\right)_{x=\varepsilon} + \frac{\gamma_2}{\lambda}\,(\Theta - \mathfrak{T}) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

$$\left(\frac{d u}{d x}\right)_{x=o} + \frac{\gamma_1}{\lambda}(T - \varDelta) = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$W d t + l c(\eta - T) d t - L c d T = (T - \varDelta)\,\gamma_1 \mathfrak{F} d t + \mathfrak{F}_1 k_1 (T - \mathfrak{T}) d t \quad (5)$$

Für $t = o$ soll sein $T = T_0$, $u = \varphi(x)$ . . . . . (6)

Der Gleichung (1) wird entsprochen, wenn man setzt:

$$u = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} x + \Sigma e^{-\beta t}(\mathfrak{C} \cos \mu x + \mathfrak{D} \sin \mu x) \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Hieraus folgt, weil für $x = o$, $u = \varDelta$ und für $x = \varepsilon$, $u = \Theta$ werden soll:

$$\varDelta = \mathfrak{A} + \Sigma e^{-\beta t} \mathfrak{C} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$\Theta = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\varepsilon + \Sigma e^{-\beta t}(\mathfrak{C} \cos \mu\varepsilon + \mathfrak{D} \sin \mu\varepsilon) \quad . \quad . \quad (9)$$

Durch Differenziation von (7) erhält man:

$$\frac{d u}{d x} = \mathfrak{B} - \Sigma e^{-\beta t} \mu (\mathfrak{C} \sin \mu x - \mathfrak{D} \cos \mu x) \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

demnach:

$$\left(\frac{d u}{d x}\right)_{x=o} = \mathfrak{B} + \Sigma e^{-\beta t} \mu \mathfrak{D} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

$$\left(\frac{d u}{d x}\right)_{x=\varepsilon} = \mathfrak{B} - \Sigma e^{-\beta t} \mu (\mathfrak{C} \sin \mu\varepsilon - \mathfrak{D} \cos \mu\varepsilon) \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Vermittelst dieser Ausdrücke (9) und (12) wird die Gleichung (3):

$$\left\{\begin{aligned} &\mathfrak{B} - \Sigma e^{-\beta t} \mu (\mathfrak{C} \sin \mu\varepsilon - \mathfrak{D} \cos \mu\varepsilon) \\ &+ \frac{\gamma_2}{\lambda}\left[\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\varepsilon + \Sigma e^{-\beta t}(\mathfrak{C} \cos \mu\varepsilon + \mathfrak{D} \sin \mu\varepsilon) - \mathfrak{T}\right] \end{aligned}\right\} = o$$

Da diese Gleichung für jeden Werth von t bestehen muss, hat man:

$$\mathfrak{B} + \frac{\gamma_2}{\lambda}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\varepsilon - \mathfrak{T}) = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

$$-\mu(\mathfrak{C} \sin \mu\varepsilon - \mathfrak{D} \cos \mu\varepsilon) + \frac{\gamma_2}{\lambda}(\mathfrak{C} \cos \mu\varepsilon + \mathfrak{D} \sin \mu\varepsilon) = o$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}} = \frac{\cos \mu\varepsilon + \frac{\gamma_2}{\lambda\mu} \sin \mu\varepsilon}{\sin \mu\varepsilon - \frac{\gamma_2}{\lambda\mu} \cos \mu\varepsilon} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Vermittelst (8) und (11) wird die Gleichung (4):

$$\mathrm{T} = \mathfrak{A} - \frac{\lambda}{\gamma_1}\mathfrak{B} + \Sigma e^{-\beta t}\left(\mathfrak{C} - \frac{\lambda}{\gamma_1}\mu\,\mathfrak{D}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Das Differentiale dieses Ausdruckes nach t gibt:

$$\frac{d\,T}{d\,t} = -\Sigma\, e^{-\beta t}\beta\left(\mathfrak{C} - \frac{\lambda}{\gamma_1}\mu\,\mathfrak{D}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

(15) und (16) in (5) eingeführt, findet man:

$$(W + l\,c\,\eta + \mathfrak{F}_1 k_1 \mathfrak{T}) - (l\,c + \gamma_1 \mathfrak{F} + k_1 \mathfrak{F}_1)\left[\mathfrak{A} - \frac{\lambda}{\gamma_1}\mathfrak{B} + \Sigma\, e^{-\beta t}\left(\mathfrak{C} - \frac{\lambda}{\gamma_1}\mu\,\mathfrak{D}\right)\right]$$
$$+ L\,c\,\Sigma\, e^{-\beta t}\beta\left(\mathfrak{C} - \frac{\lambda}{\gamma_1}\mu\,\mathfrak{D}\right) + \gamma_1 \mathfrak{F}\left(\mathfrak{A} + \Sigma\, e^{-\beta t}\,\mathfrak{C}\right) = 0$$

Da auch diese Gleichung für jeden Werth von t bestehen soll, so hat man:

$$W + l\,c\,\eta + \mathfrak{F}_1 k_1 \mathfrak{T} - (l\,c + \gamma_1 \mathfrak{F} + k_1 \mathfrak{F}_1)\left(\mathfrak{A} - \frac{\lambda}{\gamma_1}\mathfrak{B}\right) + \gamma_1 \mathfrak{F}\mathfrak{A} = 0 \quad (17)$$

$$-(l\,c + \gamma_1 \mathfrak{F} + k_1 \mathfrak{F}_1)\left(\mathfrak{C} - \frac{\lambda}{\gamma_1}\mu\,\mathfrak{D}\right) + L\,c\,\beta\left(\mathfrak{C} - \frac{\lambda}{\gamma_1}\mu\,\mathfrak{D}\right) + \gamma_1 \mathfrak{F}\mathfrak{C} = 0$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}} = \frac{\lambda}{\gamma_1}\mu\,\frac{L\,c\,\beta - l\,c - \gamma_1 \mathfrak{F} - k_1 \mathfrak{F}_1}{L\,c\,\beta - l\,c - k_1 \mathfrak{F}_1}$$

oder weil $\beta = a\,\mu^2$ ist:

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}} = \frac{\lambda}{\gamma_1}\mu\,\frac{L\,c\,a\,\mu^2 - (l\,c + \gamma_1 \mathfrak{F} + k_1 \mathfrak{F}_1)}{L\,c\,a\,\mu^2 - (l\,c + k_1 \mathfrak{F}_1)} \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Setzt man (14) gleich (18), so ergibt sich für μ die transcendente Gleichung:

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}} = m = \mu\,\frac{\lambda}{\gamma_1}\,\frac{\mu^2 - \dfrac{l\,c + \gamma_1 \mathfrak{F} + k_1 \mathfrak{F}_1}{L\,a\,c}}{\mu^2 - \dfrac{l\,c + k_1 \mathfrak{F}_1}{L\,a\,c}} = \frac{\cos\mu\,\varepsilon + \dfrac{\gamma_2}{\lambda\,\mu}\sin\mu\,\varepsilon}{\sin\mu\,\varepsilon - \dfrac{\gamma_2}{\lambda\,\mu}\cos\mu\,\varepsilon} \quad (19)$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{l\,c + \gamma_1 \mathfrak{F} + k_1 \mathfrak{F}_1}{L\,a\,c} = b \\[2ex] \dfrac{l\,c + k_1 \mathfrak{F}_1}{L\,a\,c} = b_1 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

so wird (19):

$$\mu\,\frac{\lambda}{\gamma_1}\,\frac{\mu^2 - b}{\mu^2 - b_1} = \frac{1 + \dfrac{\gamma_2}{\lambda\,\mu}\,\mathrm{tang}\,\mu\,\varepsilon}{\mathrm{tang}\,\mu\,\varepsilon - \dfrac{\gamma_2}{\lambda\,\mu}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Hieraus folgt:

$$\mu\,\varepsilon \operatorname{tang} \mu\,\varepsilon = \frac{1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\frac{\mu^2 - b}{\mu^2 - b_1}}{\mu\frac{\lambda}{\gamma_1}\frac{\mu^2 - b}{\mu^2 - b_1} - \frac{\gamma_2}{\mu\,\lambda}}\,\mu\,\varepsilon \quad \ldots \quad (22)$$

$$\mu\,\varepsilon \operatorname{tang} \mu\,\varepsilon = \frac{\mu^2\left(1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) - \left(b_1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\,b\right)}{\mu^2\frac{\lambda}{\gamma_1}(\mu^2 - b) - \frac{\gamma_2}{\lambda}(\mu^2 - b_1)}\,\mu^2\,\varepsilon \quad . \quad (23)$$

Nun handelt es sich abermals um die Einführung des Initial-Zustandes.

Behandelt man auch in diesem Falle die Differenzialgleichung nach dem von *Poisson* gelehrten und Seite 401 angewendeten Verfahren, so gelangt man auch hier zur Gleichung (38), Seite 402, und man findet, dass auch hier die in der grossen Klammer der Gleichung (38) enthaltenen trigonometrischen Ausdrücke verschwinden, dass dagegen

$$-\mu\,m_1 + \mu_1\,m = \mu\,\mu_1\,\frac{\lambda}{\gamma_1}\left(\frac{\mu^2 - b}{\mu^2 - b_1} - \frac{\mu_1{}^2 - b}{\mu_1{}^2 - b_1}\right)$$

und man findet statt der Gleichung (41), Seite 403:

$$\frac{d}{d\,t}\int_0^\varepsilon X_1\,\xi\,d\,x = \Sigma\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{D}_1\,e^{-\beta\,t}\,\mu\,\mu_1\,\frac{\lambda}{\gamma_1}\left(\frac{\mu^2 - b}{\mu^2 - b_1} - \frac{\mu_1{}^2 - b}{\mu_1{}^2 - b_1}\right) - a\,\mu_1{}^2\int_0^\varepsilon \xi\,X_1\,d\,x$$

Hieraus folgt:

$$\int_0^\varepsilon X_1\,\xi\,d\,x = +\,\Sigma\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{D}_1\,\frac{e^{-\beta\,t}}{\beta_1 - \beta}\,\mu\,\mu_1\,\frac{\lambda}{\gamma_1}\left(\frac{\mu^2 - b}{\mu^2 - b_1} - \frac{\mu_1{}^2 - b}{\mu_1{}^2 - b_1}\right) + \mathfrak{H}\,e^{-\beta_1\,t}$$

Für $t = o$ soll $\mu = \varphi(x)$, mithin $\xi = \varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,x)$ werden, daher erhält man:

$$\int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,x)]\,X_1\,d\,x = \Sigma\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{D}_1\,\frac{1}{\beta_1 - \beta}\,\mu\,\mu_1\,\frac{\lambda}{\gamma_1}\left(\frac{\mu^2 - b}{\mu^2 - b_1} - \frac{\mu_1{}^2 - b}{\mu_1{}^2 - b_1}\right) + \mathfrak{H}$$

Durch Elimination von $\mathfrak{H}$ folgt aus diesen zwei Gleichungen:

$$\int_0^\varepsilon X_1\,\xi\,d\,x = \left\{\begin{array}{l} \Sigma\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{D}_1\,\dfrac{e^{-\beta\,t} - e^{-\beta_1 t}}{\beta_1 - \beta}\,\mu\,\mu_1\,\dfrac{\lambda}{\gamma_1}\left(\dfrac{\mu^2 - b}{\mu^2 - b_1} - \dfrac{\mu_1{}^2 - b}{\mu_1{}^2 - b_1}\right) \\ \qquad + \, e^{-\beta_1 t}\displaystyle\int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,x)]\,X_1\,d\,x \end{array}\right\}$$

Setzt man für das allgemeine β und μ die individuellen Werthe

β_1 und μ_1, so verschwindet das Summenglied welchem $\beta = \beta_1$ entspricht; wir erhalten daher:

$$\int_0^\varepsilon X_1 \, \xi_1 \, dx = e^{-\beta_1 t} \int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\, x)] \, X_1 \, dx$$

und wenn man

$$X_1 = \mathfrak{D}_1 \, (m_1 \cos \mu_1 \, x + \sin \mu_1 \, x)$$

$$\xi_1 = e^{-\beta t} \, (m_1 \cos \mu_1 \, x + \sin \mu_1 \, x) \, \mathfrak{D}_1$$

setzt,

$$\int_0^\varepsilon e^{-\beta_1 t} \mathfrak{D}_1^{\,2} \, (m_1 \cos \mu_1 \, x + \sin \mu_1 \, x)^2 \, dx$$

$$= e^{-\beta_1 t} \int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\, x)] \, \mathfrak{D}_1 \, (m_1 \cos \mu_1 \, x + \sin \mu_1 \, x) \, dx$$

und hieraus folgt endlich:

$$\mathfrak{D} = \frac{\int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\, x)] \, (m \cos \mu \, x + \sin \mu \, x)}{\int_0^\varepsilon (m \cos \mu \, x + \sin \mu \, x)^2 \, dx} \quad . \; . \; (24)$$

Aus den Gleichungen (13) und (17) findet man für $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ folgende Werthe:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{T} + \frac{\left(1 + \frac{\gamma_2}{\lambda} \, \varepsilon\right) (W + l \, c \, \eta - \mathfrak{T} \, l \, c)}{\left(1 + \frac{\gamma_2}{\lambda} \, \varepsilon\right) (l \, c + k_1 \mathfrak{F}_1) + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} (l \, c + \gamma_1 \, \mathfrak{F} + k_1 \mathfrak{F}_1)} \quad . \; . \; (25)$$

$$\mathfrak{B} = - \frac{\frac{\gamma_2}{\lambda} (W + l \, c \, \eta - \mathfrak{T} \, l \, c)}{\left(1 + \frac{\gamma_2}{\lambda} \, \varepsilon\right) (l \, c + k_1 \mathfrak{F}_1) + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} (l \, c + \gamma_1 \, \mathfrak{F} + k_1 \mathfrak{F}_1)} \quad . \; . \; (26)$$

Hiermit ist unsere Aufgabe in analytischer Hinsicht gelöst und es kommt nun weiter darauf an, die Lösung für praktische Rechnungen zu vereinfachen, was durch eine angenäherte Auflösung der transcendenten Gleichung geschehen kann.

Auflösung der transcendenten Gleichung. Diese Gleichung (23) ist:

$$\mu \, \varepsilon \, \operatorname{tang} \mu \, \varepsilon = \frac{\mu^2 \left(1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) - \left(b_1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \, b\right)}{\mu^2 \frac{\lambda}{\gamma_1} (\mu^2 - b) - \frac{\gamma_2}{\lambda} (\mu^2 - b_1)} \, \mu^2 \varepsilon \quad . \; . \; (23)$$