Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1863

Vereinfachung der Resultate

urn:nbn:de:bsz:31-270981

$$\mathfrak{W}_{t=0} = \mathfrak{F}\,\varrho\,c_1 \left[\mathfrak{A}\,\varepsilon + \mathfrak{B}\,\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\gamma_1}{\lambda}\,\Sigma\,\frac{\mathfrak{D}}{\mu^2}\,(m \cos \mu\,\varepsilon + \sin \mu\,\varepsilon) + \Sigma\,\frac{\mathfrak{D}}{\mu} \right]$$

Diese Wärmemenge ist aber auch gleich

$$\int_0^{\varepsilon} \mathfrak{F}\,d\,x\,\varrho\,c_1\,\varphi(x) = \mathfrak{F}\,\varrho\,c_1 \int_0^{\varepsilon} \varphi(x)\,d\,x$$

demnach erhalten wir:

$$\int_0^{\varepsilon} \varphi(x)\,d\,x = \mathfrak{A}\,\varepsilon + \mathfrak{B}\,\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\gamma_1}{\lambda}\,\Sigma\,\frac{\mathfrak{D}}{\mu^2}\,(m \cos \mu\,\varepsilon + \sin \mu\,\varepsilon) + \Sigma\,\frac{\mathfrak{D}}{\mu} \quad (52)$$

Vereinfachung der Resultate. Durch die aufgefundenen Resultate ist zwar das vorgelegte Problem analytisch gelöst, allein diese Lösung ist für praktische Zwecke so viel wie keine Lösung, denn durch diesen Wust von Rechnungen ist man doch kaum im Stande, den Erwärmungszustand der Mauern und der eingeschlossenen Luft zu bestimmen. Wir wollen daher sehen, ob es nicht möglich ist, durch Annäherungen vorwärts zu dringen.

Wir betrachten zu diesem Behufe zunächst die transcendente Gleichung (36).

Setzt man zur Abkürzung $\mu\,\varepsilon = x$, $\mu\,\varepsilon \tang \mu\,\varepsilon = y$, so findet man aus jener Gleichung (36):

$$y = x \tang x = \frac{x^2 \left(1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) - \frac{\mathfrak{F}\,\lambda\,\varepsilon}{L\,a\,c}\,\frac{\gamma_2\,\varepsilon}{\lambda}}{x^2\,\frac{\lambda}{\gamma_1\,\varepsilon} - \left(\frac{\mathfrak{F}\,\lambda\,\varepsilon}{L\,a\,c} + \frac{\gamma_2\,\varepsilon}{\lambda}\right)} \quad \ldots \quad (53)$$

Konstruirt man die beiden Kurven, die durch diesen Ausdruck bestimmt werden, so bestimmen die Abscissen ihrer Durchschnittspunkte die Wurzeln der transcendenten Gleichung (36):

Die Kurve k, deren Gleichung $y = x \tang x$ ist, besteht aus unendlich vielen congruenten Parthien $k_0\ k_1\ k_2 \ldots$, Tafel XVIII., Fig. 5, die nach oben und nach unten assymptotisch verlaufen. Die Kurve H, deren Gleichung die Form hat:

$$y = \frac{x^2\,\alpha - \beta}{x^2\,\alpha_1 - \beta_1}$$

besteht aus zwei Parthien H_1 und H_2. Der Zweig H_1 schneidet die Abscissenaxe in einem Punkt, dessen Abscisse gleich $O\,m = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ ist, und fällt bei $x = O\,n = \sqrt{\frac{\beta_1}{\alpha_1}}$ assymptotisch herab. Der Zweig H_2

beginnt bei $x = On = \sqrt{\frac{\beta_1}{\alpha_1}}$ mit einer vertikalen Assymptote und verläuft für $x = \infty$ horizontal aus.

Man kann an der Figur erkennen, dass die Abscissen der Durchnittspunkte $a_0\ a_1\ a_2 \ldots$ ausgedrückt werden können durch:

$$\varepsilon\mu = (2i+1)\frac{\pi}{2} + \xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

wobei i jede beliebige positive ganze Zahl, 0 mit eingeschlossen und ξ eine im Verhältniss zu $(2i+1)\frac{\pi}{2}$ sehr kleine Grösse bezeichnet, die auf folgende Weise bestimmt wird. Es ist ganz genau $\operatorname{tang} \varepsilon\mu = -\operatorname{Cotg} \xi$, die Gleichung (53) kann daher geschrieben werden

$$-\left[(2i+1)\frac{\pi}{2} + \xi\right]\operatorname{Cotg}\xi = \frac{\left[(2i+1)\frac{\pi}{2} + \xi\right]^2\left(1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) - \frac{\mathfrak{F}\lambda\varepsilon}{L a c}\frac{\gamma_2\varepsilon}{\lambda}}{\left[(2i+1)\frac{\pi}{2} + \xi\right]^2\frac{\lambda}{\gamma_1\varepsilon} - \left(\frac{\mathfrak{F}\lambda\varepsilon}{L a c} + \frac{\gamma_2\varepsilon}{\lambda}\right)} \quad (55)$$

Vernachlässigt man ξ gegen $(2i+1)\frac{\pi}{2}$, so wird dieser Ausdruck:

$$-\operatorname{Cotg}\xi = \frac{1}{2i\pi}\frac{(2i+1)^2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left(1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) - \frac{\mathfrak{F}\lambda\varepsilon}{L a c}\frac{\gamma_2\varepsilon}{\lambda}}{(2i+1)^2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\frac{\lambda}{\gamma_1\varepsilon} - \left(\frac{\mathfrak{F}\lambda\varepsilon}{L a c} + \frac{\gamma_1\varepsilon}{\lambda}\right)} \quad . \quad (56)$$

Wir wollen diese Formel auf einen speziellen Fall anwenden, um zu zeigen, dass die Annahme (54) zulässig ist.

Ein Raum von 1000^{Kbm} sei umschlossen von Mauern von 1^m Dicke und 600^{qm} Oberfläche. In diesem Fall ist zu setzen, wenn die Stunde als Zeiteinheit angenommen wird:

$$\mathfrak{F} = 600, \quad L = 1000 \times 1{\cdot}3 = 1300^{Klg}, \quad c = 0{\cdot}237, \quad c_1 = 0{\cdot}2$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 18, \quad \lambda = 0{\cdot}8, \quad \varrho = 2000, \quad a = \frac{\lambda}{c_1\varrho} = \frac{1}{500}, \quad \varepsilon = 1^m$$

$$\frac{\lambda}{\gamma_1} = 0{\cdot}04, \quad \frac{\gamma_2}{\lambda} = 22{\cdot}5, \quad \frac{\mathfrak{F}\lambda}{L a c} = 800$$

und man findet:

$$-\operatorname{Cotg}\xi = \frac{31{\cdot}8}{2i+1}\frac{(2i+1)^2 - 3648}{(2i+1)^2 - 8335} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

Für $i =$	0	1	2	3	4	5	.... ∞
wird $\operatorname{Cotg}\xi =$	-14	$-4{\cdot}6$	-3	-2	$-1{\cdot}5$	$-1{\cdot}2$	 0
$\xi =$	-4^0	-12^0	-18^0	-26^0	-33^0	-40^0	... 90^0
$\frac{(2i+1)\frac{\pi}{2} + \xi}{(2i+1)\frac{\pi}{2}} =$	0·96	0·96	0·96	0·96	0 96	0·96	1·00

Hieraus sieht man, dass die Annahme (54) zulässig ist und dass man sogar setzen kann:

$$\mu\,\varepsilon = (2\,i + 1)\,\frac{\pi}{2} + \xi = 0.96\,(2\,i + 1)\,\frac{\pi}{2} \quad . \;\; . \;\; . \;\; . \quad (57)$$

Für diesen Werth von $\mu\,\varepsilon$ wird

$$m = \frac{\lambda\,\mu}{\gamma_1} - \frac{\mathfrak{F}\,\lambda}{L\,a\,c}\,\frac{1}{\mu} = 0.06\,(2\,i + 1)\,\frac{1}{\varepsilon} - \frac{533\,\varepsilon}{2\,i + 1} \quad . \quad (58)$$

und nun findet man

für $i =$	1	2	4	10	46	100	144	200	500
$\mu\,\varepsilon =$	4·5	7·5	13·5	31·5	141	302	433	601	1500
$m =$	− 176	− 106	− 58	− 25	0	+ 9·4	+ 15·5	+ 22·7	+ 60

Die Grösse m hat also sowohl für kleine als auch für grosse Werthe von i einen grossen numerischen Werth. Für $i = 46$ wird jedoch $m = 0$ und ind der Nähe von $i = 46$ wird m sehr klein.

Berechnen wir noch den Werth der Exponentialgrösse $e^{-\beta t}$ welche in unseren Formeln erscheint. Es ist:

$$\beta = a\,\mu^2 = \frac{\lambda}{c_1\,\varrho}\left[\frac{0.96\,(2\,i + 1)}{\varepsilon}\,\frac{\pi}{2}\right]^2$$

$$\beta = \frac{(2\,i + 1)^2}{222} \text{ demnach } e^{-\beta t} = e^{-\frac{(2\,i + 1)^2\,t}{222}} \quad . \quad (59)$$

Man findet:

für $i =$	0	7	46	100
$\mu\,\varepsilon =$	1·5	22·5	141	302
$m =$	− 533	− 34	0	+ 9·4
$\beta =$	122	1	39	182

Aus diesen Werthen von β ersieht man, dass in der Summe alle Glieder vernachlässiget werden dürfen, für welche i gleich oder grösser als 7 ist. Hierdurch werden aber unsere allgemeinen Ausdrücke ungemein vereinfacht, denn nun wird vermöge des Ausdruckes (51), wenn m numerisch gross ist,

$$m\,\mathfrak{D} = \frac{2}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}[\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,x)]\,\cos\mu\,x\,d\,x \quad . \;\; . \;\; . \;\; . \quad (60)$$

$$\frac{\mathfrak{D}}{\mu} = \frac{2}{\varepsilon}\,\frac{\int_0^{\varepsilon}[\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,x)]\,\cos\mu\,x\,d\,x}{\frac{0.09\,(2\,i + 1)^2}{\varepsilon^2} - 800}$$

oder auch, weil $2i+1$ nicht grösser als 15 genommen zu werden braucht

$$\frac{\mathfrak{D}}{\mu} = -\frac{1}{400\,\varepsilon}\int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,x)] \cos\mu x \, dx \quad . \; . \; . \qquad (61)$$

oder auch, weil $m\,\mu$ gleich $-\frac{\mathfrak{F}\,\lambda}{L\,a\,c}$ wird, wenn i nicht grösser als 7 ist

$$\frac{\mathfrak{D}}{\mu} = -\frac{L\,a\,c}{\mathfrak{F}\,\lambda}\,\frac{2}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,x)] \cos\mu x \, dx \quad . \; . \qquad (62)$$

Wir erhalten nunmehr folgende Resultate:

$$\mu\,\varepsilon = 0{\cdot}96\,(2i+1)\,\frac{\pi}{2}$$

$$\left.\begin{cases} u = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,x \\ + \dfrac{2}{\varepsilon}\,\Sigma\, e^{-\frac{\overline{0\,96}^{\,2}\,\pi^2\,\lambda}{4\,c_1\,\varrho\,\varepsilon^2}(2i+1)^2 t} \left\{\cos\mu x \displaystyle\int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,x)] \cos\mu x \, dx\right\} \end{cases}\right\} \qquad (63)$$

$$\left.\begin{cases} T = \mathfrak{T} + \dfrac{W}{\mathfrak{F}}\left(\dfrac{1}{\gamma_1} + \dfrac{1}{\gamma_2} + \dfrac{\varepsilon}{\lambda}\right) \\ + \dfrac{2}{\varepsilon}\,\Sigma\, e^{-\frac{\overline{0\,96}^{\,2}\,\pi^2\,\lambda}{4\,c_1\,\varrho\,\varepsilon^2}(2i+1)^2 t} \left\{\displaystyle\int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,x)] \cos\mu x \, dx\right\} \end{cases}\right\} \qquad (64)$$

Diese zwei Gleichungen sind nicht im Widerspruch; sie harmoniren, denn setzt man in (63) $x = 0$, so wird $u = \Delta$, demnach

$$\Delta = \mathfrak{A} + \frac{2}{\varepsilon}\,\Sigma\, e^{-\beta t}\int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,x)] \cos\mu x \, dx$$

Zieht man diesen Ausdruck von T ab, so findet man:

$$T - \Delta = \mathfrak{T} + \frac{W}{\mathfrak{F}}\left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right) - \mathfrak{A}$$

oder wegen (12)

$$T - \Delta = \frac{W}{\mathfrak{F}}\,\frac{1}{\gamma_1}, \qquad W = \mathfrak{F}\,\gamma_1\,(T - \Delta)$$

was richtig ist.

Für die früher angegebenen numerischen Daten wird:

$$u = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,x + \frac{2}{\varepsilon}\,\Sigma\, e^{-\left(\frac{2i+1}{\varepsilon}\right)^2 \frac{t}{222}} \left\{\cos\mu x \int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,x)] \cos\mu x \, dx\right\} \qquad (65)$$

$$\left\{\begin{array}{c} T = \mathfrak{T} + \frac{W}{\mathfrak{F}}\left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right) \\ + \frac{2}{\varepsilon}\, \Sigma\; e^{-\left(\frac{2i+1}{\varepsilon}\right)^2 \frac{t}{222}} \int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\, x)] \cos \mu\, x\, d\, x \end{array}\right\} \quad . \; . \quad (66)$$

$$\mu\, \varepsilon = 0{\cdot}96\; (2\, i + 1) \frac{\pi}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (67)$$

Wir wollen diese Ergebnisse noch mehr spezialisiren, indem wir annehmen, dass die Temperatur in allen Punkten der Mauer, so wie auch die Temperatur der eingeschlossenen Luft beim Beginn der Anheizung constant und gleich der äusseren Lufttemperatur ist. Wir setzen also:

$$\varphi(x) = \mathfrak{T}, \quad T_0 = \mathfrak{T} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (68)$$

und dann wird:

$$\int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\, x)] \cos \mu\, x\, d\, x = \int_0^\varepsilon (\mathfrak{T} - \mathfrak{A} - \mathfrak{B}\, x) \cos \mu\, x\, d\, x$$

$$= (\mathfrak{T} - \mathfrak{A}) \int_0^\varepsilon \cos \mu\, x\, d\, x - \mathfrak{B} \int_0^\varepsilon x \cos \mu\, x\, d\, x$$

$$= (\mathfrak{T} - \mathfrak{A})\; \frac{\sin \mu\, \varepsilon}{\mu} - \mathfrak{B}\left(\frac{\varepsilon \sin \mu\, \varepsilon}{\mu} + \frac{\cos \mu\, \varepsilon - 1}{\mu^2}\right)$$

$$= (\mathfrak{T} - \mathfrak{A} - \mathfrak{B}\, \varepsilon) \frac{\sin \mu\, \varepsilon}{\mu} - \mathfrak{B} \frac{\cos \mu\, \varepsilon - 1}{\mu^2}$$

und wegen (12) und (13):

$$= -\; \frac{W}{\mathfrak{F}\, \gamma_2}\; \frac{\sin \mu\, \varepsilon}{\mu} + \frac{W}{\mathfrak{F}\, \lambda}\; \frac{\cos \mu\, \varepsilon - 1}{\mu^2}$$

Hierdurch wird (65) und (66):

$$\left\{\begin{array}{c} u = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\, x \\ + \frac{2}{\varepsilon}\, \frac{W}{\mathfrak{F}\, \gamma_2}\; \Sigma\; e^{-\left(\frac{2i+1}{\varepsilon}\right)^2 \frac{t}{222}} \frac{\cos \mu\, x}{\mu} \left[\frac{\gamma_2}{\lambda\, \mu} (\cos \mu\, \varepsilon - 1) - \sin \mu\, \varepsilon\right] \end{array}\right\} \quad (69)$$

$$\left\{\begin{array}{c} T = \mathfrak{T} + \frac{W}{\mathfrak{F}}\left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right) \\ + \frac{2}{\varepsilon}\, \frac{W}{\mathfrak{F}\, \gamma_2}\; \Sigma\; e^{-\left(\frac{2i+1}{\varepsilon}\right)^2 \frac{t}{222}} \frac{1}{\mu} \left[\frac{\gamma_2}{\lambda\, \mu} (\cos \mu\, \varepsilon - 1) - \sin \mu\, \varepsilon\right] \end{array}\right\} \quad (70)$$

oder besser geschrieben

$$\left.\begin{cases} u = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,x \\ -2\,\dfrac{W}{\mathfrak{F}\gamma_2}\,\Sigma\, e^{-\left(\frac{2i+1}{\varepsilon}\right)^2 \frac{t}{222}}\,\dfrac{\cos\mu x}{\mu\varepsilon}\left[\sin\mu\varepsilon + \dfrac{\gamma_2}{\lambda\mu}(1-\cos\mu\varepsilon)\right] \end{cases}\right\} \quad (69)$$

$$\left.\begin{cases} T = \mathfrak{T} + \dfrac{W}{\mathfrak{F}}\left(\dfrac{1}{\gamma_1} + \dfrac{1}{\gamma_2} + \dfrac{\varepsilon}{\lambda}\right) \\ -2\,\dfrac{W}{\mathfrak{F}\gamma_2}\,\Sigma\, e^{-\left(\frac{2i+1}{\varepsilon}\right)^2 \frac{t}{222}}\,\dfrac{1}{\mu\varepsilon}\left[\sin\mu\varepsilon + \dfrac{\gamma_2}{\lambda\mu}(1-\cos\mu\varepsilon)\right] \end{cases}\right\} \quad (70)$$

Wir wollen diese Ausdrücke einer Prüfung durch eine numerische Rechnung unterwerfen.

Für die früher angegebenen Daten, nämlich für:

$$\mathfrak{F} = 600,\quad L = 1300,\quad c = 0{\cdot}237,\quad c_1 = 0{\cdot}2,\quad \gamma_1 = \gamma_2 = 18,\quad \lambda = 0{\cdot}8$$

$$\varrho = 2000,\quad a = \frac{\lambda}{c_1\varrho} = \frac{1}{500},\quad \varepsilon = 1,\quad \frac{\lambda}{\gamma_1} = 0{\cdot}04,\quad \frac{\gamma_2}{\lambda} = 22{\cdot}5$$

$\dfrac{\mathfrak{F}\lambda}{L a c} = 800$ und wenn man annimmt: $\mathfrak{T} = -16^\circ$, $T_1 = +16^\circ$, findet man:

$$\frac{W}{\mathfrak{F}} = \frac{T_1 - \mathfrak{T}}{\dfrac{1}{\gamma_1} + \dfrac{1}{\gamma_2} + \dfrac{\varepsilon}{\lambda}} = 23{\cdot}5,\quad \frac{W}{\mathfrak{F}\gamma_2} = 1{\cdot}3,\ \frac{2}{\varepsilon}\ \frac{W}{\mathfrak{F}\gamma_2} = 2{\cdot}6$$

$i =$	0	1	2	3	4	5
$\overline{\mu\varepsilon}^0 =$	90 - 3·6	3×90—11	5×90—18	7×90—25	9×90—32	11×90—40
$\overline{\mu\varepsilon} =$	1·5	4·5	7·5	10·5	13·5	16·5
$\dfrac{\gamma_2}{\lambda\mu} =$	15	5	3	2·14	1·66	1·36
$\beta =$	$\frac{1}{222}$	$\frac{1}{24{\cdot}6}$	$\frac{1}{8{\cdot}8}$	$\frac{1}{4{\cdot}53}$	$\frac{1}{2{\cdot}74}$	$\frac{1}{1{\cdot}83}$
$\sin\mu\varepsilon =$	+0·99	— 0·98	+0·95	—0·90	+0·84	—0·77
$1-\cos\mu\varepsilon =$	0·939	1·19	0·69	1·42	0·47	1·64
$\dfrac{\sin\mu\varepsilon + \frac{\gamma_2}{\lambda\mu}(1+\cos\mu\varepsilon)}{\mu\varepsilon}$	10	1·1	0·4	0·20	0·12	0·09

Setzen wir in (70) $t = o$, so wird $T = \mathfrak{T}$, demnach muss werden

$$\frac{W}{\mathfrak{F}}\left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right) = 2\,\frac{W}{\mathfrak{F}\gamma_2}\,\Sigma\,\frac{\sin\mu\varepsilon + \frac{\gamma_2}{\lambda\mu}(1-\cos\mu\varepsilon)}{\mu\varepsilon}$$

Es ist aber

$$\frac{W}{\mathfrak{F}}\left(\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}+\frac{\varepsilon}{\lambda}\right)=32$$

dagegen

$$2\,\frac{W}{\mathfrak{F}\,\gamma_2}\,\Sigma\,\frac{\sin\mu\,\varepsilon+\frac{\lambda_2}{\mu\,\varepsilon}(1-\cos\mu\,\varepsilon)}{\mu\,\varepsilon}=2{\cdot}6\,(10+1{\cdot}1+0{\cdot}4+0{\cdot}12+0{\cdot}09+)$$
$$=33^0$$

was gewiss sehr gut stimmt, wenn man berücksichtiget, dass die transcendente Gleichung nur annähernd gelöst worden ist.

Berechnen wir noch vermittelst (70) die Temperaturen für verschiedene Werthe von t

$t=o$	1	2	3	4	5	Stunden
$T=-16^\circ$	. . .	. . .	. . .	. . .	$+5^\circ$	

Man kann in der Vereinfachung der Ausdrücke für u und T noch weiter gehen. Wie diese numerische Rechnung zeigt, ist nur das dem Werth $i=o$ entsprechende Glied der Summe Σ von Belang, man begeht daher keinen merklichen Fehler, wenn wir von der Summe nur das erste Glied (für $i=o$) nehmen.

Unter dieser Voraussetzung erhalten wir:

$$u=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\,x-24{\cdot}6\,\frac{W}{\mathfrak{F}\,\gamma_2}\cos\left(86{\cdot}4\;\frac{x}{\varepsilon}\right)\,e^{-\frac{t}{222\,\varepsilon^2}}$$

$$T=\mathfrak{T}+\frac{W}{\mathfrak{F}}\left(\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}+\frac{\varepsilon}{\lambda}\right)-24{\cdot}6\,\frac{W}{\mathfrak{F}\,\gamma_2}\,e^{-\frac{t}{222\,\varepsilon^2}}$$

Hieraus folgt auch

$$W=\frac{(T-\mathfrak{T})\,\mathfrak{F}}{\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}+\frac{\varepsilon}{\lambda}-\frac{24{\cdot}6}{\gamma_2}\,e^{-\frac{t}{222\,\varepsilon^2}}}$$

Diese Gleichung bestimmt die Wärmemenge, welche während des Anheizens in jeder Stunde entwickelt werden muss, damit nach Verlauf der Zeit von t Stunden eine Temperatur T eintritt. Nennt man W_I die Wärmemenge, welche im Beharrungszustand (beim Nachheizen) in jeder Stunde entwickelt werden muss, damit die Temperatur T, nachdem sie einmal eingetreten ist, dauernd verbleibt, so ist:

$$W_I=\frac{\mathfrak{F}\,(T-\mathfrak{T})}{\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}+\frac{\varepsilon}{\lambda}}$$

demnach wird:

$$\frac{W}{W_1} = \frac{1}{1 - \frac{24 \cdot 6}{\gamma_2\left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right)} e^{-\frac{t}{222\,\varepsilon^2}}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{t}{222\,\varepsilon^2}}}$$

oder annähernd, weil $e^{-\frac{t}{222\,\varepsilon^2}} = 1 - \frac{t}{222\,\varepsilon^2}$ gesetzt werden kann, so lange t nicht gross ist,

$$\frac{W}{W_1} = \frac{222\,\varepsilon^2}{t}$$

und

$$W = \frac{\mathfrak{F}\,(T - \mathfrak{T})}{\left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right)\left(1 - e^{-\frac{t}{222\,\varepsilon^2}}\right)}$$

$$W = \frac{\mathfrak{F}\,(T - \mathfrak{T})\,222\,\varepsilon^2}{\left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right) t}.$$

Gleichzeitiges Anheizen und Ventiliren. Wir wollen noch den Fall behandeln, wenn während der Anheizung auch gleichzeitig ventilirt wird. Auch wollen wir annehmen, dass die Umschliessungsflächen theils aus Mauern, theils aus Glasfenstern bestehen.

Es sei $\mathfrak{F}$ die Mauerflächen, $\mathfrak{F}_1$ die Fensterflächen, k der Wärmedurchgangscoeffizient für die Mauer, k_1 der Coeffizient für den Durchgang der Wärme durch die Glasfenster, l die Luftmenge in Kilogrammen, welche in jeder Stunde durch die Ventilationseinrichtung dem Raum im erwärmten Zustand zugeführt, und in jeder Stunde abgeleitet wird, η die Temperatur der zugeleiteten Luft, T zur Zeit t die Temperatur der entweichenden Luft. Wir wollen auch noch annehmen, dass der Raum auch noch durch eine Ofenheizung stündlich W Wärmeeinheiten erhalte.

Unter diesen Umständen wird die Aufgabe durch folgende Gleichungen charakterisirt:

$$\frac{d\,u}{d\,t} = a\,\frac{d^2\,u}{d\,x^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$a = \frac{\lambda}{c_1\,\varrho} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\left(\frac{d\,u}{d\,x}\right)_{x=\varepsilon} + \frac{\gamma_2}{\lambda}\,(\Theta - \mathfrak{T}) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$