Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1863

Das Anheizen

urn:nbn:de:bsz:31-270981

punktes mit der Zeit zu. Wollte man auf alle diese Verhältnisse sehr genau Rücksicht nehmen und ganz rationelle Regeln aufstellen, durch welche unter allen Umständen die von einem Heizapparat zu liefernde Wärmemenge berechnet werden könnte, so würde man sich in höchst weitläufige, höchst verwickelte analytische Rechnungen einlassen müssen. Für die praktischen Zwecke genügt es, wenn man zuerst die Wärmeverluste berechnet, welche bei einer continuirlichen Heizung (der ein Beharrungszustand entspricht) eintreten, und dann diese Wärmemenge mit einem angemessenen Coeffizienten f multiplizirt, der wohl nicht anders als nach dem Gefühl geschätzt werden kann. Wir wollen annehmen:

1) für continuirliche Heizung bei Tag und bei Nacht $f = 1$,
2) für continuirliche Heizung bei Tag und Nichtheizung bei Nacht $f = 1{\cdot}2$,
3) wenn nur in einzelnen Stunden geheizt werden soll, nach Umständen $f = 1{\cdot}5$ bis $2{\cdot}0$.

Das Anheizen. Wenn die Heizung eines Raumes beginnt, herrscht in demselben eine gewisse Temperatur, und befinden sich die Umschliessungswände in einem gewissen Erwärmungszustand. So wie die Heizung fortdauert, ändert sich allmählig sowohl die Temperatur der Luft im Raume, wie auch der Erwärmungszustand der Umschliessungswände, und erst nachdem die Heizung lange fortgesetzt worden ist, tritt (eine gleichförmige Heizung vorausgesetzt) ein gewisser Beharrungszustand ein, in welchem die Lufttemperatur des Raumes constant bleibt und der Erwärmungszustand der Einschliessungswände ebenfalls. Wir wollen diese Vorgänge, welche bei diesem Anheizen vorkommen, durch Rechnung zu bestimmen suchen.

Es sei Tafel XVIII., Fig. 4 A B C D ein Stück der Einschliessungswände. Wenn die Heizung beginnt, sei: T_0 die Temperatur der Luft, welche der Raum enthält, $u = f(x)$ das Erwärmungsgesetz der Wand, wobei $x = \overline{DF}$, welches Gesetz wir als gegeben betrachten. Nachdem das Anheizen eine Zeit t gedauert hat (wobei durch den Heizapparat in jeder Zeiteinheit eine constante Wärmemenge W abgegeben wird), sei: T die Temperatur der Luft im Raum, ferner Δ, U, Θ die Temperaturen der Wand in den Punkten, welche von C D um o, x, ε abstehen (ε die Wanddicke).

Nachdem die Heizung sehr lange oder wenn man will, unendlich lange fortgedauert hat, sind die Temperaturen für $x = o$, $x = x$, $x = \varepsilon$, beziehungsweise Δ_1 U_1 Θ_1, ferner die Temperatur der Luft im Raum, T_1. Die äussere Temperatur sei constant gleich $\mathfrak{T}$.

Nennen wir ferner: ϱ das Gewicht von einer Kubikeinheit des Wandmaterials, c_1 die Wärmekapazität dieses Materials, λ den Wärmeleitungscoeffizienten, γ_1 γ_2 die Wärmeübergangscoeffizienten durch die Ebenen CD und AB, L die constante im Raum enthaltene Luftmenge in Kilogrammen, c die Wärmekapazität der Luft, welche der Raum enthält, $\mathfrak{F}$ die totale innere Fläche der Einschliessungswände.

Die Gleichungen, welche die Lösung unseres Problems geben, sind nun folgende:

$$\frac{du}{dt} = a \frac{d^2 u}{dx^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$a = \frac{\lambda}{c_1 \varrho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=\varepsilon} + \frac{\gamma_2}{\lambda}(\Theta - \mathfrak{T}) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=0} + \frac{\gamma_1}{\lambda}(T - \varDelta) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$W\,dt - L\,c\,dT = (T - \varDelta)\,\gamma_1\,\mathfrak{F}\,dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Für $t = 0$ soll $T = T_0$, $u = \varphi(x)$ werden . . . . (6)

Für $t = \infty$ soll ein Beharrungszustand . . . . (7)

eintreten, in welchem $u_1 = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,x$ wird.

Die erste dieser Gleichungen drückt die Temperaturänderung aus, die dem Zeitelement dt an irgend einem Ort im Innern der Mauer entspricht.

Die Gleichung (3) bezieht sich auf das Entweichen der Wärme durch die Ebene CD.

Die Gleichung (4) bezieht sich auf den Eintritt der Wärme durch AB. Die Gleichung (5) drückt aus, dass die Differenz zwischen der Wärme $W\,dt$, die im Zeitelement produzirt wird und der Wärme $L\,c\,dt$, welche die Luft aufnimmt, durch die Ebene AB in die Mauer geht.

Da für $t = \infty$ ein Beharrungszustand eintritt, so hat man für denselben:

$$W = (T_1 - \varDelta_1)\,\gamma_1\,\mathfrak{F} = (\Theta_1 - \mathfrak{T})\,\gamma_2\,\mathfrak{F} = (\varDelta_1 - \Theta_1)\frac{\lambda}{\varepsilon}\,\mathfrak{F} \quad . \quad (8)$$

Hieraus findet man ohne Schwierigkeit:

$$T_1 = \mathfrak{T} + \frac{W}{\mathfrak{F}}\left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$\Delta_1 = \mathfrak{T} + \frac{W}{\mathfrak{F}}\left(\frac{1}{\gamma_2} + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right) \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

$$\Theta_1 = \mathfrak{T} + \frac{W}{\mathfrak{F}\gamma_2} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

demnach:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{T} - \frac{W}{\mathfrak{F}}\left(\frac{1}{\gamma_2} + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right) \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

$$\mathfrak{B} = -\frac{W}{\mathfrak{F}\lambda} \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

$$u_1 = \mathfrak{T} + \frac{W}{\mathfrak{F}}\left(\frac{1}{\gamma_2} + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right) - \frac{W}{\mathfrak{F}\lambda}x \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Den Bedingungen (1) und (7) wird entsprochen, wenn man setzt:

$$u = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,x + \Sigma\, e^{-\beta t}(\mathfrak{C}\cos\mu x + \mathfrak{D}\sin\mu x) \quad \ldots \quad (15)$$

wobei:

$$\beta = a\,u^2 \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

μ, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ sind vorläufig noch ganz unbestimmte Grössen, Σ drückt aus, dass die Bedingungen (1) und (7) durch eine Summe von Ausdrücken von der Form $e^{-\beta t}(\mathfrak{C}\cos\mu x + \mathfrak{D}\sin\mu x)$ entsprochen werden kann.

Aus dem Ausdruck (15) folgt:

$$\Delta = \mathfrak{A} + \Sigma\, e^{-\beta t}\,\mathfrak{C} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

$$\Theta = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,\varepsilon + \Sigma\, e^{-\beta t}(\mathfrak{C}\cos\mu\varepsilon + \mathfrak{D}\sin\mu\varepsilon) \quad \ldots \quad (18)$$

Durch Differenziation von (15) folgt:

$$\frac{du}{dx} = \mathfrak{B} - \Sigma\, e^{-\beta t}\,\mu(\mathfrak{C}\sin\mu x - \mathfrak{D}\cos\mu x) \quad \ldots \quad (19)$$

Setzt man $x = o$ und $x = \varepsilon$, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=o} &= \mathfrak{B} + \Sigma\, e^{-\beta t}\,\mu\,\mathfrak{D} \\ \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=\varepsilon} &= \mathfrak{B} - \Sigma\, e^{-\beta t}\,\mu(\mathfrak{C}\sin\mu\varepsilon - \mathfrak{D}\cos\mu\varepsilon) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (20)$$

Setzt man in die Gleichung (3) die so eben berechneten Werthe von Θ und $\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=\varepsilon}$, so erhält man:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{B} - \Sigma\, e^{-\beta t} \mu (\mathfrak{C} \sin \mu \varepsilon - \mathfrak{D} \cos \mu \varepsilon) \\ + \frac{\gamma_2}{\lambda} \left[\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \varepsilon + \Sigma\, e^{-\beta t} (\mathfrak{C} \cos \mu \varepsilon + \mathfrak{D} \sin \mu \varepsilon) - \mathfrak{T} \right] \end{array} \right\} = 0 \quad (21)$$

Da diese Gleichung für jeden Werth von t gelten soll, so muss sein:

$$\mathfrak{B} + \frac{\gamma_2}{\lambda} (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \varepsilon - \mathfrak{T}) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

$$- \mu (\mathfrak{C} \sin \mu \varepsilon - \mathfrak{D} \cos \mu \varepsilon) + \frac{\gamma_2}{\lambda} (\mathfrak{C} \cos \mu \varepsilon + \mathfrak{D} \sin \mu \varepsilon) = 0 \quad . \quad (23)$$

Der Ausdruck (22) wird durch die Werthe von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, welche wir früher gefunden haben, identisch erfüllt. Aus (23) folgt dagegen:

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}} = \frac{\cos \mu \varepsilon + \frac{\gamma_2}{\lambda \mu} \sin \mu \varepsilon}{\sin \mu \varepsilon - \frac{\gamma_2}{\lambda \mu} \cos \mu \varepsilon} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Setzt man in (4) für $\left(\frac{d u}{d x}\right)_{x = 0}$, und für Δ die Werthe, welche (20) und (17) darbieten, so erhält man:

$$\mathfrak{B} + \Sigma\, e^{-\beta t} \mu\, \mathfrak{D} + \frac{\gamma_1}{\lambda} \left(T - \mathfrak{A} - \Sigma\, e^{-\beta t} \mathfrak{C} \right) = 0$$

Hieraus folgt:

$$T = \mathfrak{A} + \Sigma\, e^{-\beta t} \mathfrak{C} - \frac{\lambda}{\gamma_1} \left(\mathfrak{B} + \Sigma\, e^{-\beta t} \mu\, \mathfrak{D} \right) \quad . \quad . \quad (25)$$

Differenzirt man diesen Ausdruck nach t, so folgt:

$$\frac{d T}{d t} = - \Sigma\, e^{-\beta t} \beta\, \mathfrak{C} + \frac{\lambda}{\gamma_1} \Sigma\, e^{-\beta t} \beta \mu\, \mathfrak{D} \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Setzt man (25) und (26) in (5), so erhält man:

$$W - L c \left(- \Sigma\, e^{-\beta t} \beta\, \mathfrak{C} + \frac{\lambda}{\gamma_1} \Sigma\, e^{-\beta t} \beta \mu\, \mathfrak{D} \right) =$$

$$\left[\mathfrak{A} + \Sigma e^{-\beta t} \mathfrak{C} - \frac{\lambda}{\gamma_1} \left(\mathfrak{B} + \Sigma e^{-\beta t} \mu\, \mathfrak{D} \right) - \mathfrak{A} - \Sigma e^{-\beta t} \mathfrak{C} \right] \gamma_1 \mathfrak{F}$$

Da auch diese Gleichung eine identische sein mus, so folgt aus derselben:

$$W = - \lambda\, \mathfrak{B}\, \mathfrak{F}$$

was mit (13) übereinstimmt, und:

$$L c \left(- \beta\, \mathfrak{C} + \frac{\lambda}{\gamma_1} \beta \mu\, \mathfrak{D} \right) = \lambda \mu\, \mathfrak{F}\, \mathfrak{D}$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}} = \lambda \, \mu \left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{\mathfrak{F}}{L\,c\,\beta} \right)$$

oder wenn man für β seinen Werth $a\,\mu^2$ setzt;

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}} = \lambda \left(\frac{\mu}{\gamma_1} - \frac{\mathfrak{F}}{L\,c\,a} \, \frac{1}{\mu} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Setzt man die Werthe von $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$, welche (24) und (27) darbieten, einander gleich, so erhält man für μ folgende transcendente Gleichung:

$$\lambda \left(\frac{\mu}{\gamma_1} - \frac{\mathfrak{F}}{L\,c\,a} \, \frac{1}{\mu} \right) = \frac{\cos \mu\,\varepsilon + \frac{\gamma_2}{\lambda\,\mu} \sin \mu\,\varepsilon}{\sin \mu\,\varepsilon - \frac{\gamma_2}{\lambda\,\mu} \cos \mu\,\varepsilon} \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Setzt man den Werth $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$ in (25), so findet man:

$$T = \mathfrak{A} - \frac{\lambda \mathfrak{B}}{\gamma_1} - \Sigma\, e^{-\beta t} \mathfrak{D} \, \frac{\mathfrak{F}\lambda}{L\,c\,a} \, \frac{1}{\mu}$$

$$T = \mathfrak{T} + \frac{W}{\mathfrak{F}} \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{\varepsilon}{\lambda} \right) - \frac{\mathfrak{F}\lambda}{L\,c\,a} \quad \Sigma\, e^{-\beta t} \frac{\mathfrak{D}}{\mu}$$

oder wegen (9):

$$T = T_1 - \frac{\mathfrak{F}\lambda}{L\,c\,a} \quad \Sigma\, e^{-\beta t} \frac{\mathfrak{D}}{\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Für $t = o$ wird $T = T_0$, demnach:

$$T_0 = T_1 - \frac{\mathfrak{F}\lambda}{L\,c\,a} \Sigma \frac{\mathfrak{D}}{\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Durch den Unterschied von (29) und (30) folgt auch:

$$T = T_0 + \frac{\mathfrak{F}\lambda}{L\,a\,c} \Sigma \frac{\mathfrak{D}}{\mu} \left(1 - e^{-\beta t} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Es erübrigt uns nun noch, der Bedingung wegen des Initialzustandes zu genügen, wobei wir ein von *Poisson* angebahntes Verfahren befolgen.

Setzen wir:

$$u - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,x) = \xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

$$\mathfrak{D}\,(m \cos \mu\,x + \sin \mu\,x) = X \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

so wird $\left(\text{weil } \frac{d\,u}{d\,t} = \frac{d\,\xi}{d\,t}, \ \frac{d^2 u}{d\,x^2} = \frac{d^2 \xi}{d\,x^2} \text{ ist}\right)$ die Gleichung (1):

$$\frac{d\,\xi}{d\,t} = a \ \frac{d^2 \xi}{d\,x^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

und der Ausdruck (15):

$$\xi = \Sigma \, e^{-\beta t} X \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (35)$$

In dem Ausdruck (33) bedeutet das Zeichen m:

$$m = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}} = \lambda \left(\frac{\mu}{\gamma_1} - \frac{\mathfrak{F}}{L a c} \cdot \frac{1}{\mu} \right) = \frac{\cos \mu \varepsilon + \frac{\gamma_2}{\mu \lambda} \sin \mu \varepsilon}{\sin \mu \varepsilon - \frac{\gamma_2}{\mu \lambda} \cos \mu \varepsilon} \quad . \quad (36)$$

Bezeichnen wir durch μ_1 irgend eine individuelle Wurzel der transcendenten Gleichung (28) oder (36) und durch β_1 $\mathfrak{D}_1$ m_1 X_1 die dieser individuellen Wurzel entsprechenden Werthe von β $\mathfrak{D}$ m X.

Multipliziren wir die Gleichung (34) mit $X_1 \, d x$ und integriren dieselbe von $x = o$ bis $x = \varepsilon$, so erhalten wir:

$$\int_o^\varepsilon X_1 \frac{d \xi}{d t} \, d x = a \int_o^\varepsilon X_1 \frac{d^2 \xi}{d x^2} \, d x \quad \ldots \ldots \quad (37)$$

Nun findet man durch zweimalige Anwendung der Formel $\int u \, d v = u v - \int v \, d u$:

$$\int X_1 \frac{d^2 \xi}{d x^2} \, d x = X_1 \frac{d \xi}{d x} - \xi \frac{d X_1}{d x} + \int \xi \frac{d^2 X_1}{d x^2} \, d x$$

Setzt man in den Gliedern ausserhalb der Integrale

$$X_1 = \mathfrak{D}_1 (m_1 \cos \mu_1 x + \sin \mu_1 x), \quad \xi = \Sigma X e^{-\beta t} = \Sigma \mathfrak{D} \, (m \cos \mu x + \sin \mu x) \, e^{-\beta t}$$

$$\frac{d X_1}{d x} = - \mu_1 \mathfrak{D}_1 (m_1 \sin \mu_1 x - \cos \mu_1 x), \quad \frac{d \xi}{d x} = - \Sigma \mathfrak{D} \, e^{-\beta t} \mu (m \sin \mu x - \sin \mu x)$$

so wird:

$$\int X_1 \frac{d^2 \xi}{d x^2} \, d x = \Sigma \mathfrak{D} \, \mathfrak{D}_1 e^{-\beta t} \begin{bmatrix} - \mu (m_1 \cos \mu_1 x + \sin \mu_1 x) (m \sin \mu x - \cos \mu x) \\ + \mu_1 (m \cos \mu x + \sin \mu x) (m_1 \sin \mu_1 x - \cos \mu_1 x \end{bmatrix}$$
$$+ \int \xi \frac{d^2 X_1}{d x^2} \, d x$$

oder wenn man die Integration von $x = o$ bis $x = \varepsilon$ ausdehnt

$$\int_o^\varepsilon X_1 \frac{d^2 \xi}{d x^2} \, d x = \Sigma \mathfrak{D} \, \mathfrak{D}_1 \, e^{-\beta t} \begin{bmatrix} - \mu (m_1 \cos \mu_1 \varepsilon + \sin \mu_1 \varepsilon) \; (m \sin \mu \varepsilon - \cos \mu \varepsilon) \\ + \mu_1 (m \cos \mu \varepsilon + \sin \mu \varepsilon) (m_1 \sin \mu_1 \varepsilon - \cos \mu_1 \varepsilon) \\ - \mu m_1 + \mu_1 m \end{bmatrix}$$
$$+ \int_o^\varepsilon \xi \frac{d^2 X_1}{d x^2} \, d x \quad \ldots \ldots \quad (38)$$

Setzt man in die beiden in der Klammer enthaltenen trigonometrischen Ausdrücke für m und m_1 die Werthe

$$\mathrm{m} = \frac{\cos\mu\varepsilon + \frac{\gamma_2}{\mu\lambda}\sin\mu\varepsilon}{\sin\mu\varepsilon - \frac{\gamma_2}{\mu\lambda}\cos\mu\varepsilon}$$

$$\mathrm{m}_1 = \frac{\cos\mu_1\varepsilon + \frac{\gamma_2}{\mu_1\lambda}\sin\mu_1\varepsilon}{\sin\mu_1\varepsilon + \frac{\gamma_2}{\mu_1\lambda}\cos\mu_1\varepsilon}$$

dagegen in die Glieder $-\mu\,\mathrm{m}_1 + \mu_1\,\mathrm{m}$ für m und m_1 die Werthe

$$\mathrm{m} = \lambda\left(\frac{\mu}{\gamma_1} - \frac{\mathfrak{F}}{\mathrm{L a c}}\,\frac{1}{\mu}\right)$$

$$\mathrm{m}_1 = \lambda\left(\frac{\mu_1}{\gamma_1} - \frac{\mathfrak{F}}{\mathrm{L a c}}\,\frac{1}{\mu_1}\right)$$

so findet man, dass jene trigonometrischen Ausdrücke sich auf Null reduziren, und dass

$$-\mu\,\mathrm{m}_1 + \mu_1\,\mathrm{m} = \frac{\mathfrak{F}\lambda}{\mathrm{L c a}}\left(\frac{\mu}{\mu_1} - \frac{\mu_1}{\mu}\right)$$

wird.

Die Gleichung (38) wird demnach:

$$\int_0^\varepsilon \mathrm{X}_1 \frac{d^2\xi}{dx^2}\,dx = \Sigma\mathfrak{D}\,\mathfrak{D}_1\,e^{-\beta t}\frac{\mathfrak{F}\lambda}{\mathrm{L c a}}\left(\frac{\mu}{\mu_1} - \frac{\mu_1}{\mu}\right) + \int_0^\varepsilon \xi\,\frac{d^2\mathrm{X}_1}{dx^2}\,dx$$

Führt man diesen Integralwerth in (37) ein, so erhält man:

$$\int_0^\varepsilon \mathrm{X}_1 \frac{d\xi}{dt}\,dx = \Sigma\mathfrak{D}\,\mathfrak{D}_1\,e^{-\beta t}\frac{\mathfrak{F}\lambda}{\mathrm{L c}}\left(\frac{\mu}{\mu_1} - \frac{\mu_1}{\mu}\right) + a\int_0^\varepsilon \xi\,\frac{d^2\mathrm{X}_1}{dx^2}\,dx \quad (39)$$

Allein es ist:

$$\int_0^\varepsilon \mathrm{X}_1 \frac{d\xi}{dt}\,dx = \frac{d}{dt}\int_0^\varepsilon \mathrm{X}_1\,\xi\,dx$$

$$\int_0^\varepsilon \xi\,\frac{d^2\mathrm{X}_1}{dx^2}\,dx = -\mu_1^2\int_0^\varepsilon \xi\,\mathfrak{D}_1\,(\mathrm{m}_1\cos\mu_1 x + \sin\mu_1 x)\,dx = -\mu_1^2\int_0^\varepsilon \xi\,\mathrm{X}_1\,dx \quad (40)$$

Demnach wird (39):

$$\frac{d}{dt}\int_0^\varepsilon \mathrm{X}_1\,\xi\,dx = \Sigma\mathfrak{D}\,\mathfrak{D}_1\,e^{-\beta t}\frac{\mathfrak{F}\lambda}{\mathrm{L c}}\left(\frac{\mu}{\mu_1} - \frac{\mu_1}{\mu}\right) - a\,\mu_1^2\int_0^\varepsilon \xi\,\mathrm{X}_1\,dx \quad (41)$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\int_0^\varepsilon \xi\,\mathrm{X}_1\,dx_1 = y \;\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (42)$$

so wird die Gleichung (41) wegen $a\,\mu_1^2 = \beta_1$

$$\frac{dy}{dt} = \Sigma \mathfrak{D}\, \mathfrak{D}_1\, \frac{\mathfrak{F}\,\lambda}{L\,c} \left(\frac{\mu}{\mu_1} - \frac{\mu_1}{\mu}\right) e^{-\beta t} - \beta_1\, y \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

Das Integrale dieser Gleichung ist:

$$y = \Sigma\, \mathfrak{D}\, \mathfrak{D}_1\, \frac{\mathfrak{F}\,\lambda}{L\,c} \left(\frac{\mu}{\mu_1} - \frac{\mu_1}{\mu}\right) \frac{e^{-\beta t}}{\beta_1 - \beta} + \mathfrak{H}\, e^{-\beta_1 t} \quad . \quad . \quad (44)$$

wobei $\mathfrak{H}$ eine hinsichtlich x und t Constante der Integration bedeutet. Wegen $\beta = a\,\mu^2$, $\beta_1 = a\,\mu_1^2$ wird:

$$\left(\frac{\mu}{\mu_1} - \frac{\mu_1}{\mu}\right) \frac{1}{\beta_1 - \beta} = \frac{\mu^2 - \mu_1^2}{\mu\,\mu_1}\, \frac{1}{a\,(\mu_1^2 - \mu^2)} = -\frac{1}{a\,(\mu\,\mu_1)}$$

demnach auch:

$$y = -\Sigma \mathfrak{D}\, \mathfrak{D}_1\, \frac{\mathfrak{F}\,\lambda}{L\,c\,a}\, \frac{e^{-\beta t}}{\mu\,\mu_1} + \mathfrak{H}\, e^{-\beta_1 t}$$

demnach:

$$\int_0^{\varepsilon} \xi\, X_1\, dx = -\Sigma\, \mathfrak{D}\, \mathfrak{D}_1\, \frac{\mathfrak{F}\,\lambda}{L\,c\,a}\, \frac{e^{-\beta t}}{\mu\,\mu_1} + \mathfrak{H}\, e^{-\beta_1 t} \quad . \quad . \quad (45)$$

Für $t = o$ soll $\mu = \varphi(x)$, mithin $\xi = \varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,x)$ werden, demnach folgt aus (45):

$$\int_0^{\varepsilon} [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,x)]\, X_1\, dx = -\Sigma \mathfrak{D}\, \mathfrak{D}_1\, \frac{\mathfrak{F}\,\lambda}{L\,c\,a}\, \frac{1}{\mu\,\mu_1} + \mathfrak{H} \quad . \quad (46)$$

Durch Elimination von $\mathfrak{H}$ aus (45) und (46) folgt:

$$\int_0^{\varepsilon} \xi\, X_1\, dx = \left\{ \begin{array}{l} -\Sigma \mathfrak{D}\, \mathfrak{D}_1\, \dfrac{\mathfrak{F}\,\lambda}{L\,c\,a}\, \dfrac{e^{-\beta t}}{\mu\,\mu_1} \\ + e^{-\beta_1 t} \left[\displaystyle\int_0^{\varepsilon} \varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,x) \right] X_1\, dx + \Sigma\, \mathfrak{D}\, \mathfrak{D}_1\, \dfrac{\mathfrak{F}\,\lambda}{L\,c\,a} \end{array} \right\}$$

$$\int_0^{\varepsilon} \xi\, X_1\, dx = \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \mathfrak{D}\, \mathfrak{D}_1\, \dfrac{\mathfrak{F}\,\lambda}{L\,c\,a}\, \dfrac{1}{\mu\,\mu_1} \left(e^{-\beta_1 t} - e^{-\beta t} \right) \\ + e^{-\beta_1 t} \displaystyle\int_0^{\varepsilon} [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,x)]\, X_1\, dx \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad (47)$$

Linker Hand des Gleichheitszeichens steht (wegen ξ) eine Reihe, rechter Hand ebenfalls und noch das Integralglied. Denkt man sich, dass man diese Reihen ausschreibe, indem man für β und μ alle individuellen Wurzelwerthe setzt, so müssen die Glieder, welche bestimmten individuellen Werthen entsprechen, gleich sein. Für $\beta = \beta_1$

und $\mu = \mu_1$ gibt aber das Glied linker Hand $\int_0^\varepsilon \xi_1 X_1 \, dx$ und der Ausdruck rechter Hand $e^{-\beta_1 t} \int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x)] X_1 \, dx$. Man hat daher:

$$\int_0^\varepsilon \xi_1 X_1 \, dx = e^{-\beta_1 t} \int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x)] X_1 \, dx \quad . \quad . \quad (48)$$

Setzt man für ξ_1 und X_1 die Werthe $e^{-\beta_1 t} X_1 = e^{-\beta_1 t} \mathfrak{D}_1 (m_1 \cos \mu_1 x + \sin \mu_1 x)$ und $X_1 = \mathfrak{D}_1 (m_1 \cos \mu_1 x + \sin \mu_1 x)$ so wird (48):

$$\int_0^\varepsilon e^{-\beta_1 t} \mathfrak{D}_1^2 (m_1 \cos \mu_1 x + \sin \mu_1 x)^2 \, dx$$

$$= e^{-\beta_1 t} \int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x)] \, \mathfrak{D}_1 (m_1 \cos \mu_1 x + \sin \mu_1 x) \, dx$$

und hieraus folgt endlich:

$$\mathfrak{D}_1 = \frac{\int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x)] (m_1 \cos \mu_1 x + \sin \mu_1 x) \, dx}{\int_0^\varepsilon (m_1 \cos \mu_1 x + \sin \mu_1 x)^2 \, dx} \quad . \quad . \quad (49)$$

Weil aber für β_1 und μ_1 jeder beliebige individuelle Wurzelwerth genommen werden konnte, so gibt dieser Ausdruck überhaupt jeden individuellen Werth von $\mathfrak{D}$. Man kann daher allgemein schreiben:

$$\mathfrak{D} = \frac{\int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x)] (m \cos \mu x + \sin \mu x) \, dx}{\int_0^\varepsilon (m \cos \mu x + \sin \mu x)^2 \, dx} \quad . \quad . \quad (50)$$

Das Integrale des Nenners kann ausgerechnet werden. Es ist:

$$(m \cos \mu x + \sin \mu x)^2 = m^2 \cos^2 \mu x + \sin^2 \mu x + 2 m \cos \mu x \sin \mu x$$

oder wegen $\cos^2 \mu x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2 \mu x)$, $\sin^2 \mu x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2 \mu x)$ $2 \sin \mu x \cos \mu x = \sin 2 \mu x$

$$(\mathrm{m} \cos \mu \mathrm{x} + \sin \mu \mathrm{x})^2 = \mathrm{m}^2 \frac{1}{2}(1 + \cos 2\mu \mathrm{x}) + \frac{1}{2}(1 - \cos 2\mu \mathrm{x}) + \mathrm{m} \sin 2\mu \mathrm{x}$$

$$= \frac{1}{2}(\mathrm{m}^2 + 1) + \frac{1}{2} \cos 2\mu \mathrm{x}\,(\mathrm{m}^2 - 1) + \mathrm{m} \sin 2\mu \mathrm{x}$$

daher:

$$\int_0^{\varepsilon} (\mathrm{m} \cos \mu \mathrm{x} + \sin \mu \mathrm{x})^2 \, d\mathrm{x}$$

$$= \frac{1}{2}(\mathrm{m}^2 + 1)\,\varepsilon + \frac{1}{2} \frac{\mathrm{m}^2 - 1}{2\mu} \sin 2\mu\varepsilon + \frac{\mathrm{m}}{2\mu}(1 - \cos 2\mu\varepsilon)$$

$$\int_0^{\varepsilon} (\mathrm{m} \cos \mu \mathrm{x} + \sin \mu \mathrm{x})^2 \, d\mathrm{x}$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\mathrm{m}^2 + 1)\,\varepsilon + \frac{\mathrm{m}}{\mu}\right] + \frac{1}{2} \frac{\mathrm{m}^2 - 1}{2\mu} \sin 2\mu\varepsilon - \frac{\mathrm{m}}{2\mu} \cos 2\mu\varepsilon$$

demnach erhält man endlich:

$$\mathfrak{D} = \frac{\int_0^{\varepsilon} [\varphi(\mathrm{x}) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\mathrm{x})]\,(\mathrm{m} \cos \mu \mathrm{x} + \sin \mu \mathrm{x})\, d\mathrm{x}}{\frac{1}{2}\left[(\mathrm{m}^2 + 1)\,\varepsilon + \frac{\mathrm{m}}{\mu}\right] + \frac{1}{4} \frac{\mathrm{m}^2 - 1}{\mu} \sin 2\mu\varepsilon - \frac{\mathrm{m}}{2\mu} \cos 2\mu\varepsilon} \qquad (51)$$

Es ist $\mathfrak{W} = \int_0^{\varepsilon} \mathfrak{F}\, d\mathrm{x}\, \varrho\, c_1\, u = \mathfrak{F} \varrho c_1 \int_0^{\varepsilon} u\, d\mathrm{x}$ die zur Zeit t in der Mauer enthaltene Wärmemenge; demnach:

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{F} \varrho c_1 \int_0^{\varepsilon} \left[\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\mathrm{x} + \Sigma\, e^{-\beta t} \mathfrak{D}\,(\mathrm{m} \cos \mu \mathrm{x} + \sin \mu \mathrm{x})\right] d\mathrm{x}$$

oder

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{F} \varrho c_1 \left[\mathfrak{A}\varepsilon + \mathfrak{B}\frac{\varepsilon^2}{2} + \Sigma\, e^{-\beta t} \frac{\mathfrak{D}}{\mu}(\mathrm{m} \sin \mu\varepsilon - \cos \mu\varepsilon + 1)\right]$$

Es ist aber wegen (36)

$$\mathrm{m} \sin \mu\varepsilon - \cos \mu\varepsilon = \frac{\gamma_2}{\lambda\mu}(\mathrm{m} \cos \mu\varepsilon + \sin \mu\varepsilon)$$

demnach wird $\mathfrak{W}$:

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{F} \varrho c_1 \left[\mathfrak{A}\varepsilon + \mathfrak{B}\frac{\varepsilon^2}{2} + \Sigma\, e^{-\beta t} \frac{\mathfrak{D}}{\mu} \frac{\gamma_2}{\lambda\mu}(\mathrm{m} \cos \mu\varepsilon + \sin \mu\varepsilon) + \Sigma\, e^{-\beta t} \frac{\mathfrak{D}}{\mu}\right]$$

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{F} \varrho c_1 \left[\mathfrak{A}\varepsilon + \mathfrak{B}\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\gamma_2}{\lambda} \Sigma\, e^{-\beta t} \frac{\mathfrak{D}}{\mu^2}(\mathrm{m} \cos \mu\varepsilon + \sin \mu\varepsilon) + \Sigma\, e^{-\beta t} \frac{\mathfrak{D}}{\mu}\right]$$

Für $t = 0$ ist demnach die in der Mauer enthaltene Wärmemenge $\mathfrak{W}$:

$$\mathfrak{W}_{t=0} = \mathfrak{F}\varrho c_1 \left[\mathfrak{A}\varepsilon + \mathfrak{B}\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\gamma_2}{\lambda}\Sigma\frac{\mathfrak{D}}{\mu^2}(m\cos\mu\varepsilon + \sin\mu\varepsilon) + \Sigma\frac{\mathfrak{D}}{\mu}\right]$$

Diese Wärmemenge ist aber auch gleich

$$\int_0^\varepsilon \mathfrak{F}\, dx\, \varrho\, c_1\, \varphi(x) = \mathfrak{F}\,\varrho\, c_1 \int_0^\varepsilon \varphi(x)\, dx$$

demnach erhalten wir:

$$\int_0^\varepsilon \varphi(x)\, dx = \mathfrak{A}\varepsilon + \mathfrak{B}\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\gamma_2}{\lambda}\Sigma\frac{\mathfrak{D}}{\mu^2}(m\cos\mu\varepsilon + \sin\mu\varepsilon) + \Sigma\frac{\mathfrak{D}}{\mu} \qquad (52)$$

Vereinfachung der Resultate. Durch die aufgefundenen Resultate ist zwar das vorgelegte Problem analytisch gelöst, allein diese Lösung ist für praktische Zwecke so viel wie keine Lösung, denn durch diesen Wust von Rechnungen ist man doch kaum im Stande, den Erwärmungszustand der Mauern und der eingeschlossenen Luft zu bestimmen. Wir wollen daher sehen, ob es nicht möglich ist, durch Annäherungen vorwärts zu dringen.

Wir betrachten zu diesem Behufe zunächst die transcendente Gleichung (36).

Setzt man zur Abkürzung $\mu\varepsilon = x$, $\mu\varepsilon \operatorname{tang} \mu\varepsilon = y$, so findet man aus jener Gleichung (36):

$$y = x \operatorname{tang} x = \frac{x^2\left(1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) - \frac{\mathfrak{F}\lambda\varepsilon}{L a c}\,\frac{\gamma_2\varepsilon}{\lambda}}{x^2\frac{\lambda}{\gamma_1\varepsilon} - \left(\frac{\mathfrak{F}\lambda\varepsilon}{L a c} + \frac{\gamma_2\varepsilon}{\lambda}\right)} \quad . \; . \; . \quad (53)$$

Konstruirt man die beiden Kurven, die durch diesen Ausdruck bestimmt werden, so bestimmen die Abscissen ihrer Durchschnittspunkte die Wurzeln der transcendenten Gleichung (36):

Die Kurve k, deren Gleichung $y = x \operatorname{tang} x$ ist, besteht aus unendlich vielen congruenten Parthien $k_0\; k_1\; k_2 \ldots$, Tafel XVIII., Fig. 5, die nach oben und nach unten assymptotisch verlaufen. Die Kurve H, deren Gleichung die Form hat:

$$y = \frac{x^2\alpha - \beta}{x^2\alpha_1 - \beta_1}$$

besteht aus zwei Parthien H_1 und H_2. Der Zweig H_1 schneidet die Abscissenaxe in einem Punkt, dessen Abscisse gleich $O\,m = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ ist, und fällt bei $x = O\,n = \sqrt{\frac{\beta_1}{\alpha_1}}$ assymptotisch herab. Der Zweig H_2