Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1863

Theoretische Vorbereitungen

urn:nbn:de:bsz:31-270981

SIEBENTER ABSCHNITT.

Heizung und Ventilation der Gebäude.

Theoretische Vorbereitungen.

Einleitendes. Einen Raum heizen heisst: veranlassen, dass die Temperatur der in dem Raum enthaltenen Luft eine gewisse Höhe erreicht und dauernd auf derselben erhalten wird. Einen Raum ventiliren heisst: aus diesem Raum in einer gewissen Zeit eine gewisse Quantität Luft entfernen und durch andere Luft ersetzen. Einen Raum gleichzeitig heizen und ventiliren heisst folglich: bewirken, dass in dem Raum dauernd eine gewisse Temperatur eintritt und dass gleichzeitig eine gewisse Lufterneuerung statt findet. Die Anforderung, dass ein Raum nur geheizt werden soll, kommt in der Praxis beinahe niemals vor, weil die warm zu erhaltenden Räume niemals hermetisch geschlossen, sondern jederzeit mit Thüren und Fenstern versehen sind, durch deren Fugen und Ritzen Luft eindringt und entweicht. Auch verursachen die Körper, welche die Räume enthalten und wegen welchen geheizt wird, eine Veränderung in der Beschaffenheit der Luft, wodurch dieselbe für das dauernde Verbleiben der Körper in dem Raum schädlich oder nachtheilig wirkt, daher entfernt und durch andere ersetzt werden muss. Die sich selbst machende Lufterneuerung durch Fenster, Thüren und Ofenheizung wollen wir natürliche Ventilation nennen; künstliche dagegen eine solche Einrichtung oder Veranstaltung, durch welche eine vorgeschriebene Lufterneuerung erzwungen wird. Die natürliche Ventilation genügt für Räume, in welchen sich nur wenige Menschen aufhalten oder in welchen überhaupt keine Vorgänge statt finden, durch welche beträchtliche Luftmengen in ihrer Beschaffenheit verändert werden; diese Ventilation genügt daher für Wohngebäude, Pflanzenhäuser und für manche Fabriken. Die künstliche Ventilation wird nothwendig, wenn grosse Luftmengen erneut werden müssen, ist also in Anwendung zu bringen in Krankenhäusern, Strafanstalten, Kasernen, in Theatern, Versammlungssälen, insbesondere auch in Bergwerken und in Fabriken, welche viel Luft verderben. Ventilation ohne Heizung wird im Sommer für alle Lokalitäten nothwendig, in welchen sich viele Menschen aufhalten und in jeder Jahreszeit in den Bergwerken. Die künstliche Ventilation geschieht entweder durch Luftströmungen, die durch Wärme veranlasst werden oder durch mechanische Gewalt vermittelst Luftsaug- oder Luftdruckpumpen oder durch Windflügel oder Ventilatoren.

Durch Luftströmung erfolgt die Ventilation, indem man den Raum, aus welchem die Luft entfernt werden soll, mit einer Feuerung in Verbindung bringt, die mit einem hinreichend hohen Kamin versehen ist. Die Luft zieht dann nach dem Feuerherd, wird erwärmt, steigt in dem Kamin in die Höhe und es entsteht so ein Aussaugen der Luft aus dem zu ventilirenden Raum.

Wenn mechanische Gewalt angewendet wird, kann man die Luft entweder aussaugen lassen oder im erwärmten Zustand in den Raum eintreiben. Die Ventilation durch Luftströmungen, die durch Heizungen veranlasst werden, ist nach den in neuester Zeit in Paris angestellten vielfachen Versuchen in grossen Spitälern jener mit Ventilatoren vorzuziehen; es hat sich gezeigt, dass diese Ventilatoren bei weitem nicht so stark wirken, wie man sich vorgestellt hat, und dass wahrscheinlich sehr beträchtliche, ungemein mächtige und viel Kraft erschöpfende Maschinen nothwendig wären, um Wirkungen hervorzubringen, wie sie durch blosse Lufterwärmungen erzielt werden können.

Die Hauptpunkte, welche bei jeder Heizung in's Auge gefasst werden müssen, sind 1) die erste Wärmeentwicklung aus dem Brennstoff durch Verbrennung desselben, 2) die Uebertragung der Wärme nach dem zu erwärmenden Raum, d. h. die Art und Weise wie die in den Verbrennungsgasen enthaltene Wärme nach dem zu erwärmenden Raum gebracht werden soll, 3) die Vertheilung der Wärme in diesem Raum, 4) die Zuleitung von reiner und Ableitung von verdorbener Luft.

Die verschiedenen Heizungen können in vier Klassen eingetheilt werden: 1) die Ofenheizung, 2) die Dampfheizung, 3) die Wassercirkulationsheizung oder Wasserheizung, 4) die Luftcirkulationsheizung oder Luftheizung. Nur die Ofenheizung hat die Eigenschaft, dass der Raum unmittelbar durch die Wärme der Verbrennungsgase erwärmt wird, indem der Verbrennungsapparat, der Ofen, in dem zu erwärmenden Raum aufgestellt wird und die Wärme der Verbrennungsgase direkt durch die Oberfläche des Ofens an die in dem Raum enthaltene Luft abgegeben wird. Bei den übrigen Heizungen wird der Verbrennungsapparat ausserhalb des zu erwärmenden Raumes aufgestellt und wird die Wärme der Verbrennungsgase zuerst an eine vermittelnde Flüssigkeit (Luft, Wasser, Dampf) abgegeben, welche die Wärme nach dem zu erwärmenden Raum überträgt und dort an die Luft abgibt. Die drei zuerst genannten Heizungen, nämlich die Ofen-, Dampf- und Wasserheizung, versehen den zu erwärmenden Raum nur mit Wärme und bringen direkt keine Lufterneuerung hervor. Bei Anwendung dieser Heizungen muss daher eine besondere künstliche Ventilation eingerichtet werden, wenn die natürliche nicht genügt. Die Luftheizung bringt in den zu erwärmenden Raum erwärmte Luft und veranlasst ein Entweichen der verdorbenen.

Bevor wir in die Behandlung der speziellen Einrichtungen eintreten, haben wir mehrere, die Heizung und Ventilation betreffende Elementaraufgaben zu lösen, was nunmehr geschehen soll.

Bestimmung der Luftmengen, welche verdorben werden. Der Ursachen, durch welche die Luft verdorben wird, gibt es mannigfaltige. Die wesentlichsten sind:

1) Die Respiration und Transpiration der Menschen und Thiere.
2) Die Beleuchtung mit Kerzen, Oellampen und Gaslampen.
3) Operationen, welche Rauch entwickeln.
4) Operationen, welche Staub verursachen und aufregen.
5) Mechanische Vorgänge oder chemische Prozesse, durch welche Dampf oder Gase entwickelt werden.

Die Luftquantitäten, welche durch die beiden ersteren dieser Ursachen verdorben werden, können durch Erfahrungen ermittelt werden.

Der Erfahrung zufolge bedarf ein Mensch stündlich zur Respiration und Transpiration 6^{Kbm} oder $6 \times 1{\cdot}3 = 7{\cdot}8$, also nahe 8^{Klg} atmosphärische Luft. Die Wärmemenge, welche ein Mensch stündlich entwickelt, beträgt ungefähr 73 Wärweeinheiten. Von dieser Wärme werden aber 25 Einheiten zur Bildung von $0{\cdot}038^{Klg}$ Wasserdampf verwendet, es bleiben also $73 - 25 = 48$ Einheiten übrig, welche erwärmend wirken.

Der Luftverbrauch und die Wärmeentwicklung einer Gasbeleuchtung kann mit genügender Genauigkeit angeschlagen werden, wie folgt. Das spezifische Gewicht des Leuchtgases kann durchschnittlich zu 0·5 der atmosphärischen Luft angenommen werden. Das Gewicht eines Kubikmeters Gas darf daher mit $0{\cdot}5 \times 1{\cdot}3 = 0{\cdot}65^{\mathrm{Klg}}$ in Rechnung gebracht werden. Zum vollständigen Verbrennen von einem Kilogramm Leuchtgas sind 17^{Klg} atmosphärische Luft erforderlich; ein Kubikmeter Gas verbraucht daher $0{\cdot}65 \times 17 = 11^{\mathrm{Klg}}$ atmosphärische Luft oder nahe 8^{Kbm} Luft. Gewöhnlich konsumirt ein Gasbrenner stündlich $0{\cdot}1^{\mathrm{Kbm}}$ oder 4 Kubikfuss Gas. Ein solcher Brenner braucht daher stündlich $11 \times 0{\cdot}1 = 1{\cdot}1^{\mathrm{Klg}}$ oder $8 \times 0{\cdot}1 = 0{\cdot}8^{\mathrm{Kbm}}$ Luft.

Die Heizkraft von einem Kilogramm Gas ist 12400 Wärmeeinheiten. Die Heizkraft von einem Kubikmeter Gas $0{\cdot}65 \times 12400 = 8060$ Wärmeeinheiten. Die Wärmemenge, welche ein Brenner stündlich entwickelt, welcher stündlich $0{\cdot}1^{\mathrm{Kbm}}$ Gas verbraucht, ist $0{\cdot}1 \times 8060 = 806$ Wärmeeinheiten. Diese Daten kurz zusammengestellt, erhält man folgende Tabelle.

1) Stündlicher Luftverbrauch eines Menschen	6^{Kbm} 8^{Klg}
2) Stündliche Wärmeentwicklung eines Menschen	48 Wärmeeinheiten
3) Luftverbrauch durch Verbrennung von 1^{Klg} Gas	13^{Kbm} 17^{Klg}
4) Luftverbrauch durch Verbrennung von 1^{Kbm} Gas	8^{Kbm} 11^{Klg}
5) Luftverbrauch (stündlicher) wegen eines Brenners, der stündlich $0{\cdot}1^{\mathrm{Kbm}}$ Luft konsumirt	$0{\cdot}8^{\mathrm{Kbm}}$ $1{\cdot}1^{\mathrm{Klg}}$
6) Wärmeentwicklung durch Verbrennung von 1^{Klg} Gas	12400 Wärmeeinheiten
7) Wärmeentwicklung durch Verbrennung von 1^{Kbm} Gas	8060 »
8) Stündliche Wärmeentwicklung eines Brenners, welcher stündlich $0{\cdot}1^{\mathrm{Kbm}}$ Gas verbraucht	806 »

Luftmenge, welche die Ventilation liefern soll. Vermittelst dieser Zusammenstellung kann man nun leicht die Luftmenge berechnen, welche stündlich durch Menschen und durch Beleuchtung verdorben wird. Nun ist aber die Frage, wie viel reine Luft einem Raum durch die Ventilation zugeführt werden muss, damit dieser Raum im Beharrungszustand der Ventilation Luft enthält, die nur bis zu einem gewissen Grad verunreiniget oder verdorben ist? Zur Beantwortung dieser Frage dient die Lösung folgender Aufgabe.

Ein Raum, dessen Inhalt glei $\mathfrak{V}$ ist, enthält Luft, die entweder rein oder theilweise schon verdorben ist. Diesem Raum werden stündlich W Kubikmeter reine atmosphärische Luft zugeführt, und in jeder Stunde ein eben so grosses Luftvolumen von der im Raum enthaltenen Luft entzogen. Durch Menschen, Beleuchtung und andere Ursachen werden stündlich W_1 Kubikmeter Luft verdorben. Es soll nun die Beschaffenheit der nach Verlauf einer gewissen Zeit in dem Raum enthaltenen Luft ermittelt werden.

Nachdem die angegebenen Verhältnisse eine gewisse Zeit t eingewirkt haben, wird in dem Raum ein gewisses Quantum V reiner und ein gewisses Quantum v verdorbener Luft enthalten sein, und es ist

$$\mathfrak{V} = V + v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

In dem darauf folgenden Zeitelement dt geschieht Folgendes: 1) Durch die Zuführung der reinen Luft wird die Luftmenge der reinen Luft um $W\,dt$ vermehrt. 2) Durch die Ableitung der Luft wird aus dem Raum eine Menge $\frac{V}{V+v}\,dt = \frac{V}{\mathfrak{V}}\,dt$ reiner und eine Menge $\frac{v}{V+v}\,dt = \frac{v}{\mathfrak{V}}\,dt$ unreiner Luft entfernt. 3) Die Luftmenge $W_1\,dt$, welche im Zeitelement dt aus dem Zustand, der zur Zeit t vorhanden ist, in den ganz verdorbenen Zustand gebracht wird, enthält $\frac{V}{\mathfrak{V}}\,W_1\,dt$ reine und $\frac{v}{\mathfrak{V}}\,W_1\,dt$ verdorbene Luft. Nennen wir dV die Zunahme an reiner und dv die Zunahme an verdorbener Luft während dieses Zeitelementes dt, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} dV &= W\,dt - \frac{V}{\mathfrak{V}}\,W_1\,dt - \frac{V}{\mathfrak{V}}\,W\,dt \\ dv &= \frac{V}{\mathfrak{V}}\,W_1\,dt - \frac{v}{\mathfrak{V}}\,W\,dt \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Da der Voraussetzung gemäss W und W_1 constante Grössen sind, so kann die erste der Gleichungen (2) unmittelbar integrirt werden. Es folgt aus dieser Gleichung:

$$\frac{dV}{W - \frac{V}{\mathfrak{V}}(W + W_1)} = dt$$

demnach erhält man:

$$-\frac{\mathfrak{V}}{W + W_1}\ \mathrm{lognat}\left[W - \frac{V}{\mathfrak{V}}(W + W_1)\right] = t + \mathrm{const} \quad . \quad . \quad (3)$$

Es seien am Anfang der Zeit (also $t = o$) in dem Raum $\mathfrak{V}$: V_0 Kubikmeter reine, v_0 Kubikmeter unreine Luft enthalten, also

$$V_0 + v_0 = \mathfrak{V} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Dann folgt aus (3), wenn man $t = o$ und $V = V_0$ setzt:

$$-\frac{\mathfrak{V}}{W + W_1} \text{ lognat} \left[W - \frac{V_0}{\mathfrak{V}} (W + W_1) \right] = \text{const}$$

Diese Gleichung von (3) abgezogen, erhält man:

$$\frac{\mathfrak{V}}{W + W_1} \text{ lognat} \frac{W - \frac{V}{\mathfrak{V}} (W + W_1)}{W - \frac{V_0}{\mathfrak{V}} (W + W_1)} = -t \quad \ldots \quad (5)$$

Hieraus ergibt sich auf gewöhnlichem Wege

$$V = \mathfrak{V} \frac{W}{W + W_1} - \left(\mathfrak{V} \frac{W}{W + W_1} - V_0 \right) e^{-\frac{W + W_1}{\mathfrak{V}} t} \quad \ldots \quad (6)$$

und weil $v = \mathfrak{V} - V$ ist:

$$v = \mathfrak{V} \frac{W_1}{W + W_1} + \left(\mathfrak{V} \frac{W}{W + W_1} - V_0 \right) e^{-\frac{W + W_1}{\mathfrak{V}} t} \quad \ldots \quad (7)$$

Wenn die Ventilation längere Zeit fortgedauert hat, wird die Exponentialgrösse $e^{-\frac{W + W_1}{\mathfrak{V}} t}$ eine verschwindend kleine Grösse. Die Werthe von V und v nähern sich demnach mit der Zeit gewissen Werthen V_1 und v_1, und diese sind:

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \mathfrak{V} \frac{W}{W + W_1} \\ v_1 &= \mathfrak{V} \frac{W_1}{W + W_1} \end{aligned} \right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Für den Fall, dass dem Raum nur so viel Luft zugeführt wird als verdirbt, ist $W = W_1$, und dann wird

$$V_1 = \frac{1}{2} \mathfrak{V}, \quad v_1 = \frac{1}{2} \mathfrak{V} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

d. h. in diesem Fall tritt ein Endzustand ein, in welchem der Raum zur Hälfte mit reiner, zur Hälfte mit verdorbener Luft gefüllt ist. Man sieht hieraus, dass es für die dauernde Erhaltung eines guten Zustandes durchaus nicht genügt, wenn nur so viel Luft zugeführt wird, als verdorben wird, sondern es darf ein Raum nicht mehr als z. B. 5 oder 10 Prozent unreine Luft enthalten, wenn der Aufenthalt in demselben nicht unangenehm oder schädlich sein soll. Nennen wir diesen zulässigen Prozentgehalt an verdorbener Luft $\mathfrak{p}$, setzen also $\frac{v_1}{\mathfrak{B}} = \mathfrak{p}$, so erhalten wir wegen (8):

$$\frac{v_1}{\mathfrak{B}} = \frac{W_1}{W + W_1} = \mathfrak{p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

demnach:

$$\frac{W}{W_1} = \frac{1 - \mathfrak{p}}{\mathfrak{p}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

für $\mathfrak{p}$ =	0·05	0·06	0·07	0·08	0·09	0·10
wird $\frac{W}{W_1}$ =	19	16	13	12	10	9

Wenn also ein Endzustand eintreten soll, in welchem in dem Raum nur noch 10 bis 5 Prozent unreine Luft enthalten, so muss man nahe 10 bis 20 mal mehr Luft zuführen, als verdorben wird.

Diese Rechnungsresultate stimmen mit den in neuester Zeit in Paris gemachten Erfahrungen. Eine Kommission, bestehend aus *Regnault, Pelouze* und *Morin*, erhielt von der französischen Regierung den Auftrag, über die Heizung und Ventilation der grossen Krankenhäuser von Paris Gutachten zu erstatten. Es wurden zu diesem Behufe umfassende Versuche angestellt, deren Ergebniss die Kommission veranlasste, den Antrag zu stellen, dass für jeden einzelnen Kranken stündlich wenigstens 60^{Kbm} reine atmosphärische Luft zugeführt werden sollen, ja dass dieses Quantum selbst unter Umständen zu verdoppeln sei, also 120^{Kbm} betragen solle. Da wir Seite 388 angegeben haben, dass durch einen Menschen stündlich nur 6^{Kbm} Luft verbraucht werden, so beträgt nach dem Vorschlag der Kommission die zuzuleitende und abzuleitende Luftmenge 10 bis 20 mal mehr, als die Luftmenge, welche verdorben wird, und es tritt dann nach unserer Rechnung in den Krankenhäusern ein Luftzustand ein, bei welchem die Luft nahe 5 bis 10 Prozent verdorbene Luft enthält. Wenn man bedenkt, dass ein Kranker, insbesondere bei eiternden Wunden, wahre Giftgase aussendet, so wird man begreiflich finden, dass die Luft der Krankensäle nicht mehr als 5 bis 10 Prozent solcher Gase enthalten darf, wenn der Aufenthalt in den Sälen nicht geradezu gefährlich werden soll. Bisher hat man angenommen, dass für jeden Kranken eine stündliche Luftmenge von 20^{Kbm} hinreichend seien; in diesem Falle ist sehr nahe $\frac{W}{W_1} = 3$ und wird folglich vermöge (10) $\mathfrak{p} = \frac{1}{4} = 0{\cdot}25$, d. h. es tritt bei dieser Ventilation ein Zustand ein, wobei die Luft 25 Prozent Gift gase enthält; hieraus erklären sich die furchtbaren Spitalepidemien, die bis auf den heutigen Tag so oftmals in den Krankenhäusern eintreten. Wie gross die Luftmengen sind, welche in Strafhäusern, Versammlungssälen und Theatern nothwendig sind, damit ein leidlicher Zustand eintritt, ist leider noch nicht ermittelt. Nach den in den französischen Spitälern gemachten Erfahrungen wird man aber wohl nicht fehlen, wenn man feststellt, dass für die genannten Lokalitäten 5 bis 10 mal mehr Luft zu- und abgeführt werden muss. Wir glauben daher folgende Regeln aufstellen zu dürfen.

Lokalitäten.	Luftmenge in Kubikmetern pro 1 Stunde.
Für jeden Kranken in den Krankensälen . .	60 bis 120^{Kbm}
Für jeden Kranken in den Verbindungsgängen des Krankenhauses	20 „ 30^{Kbm}
Für jeden Gefangenen eines Zellengefängnisses pro Zelle	30 „ 40^{Kbm}
Für jeden Menschen eines Versammlungslokals, Theaters, Hörsals	30 „ 60^{Kbm}
Wegen eines Gasbrenners, welcher stündlich $0{\cdot}1^{Kbm}$ oder 4 Kubikfuss Gas konsumirt	4 „ 8^{Kbm}
Wegen jedem Kubikmeter Luft, die durch irgend eine ander Ursache verdorben wird	5 „ 10^{Kbm}

Wärmeverluste durch Wände, Decken und Fenster bei continuirlicher Heizung. Wenn die einen Raum einschliessenden Wände den Durchgang der Wärme absolut hinderten, brauchte man die in dem Raum enthaltene Luft nur einmal bis zu einer gewissen Temperatur zu erwärmen, und dann würde diese Temperatur fort und fort unverändert bleiben. Dass ein Raum continuirlich geheizt werden muss, wenn sich in demselben die Temperatur nicht ändern soll, ist nur deshalb nothwendig, weil durch die Wände und Fenster Wärme entweicht, die ersetzt werden muss, wenn eine Abnahme der Temperatur nicht eintreten soll. Diese Wärmeverluste durch Wände und Fenster wollen wir nun bestimmen, vorerst aber eine ununterbrochene Heizung und einen Beharrungszustand der Erwärmung voraussetzen, wobei weder die Temperatur der Luft im Raum und ausserhalb desselben, noch die Temperatur irgend eines Punktes der Wand mit der Zeit veränderlich ist.

Nennen wir:

F den Flächeninhalt einer Seite einer einfachen Wand, welche zwei Medien von einander trennt,

$\varDelta$ $\varDelta_0$ die constanten Temperaturen der Medien, $\varDelta > \varDelta_0$, e die Wanddicke, $\gamma\ \gamma_1$ die Wärmeübergangscoeffizienten, λ den Wärmeleitungscoeffizienten, k den Wärmedurchgangscoeffizienten, W die in Wärmeeinheiten ausgedrückte Wärmemenge, welche stündlich durch die Wand entweicht, so hat man nach der Seite 336 entwickelten Theorie des Wärmedurchgangs durch einfach gebildete Wände:

$$W = \frac{F\,(\varDelta - \varDelta_0)}{\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{e}{\lambda}} = k\,F\,(\varDelta - \varDelta_0) \quad \ldots \quad (1)$$

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{e}{\lambda}} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Diesen Ausdruck wollen wir nun zur Bestimmung der Wärmeverluste durch Mauern, Holzwände, Decken Fussböden und Fensterflächen benützen. Es kommt nun darauf an, für die Coeffizienten $\gamma_1\ \gamma_2\ \lambda$ richtige Erfahrungswerthe aufzustellen. Leider sind zu diesem Behufe noch nicht hinreichende Versuche angestellt worden, wir müssen uns mit denjenigen begnügen, welche *Peclet* in seinem Werke, Seite 355 und 393, Tome II., angibt. Nach diesen Versuchen ist:

Material	$\gamma_1 = \gamma_2$	λ	k
Bruchsteinmauern . .	18	0·80	—
Backsteinmauern . .	18	0·68	—
Tannenholz	16	0·17	—
Eichenholz	16	0·32	—
Glas	6	0·8	—
Luft	—	0·1	—
Einfache Fenster . .	—	—	3·66
Doppelfenster . . .	—	—	2·00

Vermittelst der Werthe von $\gamma\ \gamma_1\ \lambda$ für Bruchstein und Backstein ist folgende Tabelle über die Werthe von $k = \frac{1}{\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{e}{\lambda}}$ berechnet worden:

Mauerdicke e in Metern	Werthe von k für	
	Bruchsteine	Backsteine
0·3	2·00	1·80
0·4	1·63	1·37
0·5	1·36	1·17
0·6	1·16	1·00
0·7	1·01	0·87
0·8	0·90	0·77
0·9	0·81	0·70
1·0	0·73	0·63

Für Holzdecken und Fussböden erhält man folgende Resultate.

Für einen einfachen Holzboden oder eine einfache Decke ist:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{e}{\lambda}}$$

und dürfen wir nehmen $\gamma_1 = \gamma_2 = 16$, $\lambda = 0{\cdot}17$ (Tannenholz) $e = 0{\cdot}1$. Dann wird:

$$k = 1{\cdot}37 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Für einen Doppelboden ist dagegen:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{1}{\gamma_3} + \frac{1}{\gamma_4} + \frac{\varepsilon}{\lambda} + \frac{\varepsilon}{\lambda_1} + \frac{e}{\lambda_2}}$$

wobei $\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3\ \gamma_4$ die Uebergangscoeffizienten, ε die Dicke der Dielen, e die Dicke der Luftschicht zwischen den Dielen, $\lambda_1\ \lambda_2$ die Leitungscoeffizienten für Holz und Luft bezeichnen. Wir dürfen setzen: $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 16$, $\lambda_1 = 0{\cdot}17$ (Tannenholz) $\lambda_2 = 0{\cdot}1$ (Luft) $\varepsilon = 0{\cdot}1$, $e = 0{\cdot}3$, dann wird:

$$k = 0{\cdot}225 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Zur Berechnung der Wärmemenge W müssen wir noch die unter verschiedenen Umständen in Rechnung zu bringenden Werthe von $\Delta - \Delta_0$ angeben und ferner noch erklären, welche von den den Raum umschliessenden Flächen Wärmeverluste verursachen.

Für die Temperatur der äusseren Luft an kalten Wintertagen können wir -15^0 in Rechnung bringen. Es ist daher zu setzen

$$\Delta_0 = -15^0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Für die innere Temperatur der zu erwärmenden Räume dürfen wir in Rechnung bringen: 1) für Wohnungen $\Delta = 15$ bis 18°, 2) für Hörsäle, Versammlungssäle, Theater $\Delta = 15^\circ$, 3) für Pflanzenhäuser, gemässigtes Klima, $\Delta = 10^\circ$, tropische Pflanzen $\Delta = 15$ bis 20°, 4) für Strafanstalten $\Delta = 12^\circ$, 5) für Krankenhäuser $\Delta = 15$ bis 20°.

Was die Umschliessungsflächen betrifft, so sind folgende in Rechnung zu bringen: 1) diejenigen Hauptmauern des Gebäudes, welche einerseits mit der äusseren kalten Luft, anderseits mit der Luft der zu heizenden Räume in Berührung stehen, 2) Scheidewände, welche Räume trennen, von welchen der eine geheizt, der andere aber nicht geheizt wird, 3) die Bodenflächen des unteren Geschosses, 4) die Deckflächen des obersten Stockwerkes, wenn die Räume in demselben geheizt werden sollen, 5) die Flächen der Zwischendecken, wenn dieselben Räume trennen, von welchen der eine geheizt, der andere aber nicht geheizt werden soll. Wegzulassen aus der Rechnung sind solche Flächen, die Räume trennen, in welchen nahezu gleiche Temperaturen herrschen, also Scheidewände und Zwischendecken, wenn sie Räume trennen, die beide nicht oder beide gleich stark geheizt werden sollen.

Bei diesen Berechnungen des Wärmeverlustes durch Wände und Fenster wird vorausgesetzt, dass die eingeschlossene Luft an allen Punkten der Umschliessungsflächen einerlei Temperatur hat. Diese Voraussetzung ist ziemlich richtig für Dampf- und Wassercirkulationsheizungen, dagegen bedeutend unrichtig, wenn grosse Räume durch Oefen oder durch Luftheizungen erwärmt werden. Bei diesen letzteren Heizungen sind oft die Temperaturen an verschiedenen Orten des Raumes sehr verschieden, man muss in solchen Fällen für Δ den mittleren Werth in Rechnung bringen.

Heizung mit Unterbrechung. Ununterbrochene, bei Tag und bei Nacht fortgehende Heizungen kommen nur selten vor. (In Krankenhäusern und Pflanzenhäusern). In den meisten Fällen wird nur unter Tags continuirlich geheizt (Wohnzimmer). Oftmals sind Räume nur an einzelnen Tagen oder Tagesstunden zu erwärmen (Hörsäle, Theater, Versammlungssäle). Bei diesen Heizungen mit Unterbrechung treten keine Beharrungszustände ein, nicht nur die Temperatur in den Räumen, sondern auch die Mauertemperatur sind dann mit der Zeit variabel, in der Zwischenzeit, wenn nicht geheizt wird, erkalten die Mauern und nimmt die Temperatur in dem Raum nach einem gewissen Gesetze ab. Während die Heizung im Gang ist, wächst nicht nur die Temperatur im Raum, sondern werden auch die Wände erwärmt, nimmt also die Temperatur jedes Wand-punktes mit der Zeit zu. Wollte man auf alle diese Verhältnisse sehr genau Rücksicht nehmen und ganz rationelle Regeln aufstellen, durch welche unter allen Umständen die von einem Heizapparat zu liefernde Wärmemenge berechnet werden könnte, so würde man sich in höchst weitläufige, höchst verwickelte analytische Rechnungen einlassen müssen. Für die praktischen Zwecke genügt es, wenn man zuerst die Wärmeverluste berechnet, welche bei einer continuirlichen Heizung (der ein Beharrungszustand entspricht) eintreten, und dann diese Wärmemenge mit einem angemessenen Coefficienten f multiplizirt, der wohl nicht anders als nach dem Gefühl geschätzt werden kann. Wir wollen annehmen:

1) für continuirliche Heizung bei Tag und bei Nacht $f = 1$,
2) für continuirliche Heizung bei Tag und Nichtheizung bei Nacht $f = 1{\cdot}2$,
3) wenn nur in einzelnen Stunden geheizt werden soll, nach Umständen $f = 1{\cdot}5$ bis $2{\cdot}0$.

Das Anheizen. Wenn die Heizung eines Raumes beginnt, herrscht in demselben eine gewisse Temperatur, und befinden sich die Umschliessungswände in einem gewissen Erwärmungszustand. So wie die Heizung fortdauert, ändert sich allmählig sowohl die Temperatur der Luft im Raume, wie auch der Erwärmungszustand der Umschliessungswände, und erst nachdem die Heizung lange fortgesetzt worden ist, tritt (eine gleichförmige Heizung vorausgesetzt) ein gewisser Beharrungszustand ein, in welchem die Lufttemperatur des Raumes constant bleibt und der Erwärmungszustand der Einschliessungswände ebenfalls. Wir wollen diese Vorgänge, welche bei diesem Anheizen vorkommen, durch Rechnung zu bestimmen suchen.

Es sei Tafel XVIII., Fig. 4 A B C D ein Stück der Einschliessungswände. Wenn die Heizung beginnt, sei: T_0 die Temperatur der Luft, welche der Raum enthält, $u = f(x)$ das Erwärmungsgesetz der Wand, wobei $x = \overline{DF}$, welches Gesetz wir als gegeben betrachten. Nachdem das Anheizen eine Zeit t gedauert hat (wobei durch den Heizapparat in jeder Zeiteinheit eine constante Wärmemenge W abgegeben wird), sei: T die Temperatur der Luft im Raum, ferner Δ, U, Θ die Temperaturen der Wand in den Punkten, welche von C D um o, x, ε abstehen (ε die Wanddicke).

Nachdem die Heizung sehr lange oder wenn man will, unendlich lange fortgedauert hat, sind die Temperaturen für $x = o$, $x = x$, $x = \varepsilon$, beziehungsweise Δ_1 U_1 Θ_1, ferner die Temperatur der Luft im Raum, T_1. Die äussere Temperatur sei constant gleich $\mathfrak{T}$.

Nennen wir ferner: ϱ das Gewicht von einer Kubikeinheit des Wandmaterials, c_1 die Wärmekapazität dieses Materials, λ den Wärmeleitungscoeffizienten, γ_1 γ_2 die Wärmeübergangscoeffizienten durch die Ebenen CD und AB, L die constante im Raum enthaltene Luftmenge in Kilogrammen, c die Wärmekapazität der Luft, welche der Raum enthält, $\mathfrak{F}$ die totale innere Fläche der Einschliessungswände.

Die Gleichungen, welche die Lösung unseres Problems geben, sind nun folgende:

$$\frac{du}{dt} = a \frac{d^2 u}{dx^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

$$a = \frac{\lambda}{c_1 \varrho} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=\varepsilon} + \frac{\gamma_2}{\lambda} (\Theta - \mathfrak{T}) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=0} + \frac{\gamma_1}{\lambda} (T - \varDelta) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

$$W\,dt - L\,c\,dT = (T - \varDelta)\,\gamma_1 \mathfrak{F}\,dt \quad \ldots \quad (5)$$

Für $t = 0$ soll $T = T_0$, $u = \varphi(x)$ werden . . . . (6)

Für $t = \infty$ soll ein Beharrungszustand . . . . (7)

eintreten, in welchem $u_1 = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} x$ wird.

Die erste dieser Gleichungen drückt die Temperaturänderung aus, die dem Zeitelement dt an irgend einem Ort im Innern der Mauer entspricht.

Die Gleichung (3) bezieht sich auf das Entweichen der Wärme durch die Ebene CD.

Die Gleichung (4) bezieht sich auf den Eintritt der Wärme durch AB. Die Gleichung (5) drückt aus, dass die Differenz zwischen der Wärme $W\,dt$, die im Zeitelement produzirt wird und der Wärme $L\,c\,dt$, welche die Luft aufnimmt, durch die Ebene AB in die Mauer geht.

Da für $t = \infty$ ein Beharrungszustand eintritt, so hat man für denselben:

$$W = (T_1 - \varDelta_1)\,\gamma_1 \mathfrak{F} = (\Theta_1 - \mathfrak{T})\,\gamma_2 \mathfrak{F} = (\varDelta_1 - \Theta_1)\frac{\lambda}{\varepsilon}\mathfrak{F} \quad . \quad (8)$$

Hieraus findet man ohne Schwierigkeit:

$$T_1 = \mathfrak{T} + \frac{W}{\mathfrak{F}}\left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right) \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

$$\Delta_1 = \mathfrak{T} + \frac{W}{\mathfrak{F}}\left(\frac{1}{\gamma_2} + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right) \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

$$\Theta_1 = \mathfrak{T} + \frac{W}{\mathfrak{F}\,\gamma_2} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

demnach:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{T} - \frac{W}{\mathfrak{F}}\left(\frac{1}{\gamma_2} + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right) \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

$$\mathfrak{B} = -\frac{W}{\mathfrak{F}\,\lambda} \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

$$u_1 = \mathfrak{T} + \frac{W}{\mathfrak{F}}\left(\frac{1}{\gamma_2} + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right) - \frac{W}{\mathfrak{F}\,\lambda}x \quad \ldots \quad (14)$$

Den Bedingungen (1) und (7) wird entsprochen, wenn man setzt:

$$u = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,x + \Sigma\, e^{-\beta t}(\mathfrak{C}\cos\mu x + \mathfrak{D}\sin\mu x) \quad \ldots \quad (15)$$

wobei:

$$\beta = a\, u^2 \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

μ, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ sind vorläufig noch ganz unbestimmte Grössen, Σ drückt aus, dass die Bedingungen (1) und (7) durch eine Summe von Ausdrücken von der Form $e^{-\beta t}(\mathfrak{C}\cos\mu x + \mathfrak{D}\sin\mu x)$ entsprochen werden kann.

Aus dem Ausdruck (15) folgt:

$$\Delta = \mathfrak{A} + \Sigma\, e^{-\beta t}\,\mathfrak{C} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

$$\Theta = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,\varepsilon + \Sigma\, e^{-\beta t}(\mathfrak{C}\cos\mu\varepsilon + \mathfrak{D}\sin\mu\varepsilon) \quad \ldots \quad (18)$$

Durch Differenziation von (15) folgt:

$$\frac{du}{dx} = \mathfrak{B} - \Sigma\, e^{-\beta t}\,\mu(\mathfrak{C}\sin\mu x - \mathfrak{D}\cos\mu x) \quad \ldots \quad (19)$$

Setzt man $x = o$ und $x = \varepsilon$, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=o} &= \mathfrak{B} + \Sigma\, e^{-\beta t}\,\mu\,\mathfrak{D} \\ \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=\varepsilon} &= \mathfrak{B} - \Sigma\, e^{-\beta t}\,\mu(\mathfrak{C}\sin\mu\varepsilon - \mathfrak{D}\cos\mu\varepsilon) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (20)$$

Setzt man in die Gleichung (3) die so eben berechneten Werthe von Θ und $\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=\varepsilon}$, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{B} - \Sigma e^{-\beta t} \mu (\mathfrak{C} \sin \mu \varepsilon - \mathfrak{D} \cos \mu \varepsilon) \\ + \frac{\gamma_2}{\lambda} \left[\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \varepsilon + \Sigma e^{-\beta t} (\mathfrak{C} \cos \mu \varepsilon + \mathfrak{D} \sin \mu \varepsilon) - \mathfrak{T} \right] \end{array} \right\} = o \quad (21)$$

Da diese Gleichung für jeden Werth von t gelten soll, so muss sein:

$$\mathfrak{B} + \frac{\gamma_2}{\lambda} (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \varepsilon - \mathfrak{T}) = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

$$- \mu (\mathfrak{C} \sin \mu \varepsilon - \mathfrak{D} \cos \mu \varepsilon) + \frac{\gamma_2}{\lambda} (\mathfrak{C} \cos \mu \varepsilon + \mathfrak{D} \sin \mu \varepsilon) = o \quad . \quad (23)$$

Der Ausdruck (22) wird durch die Werthe von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, welche wir früher gefunden haben, identisch erfüllt. Aus (23) folgt dagegen:

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}} = \frac{\cos \mu \varepsilon + \frac{\gamma_2}{\lambda \mu} \sin \mu \varepsilon}{\sin \mu \varepsilon - \frac{\gamma_2}{\lambda \mu} \cos \mu \varepsilon} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Setzt man in (4) für $\left(\frac{du}{dx}\right)_{x = o}$, und für Δ die Werthe, welche (20) und (17) darbieten, so erhält man:

$$\mathfrak{B} + \Sigma e^{-\beta t} \mu \mathfrak{D} + \frac{\gamma_1}{\lambda} \left(T - \mathfrak{A} - \Sigma e^{-\beta t} \mathfrak{C} \right) = o$$

Hieraus folgt:

$$T = \mathfrak{A} + \Sigma e^{-\beta t} \mathfrak{C} - \frac{\lambda}{\gamma_1} \left(\mathfrak{B} + \Sigma e^{-\beta t} \mu \mathfrak{D} \right) \quad . \quad . \quad (25)$$

Differenzirt man diesen Ausdruck nach t, so folgt:

$$\frac{dT}{dt} = - \Sigma e^{-\beta t} \beta \mathfrak{C} + \frac{\lambda}{\gamma_1} \Sigma e^{-\beta t} \beta \mu \mathfrak{D} \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Setzt man (25) und (26) in (5), so erhält man:

$$W - L c \left(- \Sigma e^{-\beta t} \beta \mathfrak{C} + \frac{\lambda}{\gamma_1} \Sigma e^{-\beta t} \beta \mu \mathfrak{D} \right) =$$

$$\left[\mathfrak{A} + \Sigma e^{-\beta t} \mathfrak{C} - \frac{\lambda}{\gamma_1} \left(\mathfrak{B} + \Sigma e^{-\beta t} \mu \mathfrak{D} \right) - \mathfrak{A} - \Sigma e^{-\beta t} \mathfrak{C} \right] \gamma_1 \mathfrak{F}$$

Da auch diese Gleichung eine identische sein mus, so folgt aus derselben:

$$W = - \lambda \mathfrak{B} \mathfrak{F}$$

was mit (13) übereinstimmt, und:

$$L c \left(- \beta \mathfrak{C} + \frac{\lambda}{\gamma_1} \beta \mu \mathfrak{D} \right) = \lambda \mu \mathfrak{F} \mathfrak{D}$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}} = \lambda\,\mu\left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{\mathfrak{F}}{\mathrm{L\,c}\,\beta}\right)$$

oder wenn man für β seinen Werth $a\,\mu^2$ setzt;

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}} = \lambda\left(\frac{\mu}{\gamma_1} - \frac{\mathfrak{F}}{\mathrm{L\,c\,a}}\,\frac{1}{\mu}\right) \quad \ldots\ldots \quad (27)$$

Setzt man die Werthe von $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$, welche (24) und (27) darbieten, einander gleich, so erhält man für μ folgende transcendente Gleichung:

$$\lambda\left(\frac{\mu}{\gamma_1} - \frac{\mathfrak{F}}{\mathrm{L\,c\,a}}\,\frac{1}{\mu}\right) = \frac{\cos\mu\,\varepsilon + \frac{\gamma_2}{\lambda\,\mu}\sin\mu\,\varepsilon}{\sin\mu\,\varepsilon - \frac{\gamma_2}{\lambda\,\mu}\cos\mu\,\varepsilon} \quad \ldots \quad (28)$$

Setzt man den Werth $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$ in (25), so findet man:

$$\mathrm{T} = \mathfrak{A} - \frac{\lambda\,\mathfrak{B}}{\gamma_1} - \Sigma\,e^{-\beta\,t}\,\mathfrak{D}\,\frac{\mathfrak{F}\,\lambda}{\mathrm{L\,c\,a}}\,\frac{1}{\mu}$$

$$\mathrm{T} = \mathfrak{T} + \frac{\mathrm{W}}{\mathfrak{F}}\left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right) - \frac{\mathfrak{F}\,\lambda}{\mathrm{L\,c\,a}}\,\Sigma\,e^{-\beta\,t}\,\frac{\mathfrak{D}}{\mu}$$

oder wegen (9):

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 - \frac{\mathfrak{F}\,\lambda}{\mathrm{L\,c\,a}}\,\Sigma\,e^{-\beta\,t}\,\frac{\mathfrak{D}}{\mu} \quad \ldots\ldots \quad (29)$$

Für $t = o$ wird $\mathrm{T} = \mathrm{T}_0$, demnach:

$$\mathrm{T}_0 = \mathrm{T}_1 - \frac{\mathfrak{F}\,\lambda}{\mathrm{L\,c\,a}}\,\Sigma\,\frac{\mathfrak{D}}{\mu} \quad \ldots\ldots \quad (30)$$

Durch den Unterschied von (29) und (30) folgt auch:

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_0 + \frac{\mathfrak{F}\,\lambda}{\mathrm{L\,a\,c}}\,\Sigma\,\frac{\mathfrak{D}}{\mu}\left(1 - e^{-\beta\,t}\right) \quad \ldots \quad (31)$$

Es erübrigt uns nun noch, der Bedingung wegen des Initialzustandes zu genügen, wobei wir ein von *Poisson* angebahntes Verfahren befolgen.

Setzen wir:

$$u - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,x) = \xi \quad \ldots\ldots \quad (32)$$

$$\mathfrak{D}\,(m\cos\mu\,x + \sin\mu\,x) = \mathrm{X} \quad \ldots\ldots \quad (33)$$

so wird $\left(\text{weil } \frac{d\,u}{d\,t} = \frac{d\,\xi}{d\,t},\ \frac{d^2 u}{d\,x^2} = \frac{d^2 \xi}{d\,x^2} \text{ ist}\right)$ die Gleichung (1):

$$\frac{d\,\xi}{d\,t} = a\,\frac{d^2\,\xi}{d\,x^2} \quad \ldots\ldots \quad (34)$$

und der Ausdruck (15):

$$\xi = \Sigma\, e^{-\beta t} X \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

In dem Ausdruck (33) bedeutet das Zeichen m:

$$m = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}} = \lambda\left(\frac{\mu}{\gamma_1} - \frac{\mathfrak{F}}{L a c} \cdot \frac{1}{\mu}\right) = \frac{\cos\mu\varepsilon + \frac{\gamma_2}{\mu\lambda}\sin\mu\varepsilon}{\sin\mu\varepsilon - \frac{\gamma_2}{\mu\lambda}\cos\mu\varepsilon} \quad . \quad (36)$$

Bezeichnen wir durch μ_1 irgend eine individuelle Wurzel der transcendenten Gleichung (28) oder (36) und durch $\beta_1\ \mathfrak{D}_1\ m_1\ X_1$ die dieser individuellen Wurzel entsprechenden Werthe von $\beta\ \mathfrak{D}\ m\ X$.

Multipliziren wir die Gleichung (34) mit $X_1\, dx$ und integriren dieselbe von $x = o$ bis $x = \varepsilon$, so erhalten wir:

$$\int_o^\varepsilon X_1 \frac{d\xi}{dt}\, dx = a \int_o^\varepsilon X_1 \frac{d^2\xi}{dx^2}\, dx \quad \ldots\ldots \quad (37)$$

Nun findet man durch zweimalige Anwendung der Formel $\int u\, dv = uv - \int v\, du$:

$$\int X_1 \frac{d^2\xi}{dx^2}\, dx = X_1 \frac{d\xi}{dx} - \xi \frac{dX_1}{dx} + \int \xi \frac{d^2 X_1}{dx^2}\, dx$$

Setzt man in den Gliedern ausserhalb der Integrale

$$X_1 = \mathfrak{D}_1(m_1\cos\mu_1 x + \sin\mu_1 x),\ \xi = \Sigma X e^{-\beta t} = \Sigma\mathfrak{D}(m\cos\mu x + \sin\mu x)\, e^{-\beta t}$$

$$\frac{dX_1}{dx} = -\mu_1\mathfrak{D}_1(m_1\sin\mu_1 x - \cos\mu_1 x),\ \frac{d\xi}{dx} = -\Sigma\mathfrak{D}\, e^{-\beta t}\mu(m\sin\mu x - \sin\mu x)$$

so wird:

$$\int X_1 \frac{d^2\xi}{dx^2}\, dx = \Sigma\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1 e^{-\beta t}\begin{bmatrix} -\mu(m_1\cos\mu_1 x + \sin\mu_1 x)(m\sin\mu x - \cos\mu x) \\ +\mu_1(m\cos\mu x + \sin\mu x)(m_1\sin\mu_1 x - \cos\mu_1 x \end{bmatrix}$$

$$+ \int \xi \frac{d^2 X_1}{dx^2}\, dx$$

oder wenn man die Integration von $x = o$ bis $x = \varepsilon$ ausdehnt

$$\int_o^\varepsilon X_1 \frac{d^2\xi}{dx^2}\, dx = \Sigma\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1 e^{-\beta t}\begin{bmatrix} -\mu(m_1\cos\mu_1\varepsilon + \sin\mu_1\varepsilon)(m\sin\mu\varepsilon - \cos\mu\varepsilon) \\ +\mu_1(m\cos\mu\varepsilon + \sin\mu\varepsilon)(m_1\sin\mu_1\varepsilon - \cos\mu_1\varepsilon) \\ -\mu m_1 + \mu_1 m \end{bmatrix}$$

$$+ \int_o^\varepsilon \xi \frac{d^2 X_1}{dx^2}\, dx \quad \ldots\ldots \quad (38)$$

Setzt man in die beiden in der Klammer enthaltenen trigonometrischen Ausdrücke für m und m_1 die Werthe

$$m = \frac{\cos\mu\varepsilon + \frac{\gamma_2}{\mu\lambda}\sin\mu\varepsilon}{\sin\mu\varepsilon - \frac{\gamma_2}{\mu\lambda}\cos\mu\varepsilon}$$

$$m_1 = \frac{\cos\mu_1\varepsilon + \frac{\gamma_2}{\mu_1\lambda}\sin\mu_1\varepsilon}{\sin\mu_1\varepsilon + \frac{\gamma_2}{\mu_1\lambda}\cos\mu_1\varepsilon}$$

dagegen in die Glieder $-\mu m_1 + \mu_1 m$ für m und m_1 die Werthe

$$m = \lambda\left(\frac{\mu}{\gamma_1} - \frac{\mathfrak{F}}{L a c}\frac{1}{\mu}\right)$$

$$m_1 = \lambda\left(\frac{\mu_1}{\gamma_1} - \frac{\mathfrak{F}}{L a c}\frac{1}{\mu_1}\right)$$

so findet man, dass jene trigonometrischen Ausdrücke sich auf Null reduziren, und dass

$$-\mu m_1 + \mu_1 m = \frac{\mathfrak{F}\lambda}{L c a}\left(\frac{\mu}{\mu_1} - \frac{\mu_1}{\mu}\right)$$

wird.

Die Gleichung (38) wird demnach:

$$\int_0^\varepsilon X_1 \frac{d^2\xi}{dx^2} dx = \Sigma\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1 e^{-\beta t}\frac{\mathfrak{F}\lambda}{L c a}\left(\frac{\mu}{\mu_1} - \frac{\mu_1}{\mu}\right) + \int_0^\varepsilon \xi \frac{d^2 X_1}{dx^2} dx$$

Führt man diesen Integralwerth in (37) ein, so erhält man:

$$\int_0^\varepsilon X_1 \frac{d\xi}{dt} dx = \Sigma\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1 e^{-\beta t}\frac{\mathfrak{F}\lambda}{L c}\left(\frac{\mu}{\mu_1} - \frac{\mu_1}{\mu}\right) + a\int_0^\varepsilon \xi \frac{d^2 X_1}{dx^2} dx \quad (39)$$

Allein es ist:

$$\int_0^\varepsilon X_1 \frac{d\xi}{dt} dx = \frac{d}{dt}\int_0^\varepsilon X_1 \xi\, dx$$

$$\int_0^\varepsilon \xi \frac{d^2 X_1}{dx^2} dx = -\mu_1^2\int_0^\varepsilon \xi\,\mathfrak{D}_1(m_1\cos\mu_1 x + \sin\mu_1 x)\, dx = -\mu_1^2\int_0^\varepsilon \xi X_1 dx \quad (40)$$

Demnach wird (39):

$$\frac{d}{dt}\int_0^\varepsilon X_1 \xi\, dx = \Sigma\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1 e^{-\beta t}\frac{\mathfrak{F}\lambda}{L c}\left(\frac{\mu}{\mu_1} - \frac{\mu_1}{\mu}\right) - a\mu_1^2\int_0^\varepsilon \xi X_1 dx \quad (41)$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\int_0^\varepsilon \xi X_1 dx_1 = y \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (42)$$

so wird die Gleichung (41) wegen $a\,\mu_1^2 = \beta_1$

$$\frac{dy}{dt} = \Sigma \mathfrak{D}\,\mathfrak{D}_1\,\frac{\mathfrak{F}\lambda}{Lc}\left(\frac{\mu}{\mu_1} - \frac{\mu_1}{\mu}\right) e^{-\beta t} - \beta_1\,y \quad . \; . \; . \quad (43)$$

Das Integrale dieser Gleichung ist:

$$y = \Sigma\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{D}_1\,\frac{\mathfrak{F}\lambda}{Lc}\left(\frac{\mu}{\mu_1} - \frac{\mu_1}{\mu}\right)\frac{e^{-\beta t}}{\beta_1 - \beta} + \mathfrak{H}\,e^{-\beta_1 t} \quad . \; . \quad (44)$$

wobei $\mathfrak{H}$ eine hinsichtlich x und t Constante der Integration bedeutet. Wegen $\beta = a\,\mu^2$, $\beta_1 = a\,\mu_1^2$ wird:

$$\left(\frac{\mu}{\mu_1} - \frac{\mu_1}{\mu}\right)\frac{1}{\beta_1 - \beta} = \frac{\mu^2 - \mu_1^2}{\mu\,\mu_1}\,\frac{1}{a\,(\mu_1^2 - \mu^2)} = -\,\frac{1}{a\,(\mu\,\mu_1)}$$

demnach auch:

$$y = -\,\Sigma\mathfrak{D}\,\mathfrak{D}_1\,\frac{\mathfrak{F}\lambda}{Lca}\,\frac{e^{-\beta t}}{\mu\,\mu_1} + \mathfrak{H}\,e^{-\beta_1 t}$$

demnach:

$$\int_0^{\varepsilon} \xi\,X_1\,dx = -\,\Sigma\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{D}_1\,\frac{\mathfrak{F}\lambda}{Lca}\,\frac{e^{-\beta t}}{\mu\,\mu_1} + \mathfrak{H}\,e^{-\beta_1 t} \quad . \; . \quad (45)$$

Für $t = o$ soll $\mu = \varphi(x)$, mithin $\xi = \varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,x)$ werden, demnach folgt aus (45):

$$\int_0^{\varepsilon} [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,x)]\,X_1\,dx = -\,\Sigma\mathfrak{D}\,\mathfrak{D}_1\,\frac{\mathfrak{F}\lambda}{Lca}\,\frac{1}{\mu\,\mu_1} + \mathfrak{H} \quad . \quad (46)$$

Durch Elimination von $\mathfrak{H}$ aus (45) und (46) folgt:

$$\int_0^{\varepsilon} \xi\,X_1\,dx = \left\{\begin{array}{l} -\,\Sigma\mathfrak{D}\,\mathfrak{D}_1\,\dfrac{\mathfrak{F}\lambda}{Lca}\,\dfrac{e^{-\beta t}}{\mu\,\mu_1} \\ +\,e^{-\beta_1 t}\left[\displaystyle\int_0^{\varepsilon}\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,x)\right]X_1\,dx + \Sigma\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{D}_1\,\dfrac{\mathfrak{F}\lambda}{Lca} \end{array}\right\}$$

$$\int_0^{\varepsilon} \xi\,X_1\,dx = \left\{\begin{array}{l} \Sigma\mathfrak{D}\,\mathfrak{D}_1\,\dfrac{\mathfrak{F}\lambda}{Lca}\,\dfrac{1}{\mu\,\mu_1}\left(e^{-\beta_1 t} - e^{-\beta t}\right) \\ +\,e^{-\beta_1 t}\displaystyle\int_0^{\varepsilon}[\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,x)]\,X_1\,dx \end{array}\right\} \quad . \; . \quad (47)$$

Linker Hand des Gleichheitszeichens steht (wegen ξ) eine Reihe, rechter Hand ebenfalls und noch das Integralglied. Denkt man sich, dass man diese Reihen ausschreibe, indem man für β und μ alle individuellen Wurzelwerthe setzt, so müssen die Glieder, welche bestimmten individuellen Werthen entsprechen, gleich sein. Für $\beta = \beta_1$

und $\mu = \mu_1$ gibt aber das Glied linker Hand $\int_0^\varepsilon \xi_1 X_1 \, dx$ und der Ausdruck rechter Hand $e^{-\beta_1 t} \int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x)] X_1 \, dx$. Man hat daher:

$$\int_0^\varepsilon \xi_1 X_1 \, dx = e^{-\beta_1 t} \int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x)] X_1 \, dx \quad . \quad . \quad (48)$$

Setzt man für ξ_1 und X_1 die Werthe $e^{-\beta_1 t} X_1 =$ $e^{-\beta_1 t} \mathfrak{D}_1 (m_1 \cos \mu_1 x + \sin \mu_1 x)$ und $X_1 = \mathfrak{D}_1 (m_1 \cos \mu_1 x + \sin \mu_1 x)$ so wird (48):

$$\int_0^\varepsilon e^{-\beta_1 t} \mathfrak{D}_1^2 (m_1 \cos \mu_1 x + \sin \mu_1 x)^2 \, dx$$

$$= e^{-\beta_1 t} \int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x)] \, \mathfrak{D}_1 (m_1 \cos \mu_1 x + \sin \mu_1 x) \, dx$$

und hieraus folgt endlich:

$$\mathfrak{D}_1 = \frac{\int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x)] (m_1 \cos \mu_1 x + \sin \mu_1 x) \, dx}{\int_0^\varepsilon (m_1 \cos \mu_1 x + \sin \mu_1 x)^2 \, dx} \quad . \quad . \quad (49)$$

Weil aber für β_1 und μ_1 jeder beliebige individuelle Wurzelwerth genommen werden konnte, so gibt dieser Ausdruck überhaupt jeden individuellen Werth von $\mathfrak{D}$. Man kann daher allgemein schreiben:

$$\mathfrak{D} = \frac{\int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x)] (m \cos \mu x + \sin \mu x) \, dx}{\int_0^\varepsilon (m \cos \mu x + \sin \mu x)^2 \, dx} \quad . \quad . \quad (50)$$

Das Integrale des Nenners kann ausgerechnet werden. Es ist:

$$(m \cos \mu x + \sin \mu x)^2 = m^2 \cos^2 \mu x + \sin^2 \mu x + 2 m \cos \mu x \sin \mu x$$

oder wegen $\cos^2 \mu x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2 \mu x)$, $\sin^2 \mu x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2 \mu x)$
$2 \sin \mu x \cos \mu x = \sin 2 \mu x$

$$(m \cos \mu x + \sin \mu x)^2 = m^2 \frac{1}{2} (1 + \cos 2 \mu x) + \frac{1}{2} (1 - \cos 2 \mu x) + m \sin 2 \mu x$$

$$= \frac{1}{2} (m^2 + 1) + \frac{1}{2} \cos 2 \mu x (m^2 - 1) + m \sin 2 \mu x$$

daher:

$$\int_0^\varepsilon (m \cos \mu x + \sin \mu x)^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{2} (m^2 + 1) \varepsilon + \frac{1}{2} \frac{m^2 - 1}{2 \mu} \sin 2 \mu \varepsilon + \frac{m}{2 \mu} (1 - \cos 2 \mu \varepsilon)$$

$$\int_0^\varepsilon (m \cos \mu x + \sin \mu x)^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[(m^2 + 1) \varepsilon + \frac{m}{\mu} \right] + \frac{1}{2} \frac{m^2 - 1}{2 \mu} \sin 2 \mu \varepsilon - \frac{m}{2 \mu} \cos 2 \mu \varepsilon$$

demnach erhält man endlich:

$$\mathfrak{D} = \frac{\int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x)] (m \cos \mu x + \sin \mu x) \, dx}{\frac{1}{2} \left[(m^2 + 1) \varepsilon + \frac{m}{\mu} \right] + \frac{1}{4} \frac{m^2 - 1}{\mu} \sin 2 \mu \varepsilon - \frac{m}{2 \mu} \cos 2 \mu \varepsilon} \qquad (51)$$

Es ist $\mathfrak{W} = \int_0^\varepsilon \mathfrak{F} \, dx \, \varrho \, c_1 \, u = \mathfrak{F} \varrho c_1 \int_0^\varepsilon u \, dx$ die zur Zeit t in der Mauer enthaltene Wärmemenge; demnach:

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{F} \varrho c_1 \int_0^\varepsilon \left[\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x + \Sigma e^{-\beta t} \mathfrak{D} (m \cos \mu x + \sin \mu x) \right] dx$$

oder

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{F} \varrho c_1 \left[\mathfrak{A} \varepsilon + \mathfrak{B} \frac{\varepsilon^2}{2} + \Sigma e^{-\beta t} \frac{\mathfrak{D}}{\mu} (m \sin \mu \varepsilon - \cos \mu \varepsilon + 1) \right]$$

Es ist aber wegen (36)

$$m \sin \mu \varepsilon - \cos \mu \varepsilon = \frac{\gamma_2}{\lambda \mu} (m \cos \mu \varepsilon + \sin \mu \varepsilon)$$

demnach wird $\mathfrak{W}$:

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{F} \varrho c_1 \left[\mathfrak{A} \varepsilon + \mathfrak{B} \frac{\varepsilon^2}{2} + \Sigma e^{-\beta t} \frac{\mathfrak{D}}{\mu} \frac{\gamma_2}{\lambda \mu} (m \cos \mu \varepsilon + \sin \mu \varepsilon) + \Sigma e^{-\beta t} \frac{\mathfrak{D}}{\mu} \right]$$

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{F} \varrho c_1 \left[\mathfrak{A} \varepsilon + \mathfrak{B} \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\gamma_2}{\lambda} \Sigma e^{-\beta t} \frac{\mathfrak{D}}{\mu^2} (m \cos \mu \varepsilon + \sin \mu \varepsilon) + \Sigma e^{-\beta t} \frac{\mathfrak{D}}{\mu} \right]$$

Für $t = 0$ ist demnach die in der Mauer enthaltene Wärmemenge $\mathfrak{W}$:

$$\mathfrak{W}_{t=0} = \mathfrak{F}\varrho c_1 \left[\mathfrak{A}\varepsilon + \mathfrak{B}\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\gamma_1}{\lambda}\Sigma\frac{\mathfrak{D}}{\mu^2}(\mathrm{m}\cos\mu\varepsilon + \sin\mu\varepsilon) + \Sigma\frac{\mathfrak{D}}{\mu}\right]$$

Diese Wärmemenge ist aber auch gleich

$$\int_0^\varepsilon \mathfrak{F}\, dx\, \varrho\, c_1 \varphi(x) = \mathfrak{F}\,\varrho\, c_1 \int_0^\varepsilon \varphi(x)\, dx$$

demnach erhalten wir:

$$\int_0^\varepsilon \varphi(x)\, dx = \mathfrak{A}\varepsilon + \mathfrak{B}\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\gamma_1}{\lambda}\Sigma\frac{\mathfrak{D}}{\mu^2}(\mathrm{m}\cos\mu\varepsilon + \sin\mu\varepsilon) + \Sigma\frac{\mathfrak{D}}{\mu} \quad (52)$$

Vereinfachung der Resultate. Durch die aufgefundenen Resultate ist zwar das vorgelegte Problem analytisch gelöst, allein diese Lösung ist für praktische Zwecke so viel wie keine Lösung, denn durch diesen Wust von Rechnungen ist man doch kaum im Stande, den Erwärmungszustand der Mauern und der eingeschlossenen Luft zu bestimmen. Wir wollen daher sehen, ob es nicht möglich ist, durch Annäherungen vorwärts zu dringen.

Wir betrachten zu diesem Behufe zunächst die transcendente Gleichung (36).

Setzt man zur Abkürzung $\mu\varepsilon = x$, $\mu\varepsilon \operatorname{tang} \mu\varepsilon = y$, so findet man aus jener Gleichung (36):

$$y = x \operatorname{tang} x = \frac{x^2\left(1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) - \frac{\mathfrak{F}\lambda\varepsilon}{\mathrm{Lac}}\frac{\gamma_2\varepsilon}{\lambda}}{x^2\frac{\lambda}{\gamma_1\varepsilon} - \left(\frac{\mathfrak{F}\lambda\varepsilon}{\mathrm{Lac}} + \frac{\gamma_2\varepsilon}{\lambda}\right)} \quad . \; . \; . \quad (53)$$

Konstruirt man die beiden Kurven, die durch diesen Ausdruck bestimmt werden, so bestimmen die Abscissen ihrer Durchschnittspunkte die Wurzeln der transcendenten Gleichung (36):

Die Kurve k, deren Gleichung $y = x \operatorname{tang} x$ ist, besteht aus unendlich vielen congruenten Parthien $k_0\ k_1\ k_2 \ldots$, Tafel XVIII., Fig. 5, die nach oben und nach unten assymptotisch verlaufen. Die Kurve H, deren Gleichung die Form hat:

$$y = \frac{x^2\alpha - \beta}{x^2\alpha_1 - \beta_1}$$

besteht aus zwei Parthien H_1 und H_2. Der Zweig H_1 schneidet die Abscissenaxe in einem Punkt, dessen Abscisse gleich $0\,m = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ ist, und fällt bei $x = 0\,n = \sqrt{\frac{\beta_1}{\alpha_1}}$ assymptotisch herab. Der Zweig H_2

beginnt bei $x = O\,n = \sqrt{\frac{\beta_1}{\alpha_1}}$ mit einer vertikalen Assymptote und verläuft für $x = \infty$ horizontal aus.

Man kann an der Figur erkennen, dass die Abscissen der Durchnittspunkte $a_0\ a_1\ a_2 \ldots$ ausgedrückt werden können durch:

$$\varepsilon\,\mu = (2\,i + 1)\,\frac{\pi}{2} + \xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

wobei i jede beliebige positive ganze Zahl, 0 mit eingeschlossen und ξ eine im Verhältniss zu $(2\,i + 1)\frac{\pi}{2}$ sehr kleine Grösse bezeichnet, die auf folgende Weise bestimmt wird. Es ist ganz genau $\operatorname{tang} \varepsilon\,\mu = -\operatorname{Cotg} \xi$, die Gleichung (53) kann daher geschrieben werden

$$-\left[(2\,i+1)\frac{\pi}{2} + \xi\right]\operatorname{Cotg}\xi = \frac{\left[(2\,i+1)\frac{\pi}{2} + \xi\right]^2\left(1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) - \frac{\mathfrak{F}\,\lambda\,\varepsilon}{L\,a\,c}\,\frac{\gamma_2\,\varepsilon}{\lambda}}{\left[(2\,i+1)\frac{\pi}{2} + \xi\right]^2\frac{\lambda}{\gamma_1\,\varepsilon} - \left(\frac{\mathfrak{F}\,\lambda\,\varepsilon}{L\,a\,c} + \frac{\gamma_2\,\varepsilon}{\lambda}\right)} \quad (55)$$

Vernachlässigt man ξ gegen $(2\,i + 1)\frac{\pi}{2}$, so wird dieser Ausdruck:

$$-\operatorname{Cotg}\xi = \frac{1}{2\,i\,\pi}\,\frac{(2\,i+1)^2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left(1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) - \frac{\mathfrak{F}\,\lambda\,\varepsilon}{L\,a\,c}\,\frac{\gamma_2\,\varepsilon}{\lambda}}{(2\,i+1)^2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\frac{\lambda}{\gamma_1\,\varepsilon} - \left(\frac{\mathfrak{F}\,\lambda\,\varepsilon}{L\,a\,c} + \frac{\gamma_1\,\varepsilon}{\lambda}\right)} \quad . \quad (56)$$

Wir wollen diese Formel auf einen speziellen Fall anwenden, um zu zeigen, dass die Annahme (54) zulässig ist.

Ein Raum von 1000^{Kbm} sei umschlossen von Mauern von 1^m Dicke und 600^{qm} Oberfläche. In diesem Fall ist zu setzen, wenn die Stunde als Zeiteinheit angenommen wird:

$$\mathfrak{F} = 600, \quad L = 1000 \times 1{\cdot}3 = 1300^{Klg}, \quad c = 0{\cdot}237, \quad c_1 = 0{\cdot}2$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 18, \quad \lambda = 0{\cdot}8, \quad \varrho = 2000, \quad a = \frac{\lambda}{c_1\,\varrho} = \frac{1}{500}, \quad \varepsilon = 1^m$$

$$\frac{\lambda}{\gamma_1} = 0{\cdot}04, \quad \frac{\gamma_2}{\lambda} = 22{\cdot}5, \quad \frac{\mathfrak{F}\,\lambda}{L\,a\,c} = 800$$

und man findet:

$$-\operatorname{Cotg}\xi = \frac{31{\cdot}8}{2\,i+1}\,\frac{(2\,i+1)^2 - 3648}{(2\,i+1)^2 - 8335} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

Für $i =$	0	1	2	3	4	5	.... ∞
wird $\operatorname{Cotg}\xi =$	− 14	− 4·6	− 3	− 2	− 1·5	− 1·2	 0
$\xi =$	− 4°	− 12°	− 18°	− 26°	− 33°	− 40°	... 90°
$\dfrac{(2\,i+1)\frac{\pi}{2} + \xi}{(2\,i+1)\frac{\pi}{2}} =$	0·96	0·96	0·96	0·96	0 96	0·96	1·00

Hieraus sieht man, dass die Annahme (54) zulässig ist und dass man sogar setzen kann:

$$\mu\,\varepsilon = (2\,i + 1)\,\frac{\pi}{2} + \xi = 0{\cdot}96\,(2\,i + 1)\,\frac{\pi}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

Für diesen Werth von $\mu\,\varepsilon$ wird

$$m = \frac{\lambda\,\mu}{\gamma_1} - \frac{\mathfrak{F}\,\lambda}{L\,a\,c}\,\frac{1}{\mu} = 0{\cdot}06\,(2\,i + 1)\,\frac{1}{\varepsilon} - \frac{533\,\varepsilon}{2\,i + 1} \quad . \quad (58)$$

und nun findet man

für $i =$	1	2	4	10	46	100	144	200	500
$\mu\,\varepsilon =$	4·5	7·5	13·5	31·5	141	302	433	601	1500
$m =$	-176	-106	-58	-25	0	$+9{\cdot}4$	$+15{\cdot}5$	$+22{\cdot}7$	$+60$

Die Grösse m hat also sowohl für kleine als auch für grosse Werthe von i einen grossen numerischen Werth. Für $i = 46$ wird jedoch $m = 0$ und ind der Nähe von $i = 46$ wird m sehr klein.

Berechnen wir noch den Werth der Exponentialgrösse $e^{-\beta t}$ welche in unseren Formeln erscheint. Es ist:

$$\beta = a\,\mu^2 = \frac{\lambda}{c_1\,\varrho}\left[\frac{0{\cdot}96\,(2\,i + 1)}{\varepsilon}\,\frac{\pi}{2}\right]^2$$

$$\beta = \frac{(2\,i + 1)^2}{222} \text{ demnach } e^{-\beta t} = e^{-\frac{(2\,i + 1)^2\,t}{222}} \quad . \quad (59)$$

Man findet:

für $i =$	0	7	46	100
$\mu\,\varepsilon =$	1·5	22·5	141	302
$m =$	-533	-34	0	$+9{\cdot}4$
$\beta =$	122	1	39	182

Aus diesen Werthen von β ersieht man, dass in der Summe alle Glieder vernachlässiget werden dürfen, für welche i gleich oder grösser als 7 ist. Hierdurch werden aber unsere allgemeinen Ausdrücke ungemein vereinfacht, denn nun wird vermöge des Ausdruckes (51), wenn m numerisch gross ist,

$$m\,\mathfrak{D} = \frac{2}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}[\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,x)]\,\cos\mu\,x\,d\,x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

$$\frac{\mathfrak{D}}{\mu} = \frac{2}{\varepsilon}\,\frac{\int_0^{\varepsilon}[\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,x)]\,\cos\mu\,x\,d\,x}{\frac{0{\cdot}09\,(2\,i + 1)^2}{\varepsilon^2} - 800}$$

oder auch, weil $2i+1$ nicht grösser als 15 genommen zu werden braucht

$$\frac{\mathfrak{D}}{\mu} = -\frac{1}{400\,\varepsilon}\int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x)] \cos\mu x\, dx \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

oder auch, weil $m\,\mu$ gleich $-\frac{\mathfrak{F}\lambda}{L a c}$ wird, wenn i nicht grösser als 7 ist

$$\frac{\mathfrak{D}}{\mu} = -\frac{L a c}{\mathfrak{F}\lambda}\,\frac{2}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x)] \cos\mu x\, dx \quad . \quad . \quad (62)$$

Wir erhalten nunmehr folgende Resultate:

$$\mu\varepsilon = 0{\cdot}96\,(2i+1)\,\frac{\pi}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} u = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x \\ + \frac{2}{\varepsilon}\Sigma e^{-\frac{\overline{0\;96}^{\,2}\pi^2\lambda}{4 c_1 \varrho \varepsilon^2}(2i+1)^2 t}\left\{\cos\mu x \int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x)] \cos\mu x\, dx\right\} \end{array}\right\} \quad (63)$$

$$\left.\begin{array}{l} T = \mathfrak{T} + \frac{W}{\mathfrak{F}}\left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right) \\ + \frac{2}{\varepsilon}\,\Sigma\, e^{-\frac{\overline{0\;96}^{\,2}\pi^2\lambda}{4 c_1 \varrho \varepsilon^2}(2i+1)^2 t}\left\{\int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x)] \cos\mu x\, dx\right\} \end{array}\right\} \quad (64)$$

Diese zwei Gleichungen sind nicht im Widerspruch; sie harmoniren, denn setzt man in (63) $x = 0$, so wird $u = \varDelta$, demnach

$$\varDelta = \mathfrak{A} + \frac{2}{\varepsilon}\,\Sigma\, e^{-\beta t}\int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x)] \cos\mu x\, dx$$

Zieht man diesen Ausdruck von T ab, so findet man:

$$T - \varDelta = \mathfrak{T} + \frac{W}{\mathfrak{F}}\left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right) - \mathfrak{A}$$

oder wegen (12)

$$T - \varDelta = \frac{W}{\mathfrak{F}}\,\frac{1}{\gamma_1}, \qquad W = \mathfrak{F}\,\gamma_1\,(T - \varDelta)$$

was richtig ist.

Für die früher angegebenen numerischen Daten wird:

$$u = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \frac{2}{\varepsilon}\Sigma e^{-\left(\frac{2i+1}{\varepsilon}\right)^2\frac{t}{222}}\left\{\cos\mu x\int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x)] \cos\mu x\, dx\right\} \quad (65)$$

$$\left\{\begin{array}{c} T = \mathfrak{T} + \frac{W}{\mathfrak{F}}\left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right) \\ + \frac{2}{\varepsilon}\, \Sigma\, e^{-\left(\frac{2i+1}{\varepsilon}\right)^2 \frac{t}{222}} \int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\, x)] \cos \mu\, x\, d\, x \end{array}\right\} \quad . \; . \quad (66)$$

$$\mu\, \varepsilon = 0{\cdot}96\, (2\, i + 1) \frac{\pi}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (67)$$

Wir wollen diese Ergebnisse noch mehr spezialisiren, indem wir annehmen, dass die Temperatur in allen Punkten der Mauer, so wie auch die Temperatur der eingeschlossenen Luft beim Beginn der Anheizung constant und gleich der äusseren Lufttemperatur ist. Wir setzen also:

$$\varphi(x) = \mathfrak{T}, \quad T_0 = \mathfrak{T} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (68)$$

und dann wird:

$$\int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\, x)] \cos \mu\, x\, d\, x = \int_0^\varepsilon (\mathfrak{T} - \mathfrak{A} - \mathfrak{B}\, x) \cos \mu\, x\, d\, x$$

$$= (\mathfrak{T} - \mathfrak{A}) \int_0^\varepsilon \cos \mu\, x\, d\, x - \mathfrak{B} \int_0^\varepsilon x \cos \mu\, x\, d\, x$$

$$= (\mathfrak{T} - \mathfrak{A}) \frac{\sin \mu\, \varepsilon}{\mu} - \mathfrak{B}\left(\frac{\varepsilon \sin \mu\, \varepsilon}{\mu} + \frac{\cos \mu\, \varepsilon - 1}{\mu^2}\right)$$

$$= (\mathfrak{T} - \mathfrak{A} - \mathfrak{B}\, \varepsilon) \frac{\sin \mu\, \varepsilon}{\mu} - \mathfrak{B} \frac{\cos \mu\, \varepsilon - 1}{\mu^2}$$

und wegen (12) und (13):

$$= - \frac{W}{\mathfrak{F}\, \gamma_2} \frac{\sin \mu\, \varepsilon}{\mu} + \frac{W}{\mathfrak{F}\, \lambda} \frac{\cos \mu\, \varepsilon - 1}{\mu^2}$$

Hierdurch wird (65) und (66):

$$\left\{\begin{array}{c} u = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\, x \\ + \frac{2}{\varepsilon} \frac{W}{\mathfrak{F}\, \gamma_2}\, \Sigma\, e^{-\left(\frac{2i+1}{\varepsilon}\right)^2 \frac{t}{222}} \frac{\cos \mu\, x}{\mu} \left[\frac{\gamma_2}{\lambda\, \mu} (\cos \mu\, \varepsilon - 1) - \sin \mu\, \varepsilon\right] \end{array}\right\} \quad (69)$$

$$\left\{\begin{array}{c} T = \mathfrak{T} + \frac{W}{\mathfrak{F}}\left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right) \\ + \frac{2}{\varepsilon} \frac{W}{\mathfrak{F}\, \gamma_2}\, \Sigma\, e^{-\left(\frac{2i+1}{\varepsilon}\right)^2 \frac{t}{222}} \frac{1}{\mu} \left[\frac{\gamma_2}{\lambda\, \mu} (\cos \mu\, \varepsilon - 1) - \sin \mu\, \varepsilon\right] \end{array}\right\} \quad (70)$$

oder besser geschrieben

$$\left.\begin{array}{c} u = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,x \\ -\,2\,\frac{W}{\mathfrak{F}\,\gamma_2}\,\Sigma\, e^{-\left(\frac{2\,i+1}{\varepsilon}\right)^2 \frac{t}{222}}\,\frac{\cos \mu\,x}{\mu\,\varepsilon}\left[\sin \mu\,\varepsilon + \frac{\gamma_2}{\lambda\,\mu}\,(1-\cos \mu\,\varepsilon)\right] \end{array}\right\}\,(69)$$

$$\left.\begin{array}{c} T = \mathfrak{T} + \frac{W}{\mathfrak{F}}\left(\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}+\frac{\varepsilon}{\lambda}\right) \\ -\,2\,\frac{W}{\mathfrak{F}\,\gamma_2}\,\Sigma\, e^{-\left(\frac{2\,i+1}{\varepsilon}\right)^2 \frac{t}{222}}\,\frac{1}{\mu\,\varepsilon}\left[\sin \mu\,\varepsilon + \frac{\gamma_2}{\lambda\,\mu}\,(1-\cos \mu\,\varepsilon)\right] \end{array}\right\}\,(70)$$

Wir wollen diese Ausdrücke einer Prüfung durch eine numerische Rechnung unterwerfen.

Für die früher angegebenen Daten, nämlich für:

$$\mathfrak{F} = 600,\quad L = 1300,\quad c = 0{\cdot}237,\quad c_1 = 0{\cdot}2,\quad \gamma_1 = \gamma_2 = 18,\quad \lambda = 0{\cdot}8$$

$$\varrho = 2000,\quad a = \frac{\lambda}{c_1\,\varrho} = \frac{1}{500},\quad \varepsilon = 1,\quad \frac{\lambda}{\gamma_1} = 0{\cdot}04,\quad \frac{\gamma_2}{\lambda} = 22{\cdot}5$$

$\frac{\mathfrak{F}\,\lambda}{L\,a\,c} = 800$ und wenn man annimmt: $\mathfrak{T} = -\,16^\circ$, $T_1 = +\,16^\circ$, findet man:

$$\frac{W}{\mathfrak{F}} = \frac{T_1 - \mathfrak{T}}{\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}+\frac{\varepsilon}{\lambda}} = 23{\cdot}5,\qquad \frac{W}{\mathfrak{F}\,\gamma_2} = 1{\cdot}3,\ \frac{2}{\varepsilon}\,\frac{W}{\mathfrak{F}\,\gamma_2} = 2{\cdot}6$$

$i =$	0	1	2	3	4	5
$\overline{\mu\,\varepsilon}^0 =$	90 − 3·6	3×90−11	5×90−18	7×90−25	9×90−32	11×90−40
$\overline{\mu\,\varepsilon} =$	1·5	4·5	7·5	10·5	13·5	16·5
$\frac{\gamma_2}{\lambda\,\mu} =$	15	5	3	2·14	1·66	1·36
$\beta =$	$\frac{1}{222}$	$\frac{1}{24{\cdot}6}$	$\frac{1}{8{\cdot}8}$	$\frac{1}{4{\cdot}53}$	$\frac{1}{2{\cdot}74}$	$\frac{1}{1{\cdot}83}$
$\sin \mu\,\varepsilon =$	+0·99	−0·98	+0·95	−0·90	+0·84	−0·77
$1-\cos \mu\,\varepsilon =$	0·939	1·19	0·69	1·42	0·47	1·64
$\frac{\sin \mu\,\varepsilon + \frac{\gamma_2}{\lambda\,\mu}(1+\cos \mu\,\varepsilon)}{\mu\,\varepsilon}$	10	1·1	0·4	0·20	0·12	0·09

Setzen wir in (70) $t = o$, so wird $T = \mathfrak{T}$, demnach muss werden

$$\frac{W}{\mathfrak{F}}\left(\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}+\frac{\varepsilon}{\lambda}\right) = 2\,\frac{W}{\mathfrak{F}\,\gamma_2}\,\Sigma\,\frac{\sin \mu\,\varepsilon + \frac{\gamma_2}{\lambda\,\mu}\,(1-\cos \mu\,\varepsilon)}{\mu\,\varepsilon}$$

Es ist aber

$$\frac{W}{\mathfrak{F}}\left(\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}+\frac{\varepsilon}{\lambda}\right)=32$$

dagegen

$$2\frac{W}{\mathfrak{F}\gamma_2}\Sigma\frac{\sin\mu\varepsilon+\frac{\lambda_2}{\mu\varepsilon}(1-\cos\mu\varepsilon)}{\mu\varepsilon}=2\cdot6(10+1\cdot1+0\cdot4+0\cdot12+0\cdot09+)$$

$$=33^0$$

was gewiss sehr gut stimmt, wenn man berücksichtiget, dass die transcendente Gleichung nur annähernd gelöst worden ist.

Berechnen wir noch vermittelst (70) die Temperaturen für verschiedene Werthe von t

$t=$	o	1	2	3	4	5 Stunden
$T=$	-16^0	. . .	. . .	. . .	. . .	$+5^0$

Man kann in der Vereinfachung der Ausdrücke für u und T noch weiter gehen. Wie diese numerische Rechnung zeigt, ist nur das dem Werth $i=o$ entsprechende Glied der Summe Σ von Belang, man begeht daher keinen merklichen Fehler, wenn wir von der Summe nur das erste Glied (für $i=o$) nehmen.

Unter dieser Voraussetzung erhalten wir:

$$u=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x-24\cdot6\frac{W}{\mathfrak{F}\gamma_2}\cos\left(86\cdot4\,\frac{x}{\varepsilon}\right)e^{-\frac{t}{222\,\varepsilon^2}}$$

$$T=\mathfrak{T}+\frac{W}{\mathfrak{F}}\left(\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}+\frac{\varepsilon}{\lambda}\right)-24\,6\,\frac{W}{\mathfrak{F}\gamma_2}\,e^{-\frac{t}{222\,\varepsilon^2}}$$

Hieraus folgt auch

$$W=\frac{(T-\mathfrak{T})\,\mathfrak{F}}{\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}+\frac{\varepsilon}{\lambda}-\frac{24\cdot6}{\gamma_2}\,e^{-\frac{t}{222\,\varepsilon^2}}}$$

Diese Gleichung bestimmt die Wärmemenge, welche während des Anheizens in jeder Stunde entwickelt werden muss, damit nach Verlauf der Zeit von t Stunden eine Temperatur T eintritt. Nennt man W_1 die Wärmemenge, welche im Beharrungszustand (beim Nachheizen) in jeder Stunde entwickelt werden muss, damit die Temperatur T, nachdem sie einmal eingetreten ist, dauernd verbleibt, so ist:

$$W_1=\frac{\mathfrak{F}\,(T-\mathfrak{T})}{\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}+\frac{\varepsilon}{\lambda}}$$

demnach wird:

$$\frac{W}{W_1} = \frac{1}{1 - \frac{24 \cdot 6}{\gamma_2 \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right)} e^{-\frac{t}{222 \varepsilon^2}}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{t}{222 \varepsilon^2}}}$$

oder annähernd, weil $e^{-\frac{t}{222 \varepsilon^2}} = 1 - \frac{t}{222 \varepsilon^2}$ gesetzt werden kann, so lange t nicht gross ist,

$$\frac{W}{W_1} = \frac{222 \varepsilon^2}{t}$$

und

$$W = \frac{\mathfrak{F} (T - \mathfrak{T})}{\left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right) \left(1 - e^{-\frac{t}{222 \varepsilon^2}}\right)}$$

$$W = \frac{\mathfrak{F} (T - \mathfrak{T})\, 222 \varepsilon^2}{\left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right) t}.$$

Gleichzeitiges Anheizen und Ventiliren. Wir wollen noch den Fall behandeln, wenn während der Anheizung auch gleichzeitig ventilirt wird. Auch wollen wir annehmen, dass die Umschliessungsflächen theils aus Mauern, theils aus Glasfenstern bestehen.

Es sei $\mathfrak{F}$ die Mauerflächen, $\mathfrak{F}_1$ die Fensterflächen, k der Wärmedurchgangscoeffizient für die Mauer, k_1 der Coeffizient für den Durchgang der Wärme durch die Glasfenster, l die Luftmenge in Kilogrammen, welche in jeder Stunde durch die Ventilationseinrichtung dem Raum im erwärmten Zustand zugeführt, und in jeder Stunde abgeleitet wird, η die Temperatur der zugeleiteten Luft, T zur Zeit t die Temperatur der entweichenden Luft. Wir wollen auch noch annehmen, dass der Raum auch noch durch eine Ofenheizung stündlich W Wärmeeinheiten erhalte.

Unter diesen Umständen wird die Aufgabe durch folgende Gleichungen charakterisirt:

$$\frac{du}{dt} = a \frac{d^2 u}{dx^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$a = \frac{\lambda}{c_1 \varrho} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x = \varepsilon} + \frac{\gamma_2}{\lambda} (\Theta - \mathfrak{T}) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=o} + \frac{\gamma_1}{\lambda}(T - \Delta) = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$W\,dt + l\,c(\eta - T)\,dt - L\,c\,d\,T = (T - \Delta)\,\gamma_1\,\mathfrak{F}\,dt + \mathfrak{F}_1\,k_1(T - \mathfrak{T})\,dt \quad (5)$$

Für $t = o$ soll sein $T = T_0$, $u = \varphi(x)$ . . . . . (6)

Der Gleichung (1) wird entsprochen, wenn man setzt:

$$u = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \Sigma\, e^{-\beta t}(\mathfrak{C}\cos\mu x + \mathfrak{D}\sin\mu x) \;.\;.\;. \quad (7)$$

Hieraus folgt, weil für $x = o$, $u = \Delta$ und für $x = \varepsilon$, $u = \Theta$ werden soll:

$$\Delta = \mathfrak{A} + \Sigma\, e^{-\beta t}\,\mathfrak{C} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$\Theta = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,\varepsilon + \Sigma\, e^{-\beta t}(\mathfrak{C}\cos\mu\varepsilon + \mathfrak{D}\sin\mu\varepsilon) \quad . \quad . \quad (9)$$

Durch Differenziation von (7) erhält man:

$$\frac{du}{dx} = \mathfrak{B} - \Sigma\, e^{-\beta t}\mu\,(\mathfrak{C}\sin\mu x - \mathfrak{D}\cos\mu x) \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

demnach:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=o} = \mathfrak{B} + \Sigma\, e^{-\beta t}\mu\,\mathfrak{D} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=\varepsilon} = \mathfrak{B} - \Sigma\, e^{-\beta t}\mu\,(\mathfrak{C}\sin\mu\varepsilon - \mathfrak{D}\cos\mu\varepsilon) \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Vermittelst dieser Ausdrücke (9) und (12) wird die Gleichung (3):

$$\left\{\begin{aligned} &\mathfrak{B} - \Sigma e^{-\beta t}\mu(\mathfrak{C}\sin\mu\varepsilon - \mathfrak{D}\cos\mu\varepsilon) \\ &+ \frac{\gamma_2}{\lambda}\left[\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\varepsilon + \Sigma\, e^{-\beta t}(\mathfrak{C}\cos\mu\varepsilon + \mathfrak{D}\sin\mu\varepsilon) - \mathfrak{T}\right]\end{aligned}\right\} = o$$

Da diese Gleichung für jeden Werth von t bestehen muss, hat man:

$$\mathfrak{B} + \frac{\gamma_2}{\lambda}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,\varepsilon - \mathfrak{T}) = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

$$-\mu\,(\mathfrak{C}\sin\mu\varepsilon - \mathfrak{D}\cos\mu\varepsilon) + \frac{\gamma_2}{\lambda}(\mathfrak{C}\cos\mu\varepsilon + \mathfrak{D}\sin\mu\varepsilon) = o$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}} = \frac{\cos\mu\varepsilon + \dfrac{\gamma_2}{\lambda\mu}\sin\mu\varepsilon}{\sin\mu\varepsilon - \dfrac{\gamma_2}{\lambda\mu}\cos\mu\varepsilon} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Vermittelst (8) und (11) wird die Gleichung (4):

$$T = \mathfrak{A} - \frac{\lambda}{\gamma_1}\mathfrak{B} + \Sigma e^{-\beta t}\left(\mathfrak{C} - \frac{\lambda}{\gamma_1}\mu\,\mathfrak{D}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Das Differentiale dieses Ausdruckes nach t gibt:

$$\frac{dT}{dt} = -\Sigma\, e^{-\beta t}\beta\left(\mathfrak{C} - \frac{\lambda}{\gamma_1}\mu\,\mathfrak{D}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

(15) und (16) in (5) eingeführt, findet man:

$$(W + l c \eta + \mathfrak{F}_1 k_1 \mathfrak{T}) - (l c + \gamma_1 \mathfrak{F} + k_1 \mathfrak{F}_1)\left[\mathfrak{A} - \frac{\lambda}{\gamma_1}\mathfrak{B} + \Sigma e^{-\beta t}\left(\mathfrak{C} - \frac{\lambda}{\gamma_1}\mu\,\mathfrak{D}\right)\right]$$
$$+ L c \Sigma e^{-\beta t}\beta\left(\mathfrak{C} - \frac{\lambda}{\gamma_1}\mu\,\mathfrak{D}\right) + \gamma_1 \mathfrak{F}\left(\mathfrak{A} + \Sigma e^{-\beta t}\,\mathfrak{C}\right) = 0$$

Da auch diese Gleichung für jeden Werth von t bestehen soll, so hat man:

$$W + l c \eta + \mathfrak{F}_1 k_1 \mathfrak{T} - (l c + \gamma_1 \mathfrak{F} + k_1 \mathfrak{F}_1)\left(\mathfrak{A} - \frac{\lambda}{\gamma_1}\mathfrak{B}\right) + \gamma_1 \mathfrak{F}\mathfrak{A} = 0 \quad (17)$$

$$-(l c + \gamma_1 \mathfrak{F} + k_1 \mathfrak{F}_1)\left(\mathfrak{C} - \frac{\lambda}{\gamma_1}\mu\,\mathfrak{D}\right) + L c \beta\left(\mathfrak{C} - \frac{\lambda}{\gamma_1}\mu\,\mathfrak{D}\right) + \gamma_1 \mathfrak{F}\mathfrak{C} = 0$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}} = \frac{\lambda}{\gamma_1}\mu\,\frac{L c \beta - l c - \gamma_1 \mathfrak{F} - k_1 \mathfrak{F}_1}{L c \beta - l c - k_1 \mathfrak{F}_1}$$

oder weil $\beta = a\,\mu^2$ ist:

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}} = \frac{\lambda}{\gamma_1}\mu\,\frac{L c a \mu^2 - (l c + \gamma_1 \mathfrak{F} + k_1 \mathfrak{F}_1)}{L c a \mu^2 - (l c + k_1 \mathfrak{F}_1)} \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Setzt man (14) gleich (18), so ergibt sich für μ die transcendente Gleichung:

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}} = m = \mu\,\frac{\lambda}{\gamma_1}\,\frac{\mu^2 - \dfrac{l c + \gamma_1 \mathfrak{F} + k_1 \mathfrak{F}_1}{L a c}}{\mu^2 - \dfrac{l c + k_1 \mathfrak{F}_1}{L a c}} = \frac{\cos \mu \varepsilon + \dfrac{\gamma_2}{\lambda \mu}\sin \mu \varepsilon}{\sin \mu \varepsilon - \dfrac{\gamma_2}{\lambda \mu}\cos \mu \varepsilon} \quad (19)$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} \frac{l c + \gamma_1 \mathfrak{F} + k_1 \mathfrak{F}_1}{L a c} &= b \\ \frac{l c + k_1 \mathfrak{F}_1}{L a c} &= b_1 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

so wird (19):

$$\mu\,\frac{\lambda}{\gamma_1}\,\frac{\mu^2 - b}{\mu^2 - b_1} = \frac{1 + \dfrac{\gamma_2}{\lambda \mu}\,\mathrm{tang}\,\mu \varepsilon}{\mathrm{tang}\,\mu \varepsilon - \dfrac{\gamma_2}{\lambda \mu}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Hieraus folgt:

$$\mu\,\varepsilon \operatorname{tang} \mu\,\varepsilon = \frac{1 + \dfrac{\gamma_2}{\gamma_1}\dfrac{\mu^2 - b}{\mu^2 - b_1}}{\mu\,\dfrac{\lambda}{\gamma_1}\,\dfrac{\mu^2 - b}{\mu^2 - b_1} - \dfrac{\gamma_2}{\mu\,\lambda}}\,\mu\,\varepsilon \quad \ldots \quad (22)$$

$$\mu\,\varepsilon \operatorname{tang} \mu\,\varepsilon = \frac{\mu^2\left(1 + \dfrac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) - \left(b_1 + \dfrac{\gamma_2}{\gamma_1}\,b\right)}{\mu^2\,\dfrac{\lambda}{\gamma_1}(\mu^2 - b) - \dfrac{\gamma_2}{\lambda}(\mu^2 - b_1)}\,\mu^2\,\varepsilon \quad . \quad (23)$$

Nun handelt es sich abermals um die Einführung des Initial-Zustandes.

Behandelt man auch in diesem Falle die Differenzialgleichung nach dem von *Poisson* gelehrten und Seite 401 angewendeten Verfahren, so gelangt man auch hier zur Gleichung (38), Seite 402, und man findet, dass auch hier die in der grossen Klammer der Gleichung (38) enthaltenen trigonometrischen Ausdrücke verschwinden, dass dagegen

$$-\mu\,m_1 + \mu_1\,m = \mu\,\mu_1\,\frac{\lambda}{\gamma_1}\left(\frac{\mu^2 - b}{\mu^2 - b_1} - \frac{\mu_1^{\,2} - b}{\mu_1^{\,2} - b_1}\right)$$

und man findet statt der Gleichung (41), Seite 403:

$$\frac{d}{d\,t}\int_0^\varepsilon X_1\,\xi\,d\,x = \Sigma\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{D}_1\,e^{-\beta\,t}\,\mu\,\mu_1\,\frac{\lambda}{\gamma_1}\left(\frac{\mu^2 - b}{\mu^2 - b_1} - \frac{\mu_1^{\,2} - b}{\mu_1^{\,2} - b_1}\right) - a\,\mu_1^{\,2}\int_0^\varepsilon \xi\,X_1\,d\,x$$

Hieraus folgt:

$$\int_0^\varepsilon X_1\,\xi\,d\,x = +\,\Sigma\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{D}_1\,\frac{e^{-\beta\,t}}{\beta_1 - \beta}\,\mu\,\mu_1\,\frac{\lambda}{\gamma_1}\left(\frac{\mu^2 - b}{\mu^2 - b_1} - \frac{\mu_1^{\,2} - b}{\mu_1^{\,2} - b_1}\right) + \mathfrak{H}\,e^{-\beta_1\,t}$$

Für $t = o$ soll $\mu = \varphi(x)$, mithin $\xi = \varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,x)$ werden, daher erhält man:

$$\int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,x)]\,X_1\,d\,x = \Sigma\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{D}_1\,\frac{1}{\beta_1 - \beta}\,\mu\,\mu_1\,\frac{\lambda}{\gamma_1}\left(\frac{\mu^2 - b}{\mu^2 - b_1} - \frac{\mu_1^{\,2} - b}{\mu_1^{\,2} - b_1}\right) + \mathfrak{H}$$

Durch Elimination von $\mathfrak{H}$ folgt aus diesen zwei Gleichungen:

$$\int_0^\varepsilon X_1\,\xi\,d\,x = \left\{\begin{array}{l} \Sigma\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{D}_1\,\dfrac{e^{-\beta\,t} - e^{-\beta_1 t}}{\beta_1 - \beta}\,\mu\,\mu_1\,\dfrac{\lambda}{\gamma_1}\left(\dfrac{\mu^2 - b}{\mu^2 - b_1} - \dfrac{\mu_1^{\,2} - b}{\mu_1^{\,2} - b_1}\right) \\ \qquad + e^{-\beta_1 t}\displaystyle\int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,x)]\,X_1\,d\,x \end{array}\right\}$$

Setzt man für das allgemeine β und μ die individuellen Werthe

β_1 und μ_1, so verschwindet das Summenglied welchem $\beta = \beta_1$ entspricht; wir erhalten daher:

$$\int_0^\varepsilon X_1 \xi_1 \, dx = e^{-\beta_1 t} \int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x)] X_1 \, dx$$

und wenn man

$$X_1 = \mathfrak{D}_1 \, (m_1 \cos \mu_1 x + \sin \mu_1 x)$$

$$\xi_1 = e^{-\beta t} (m_1 \cos \mu_1 x + \sin \mu_1 x) \, \mathfrak{D}_1$$

setzt,

$$\int_0^\varepsilon e^{-\beta_1 t} \mathfrak{D}_1^2 (m_1 \cos \mu_1 x + \sin \mu_1 x)^2 \, dx$$

$$= e^{-\beta_1 t} \int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x)] \, \mathfrak{D}_1 \, (m_1 \cos \mu_1 x + \sin \mu_1 x) \, dx$$

und hieraus folgt endlich:

$$\mathfrak{D} = \frac{\int_0^\varepsilon [\varphi(x) - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x)] \, (m \cos \mu x + \sin \mu x)}{\int_0^\varepsilon (m \cos \mu x + \sin \mu x)^2 \, dx} \quad . \; . \quad (24)$$

Aus den Gleichungen (13) und (17) findet man für $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ folgende Werthe:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{T} + \frac{\left(1 + \frac{\gamma_2}{\lambda} \varepsilon\right) (W + l c \eta - \mathfrak{T} l c)}{\left(1 + \frac{\gamma_2}{\lambda} \varepsilon\right) (l c + k_1 \mathfrak{F}_1) + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} (l c + \gamma_1 \mathfrak{F} + k_1 \mathfrak{F}_1)} \quad . \; . \quad (25)$$

$$\mathfrak{B} = - \frac{\frac{\gamma_2}{\lambda} (W + l c \eta - \mathfrak{T} l c)}{\left(1 + \frac{\gamma_2}{\lambda} \varepsilon\right) (l c + k_1 \mathfrak{F}_1) + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} (l c + \gamma_1 \mathfrak{F} + k_1 \mathfrak{F}_1)} \quad . \; . \quad (26)$$

Hiermit ist unsere Aufgabe in analytischer Hinsicht gelöst und es kommt nun weiter darauf an, die Lösung für praktische Rechnungen zu vereinfachen, was durch eine angenäherte Auflösung der transcendenten Gleichung geschehen kann.

Auflösung der transcendenten Gleichung. Diese Gleichung (23) ist:

$$\mu \varepsilon \operatorname{tang} \mu \varepsilon = \frac{\mu^2 \left(1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) - \left(b_1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} b\right)}{\mu^2 \frac{\lambda}{\gamma_1} (\mu^2 - b) - \frac{\gamma_2}{\lambda} (\mu^2 - b_1)} \, \mu^2 \varepsilon \quad . \; . \quad (23)$$

Alles was im vorhergehenden Problem über die Auflösung der transcendenten Gleichung (53), Seite 407, gesagt wurde, findet auf die vorliegende Gleichung seine Anwendung.

Wir dürfen annehmen, dass der Gleichung (23) ein Genüge geleistet wird, wenn man setzt:

$$\mu \, \varepsilon = (2\,i + 1)\frac{\pi}{2} + \zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

wobei ζ eine im Verhältniss zu $(2\,i+1)\frac{\pi}{2}$ kleine Grösse bezeichnet, und i jede ganze positive Zahl (Null mit eingeschlossen) bedeutet.

Nun ist:

$$\operatorname{tang} \mu \, \varepsilon = \operatorname{tang}\left[(2\,i+1)\frac{\pi}{2} + \zeta\right] = -\operatorname{Cotg} \zeta$$

Führt man diesen Werth von $\operatorname{tang} \mu \, \varepsilon$ in die Gleichung (23) ein und setzt für μ, $(2\,i+1)\frac{\pi}{2}$, vernachlässiget demnach ζ, so findet man:

$$\left\{\begin{array}{c} -\operatorname{Cotg} \zeta = (2\,i+1)\frac{\pi}{2} \times \\ \dfrac{\left[(2\,i+1)\frac{\pi}{2}\right]^2\left(1+\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) - \left(b_1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\, b\right)}{\left[(2\,i+1)\frac{\pi}{2}\right]^2 \frac{\lambda}{\gamma_1}\left\{\left[(2\,i+1)\frac{\pi}{2}\right]^2 - b\right\} - \frac{\gamma_2}{\lambda}\left\{\left[(2\,i+1)\frac{\pi}{2}\right]^2 - b_1\right\}} \end{array}\right\} \quad (28)$$

Diese Gleichung gibt annähernd den Werth der Korrektur ζ.

Das Erkalten. Betrachten wir nun den Vorgang der Abkühlung eines Raumes und der denselben einschliessenden Wände.

Die Abkühlung beginnt von dem Augenblick an, in welchem die Heizung aufhört, also von dem Augenblick an, in welchem die Luft des Raumes keine Wärme empfängt. Hat die Heizung, welche der Abkühlung vorherging, lange genug gedauert, so ist am Anfang der Abkühlung ein Beharrungszustand vorhanden, für welchen man hat, Tafel XVIII, Fig. 6,

$$W = (T_1 - \Delta_1)\,\gamma_1\,\mathfrak{F} = (\Theta_1 - \mathfrak{T})\,\gamma_2\,\mathfrak{F} = (\Delta_1 - \Theta_1)\,\frac{\lambda}{e}\,\mathfrak{F} \quad . \quad . \quad (1)$$

woraus folgt:

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = \mathfrak{T} + \dfrac{W}{\mathfrak{F}}\left(\dfrac{1}{\gamma_1} + \dfrac{1}{\gamma_2} + \dfrac{e}{\lambda}\right) \\ \Delta_1 = \mathfrak{T} + \dfrac{W}{\mathfrak{F}}\left(\dfrac{1}{\gamma_2} + \dfrac{e}{\lambda}\right) \\ \Theta_1 = \mathfrak{T} + \dfrac{W}{\mathfrak{F}\,\gamma_2} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Während des Aktes der Abkühlung, d. h. nachdem derselbe durch die Zeit t gedauert hat, ist:

$$\frac{du}{dt} = a \frac{d^2u}{dx^2} \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$

$$a = \frac{\lambda}{c_1 \varrho} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (4)$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=\varepsilon} + \frac{\gamma_2}{\lambda} (\Theta - \mathfrak{T}) = o \quad \dots \dots \dots \quad (5)$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=o} + \frac{\gamma_1}{\lambda} (T - \varDelta) = o \quad \dots \dots \quad (6)$$

$$- L\,c\,d\,T = (T - \varDelta)\,\gamma_1\,\mathfrak{F}\,dt \quad \dots \dots \dots \quad (7)$$

$$\text{Für } t = o \text{ ist } u_1 = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,x \quad \dots \dots \dots \quad (8)$$

Der Gleichung (3) wird entsprochen, wenn man nimmt:

$$u = \mathfrak{M} + \mathfrak{N}\,x + \Sigma\, e^{-\beta t} (\mathfrak{C}_1 \cos \mu x + \mathfrak{D}_1 \sin \mu x) \quad \dots \quad (9)$$

$$\beta = a\,\mu^2 \quad \dots \dots \dots \dots \quad (10)$$

Für $t = \infty$ muss offenbar $u = \mathfrak{T}$ werden, demnach

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{T},\quad \mathfrak{N} = o$$

daher:

$$u = \mathfrak{T} + \Sigma\, e^{-\beta t} (\mathfrak{C}_1 \cos \mu x + \mathfrak{D}_1 \sin \mu x) \quad \dots \quad (11)$$

Hieraus folgt:

$$\varDelta = \mathfrak{T} + \Sigma\, e^{-\beta t}\, \mathfrak{C}_1 \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (12)$$

$$\Theta = \mathfrak{T} + \Sigma\, e^{-\beta t} (\mathfrak{C}_1 \cos \mu \varepsilon + \mathfrak{D}_1 \sin \mu \varepsilon) \quad \dots \quad (13)$$

$$\frac{du}{dx} = - \Sigma\, e^{-\beta t} \mu\, (\mathfrak{C}_1 \sin \mu x - \mathfrak{D}_1 \cos \mu x) \quad \dots \quad (14)$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=o} = + \Sigma\, e^{-\beta t} \mathfrak{D}_1\, \mu \quad \dots \dots \dots \quad (15)$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=\varepsilon} = - \Sigma\, e^{-\beta t} \mu\, (\mathfrak{C}_1 \sin \mu \varepsilon - \mathfrak{D}_1 \cos \mu \varepsilon) \quad . \quad (16)$$

Die Gleichung (5) wird:

$$-\Sigma e^{-\beta t}\mu(\mathfrak{C}_1 \sin\mu\varepsilon - \mathfrak{D}_1 \cos\mu\varepsilon) + \frac{\gamma_2}{\lambda}\left[\Sigma e^{-\beta t}(\mathfrak{C}_1 \cos\mu\varepsilon + \mathfrak{D}_1 \sin\mu\varepsilon)\right] = 0$$

$$-\mu(\mathfrak{C}_1 \sin\mu\varepsilon - \mathfrak{D}_1 \cos\mu\varepsilon) + \frac{\gamma_2}{\lambda}(\mathfrak{C}_1 \cos\mu\varepsilon + \mathfrak{D}_1 \sin\mu\varepsilon) = 0$$

$$\frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{D}_1} = \frac{\cos\mu\varepsilon + \frac{\gamma_2}{\lambda\mu}\sin\mu\varepsilon}{\sin\mu\varepsilon - \frac{\gamma_2}{\lambda\mu}\cos\mu\varepsilon} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

Die Gleichung (6) wird:

$$\Sigma e^{-\beta t}\mathfrak{D}_1\mu + \frac{\gamma_1}{\lambda}\left(T - \mathfrak{T} - \Sigma e^{-\beta t}\mathfrak{C}_1\right) = 0$$

$$T = \mathfrak{T} + \Sigma e^{-\beta t}\mathfrak{C}_1 - \frac{\lambda}{\gamma_1}\Sigma e^{-\beta t}\mathfrak{D}_1\mu \quad \ldots \quad (18)$$

Hieraus folgt durch Differenziation

$$\frac{dT}{dt} = -\Sigma e^{-\beta t}\beta\mathfrak{C}_1 + \frac{\lambda}{\gamma_1}\Sigma e^{-\beta t}\beta\mu\mathfrak{D}_1 \quad \ldots \quad (19)$$

(18) und (19) in (7) eingeführt, folgt:

$$-Lc\left(-\Sigma e^{-\beta t}\beta\mathfrak{C}_1 + \frac{\lambda}{\gamma_1}\Sigma e^{-\beta t}\beta\mu\mathfrak{D}_1\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \mathfrak{T} + \Sigma e^{-\beta t}\mathfrak{C}_1 - \frac{\lambda}{\gamma_1}\Sigma e^{-\beta t}\mathfrak{D}_1\mu \\ - \mathfrak{T} - \Sigma e^{-\beta t}\mathfrak{C}_1 \end{pmatrix}\gamma_1\mathfrak{F}$$

oder:

$$-Lc\left(-\Sigma e^{-\beta t}\beta\mathfrak{C}_1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}\Sigma e^{-\beta t}\beta\mu\mathfrak{D}_1\right) = \gamma_1\mathfrak{F}\left(-\frac{\lambda}{\gamma_1}\Sigma e^{-\beta t}\mathfrak{D}_1\mu\right)$$

$$-Lc\left(-\beta\mathfrak{C}_1 + \frac{\lambda}{\gamma_1}\beta\mu\mathfrak{D}_1\right) = -\mathfrak{F}\lambda\mathfrak{D}\mu$$

$$\frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{D}_1} = \lambda\mu\left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{\mathfrak{F}}{Lc\beta}\right)$$

oder wegen $\beta = a\mu^2$:

$$\frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{D}_1} = \lambda\left(\frac{\mu}{\gamma_1} - \frac{\mathfrak{F}}{Lac}\frac{1}{\mu}\right) \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

wegen (17) und (20) hat man:

$$\frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{D}_1} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}} = m = \lambda\left(\frac{\mu}{\gamma_1} - \frac{\mathfrak{F}}{Lac}\frac{1}{\mu}\right) = \frac{\cos\mu\varepsilon + \frac{\gamma_2}{\lambda\mu}\sin\mu\varepsilon}{\sin\mu\varepsilon - \frac{\gamma_2}{\lambda\mu}\cos\mu\varepsilon} \quad (21)$$

Dies ist die transcendente Gleichung für μ.

Die Gleichung (18) wird, wenn man für $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$ den Werth aus (20) einführt:

$$T = \mathfrak{T} + \Sigma e^{-\beta t} \mathfrak{D}_1 \left(+ \frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{D}_1} - \frac{\lambda}{\gamma_1} \mu \right)$$

$$T = \mathfrak{T} + \Sigma e^{-\beta t} \mathfrak{D}_1 \left(+ \frac{\lambda \mu}{\gamma_1} - \frac{\mathfrak{F} \lambda}{L a c} \frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{\gamma_1} \mu^2 \right)$$

$$T = \mathfrak{T} - \frac{\mathfrak{F} \lambda}{L a c} \Sigma e^{-\beta t} \frac{\mathfrak{D}_1}{\mu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Für $\mathfrak{D}_1$ findet man, wie beim Anheizen:

$$\mathfrak{D}_1 = \frac{\int_0^\varepsilon (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x - \mathfrak{T})]\ (m \cos \mu x + \sin \mu x)\ dx}{\int_0^\varepsilon (m \cos \mu x + \sin \mu x)^2\ dx} \quad \ldots \quad (23)$$

Dieses $\mathfrak{D}_1$ ist gleich $- \mathfrak{D}$, denn beim Anheizen steht eigentlich $\mathfrak{T} - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x)$.

Weil hier wie beim Anheizen eine genügende Genauigkeit erreicht wird, wenn man von der Summe nur das erste Glied nimmt, für welches $i = o$, demnach $\mu \varepsilon = (2 i + 1) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ ist, m dagegen sehr gross, und zwar $m = - \frac{\mathfrak{F} \lambda}{L a c} \frac{1}{\mu}$, so wird:

$$m\ \mathfrak{D}_1 = \frac{2}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x - \mathfrak{T}) \cos \mu x\ dx$$

$$\frac{\mathfrak{D}_1}{\mu} = - \frac{2}{\varepsilon} \frac{L a c}{\mathfrak{F} \lambda} \int_0^\varepsilon (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x - \mathfrak{T}) \cos \mu x\ dx$$

und nun wird:

$$u = \mathfrak{T} + \Sigma e^{-\beta t} \mathfrak{D}_1 \left(\frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{D}_1} \cos \mu x + \sin \mu x \right) = \mathfrak{T} + \Sigma e^{-\beta t} \mathfrak{D}_1 (m \cos \mu x + \sin \mu x)$$

$$u = \mathfrak{T} + \left[- \frac{2}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x - \mathfrak{T}) \cos \mu x\ dx \right] \cos \mu x\ e^{-\beta t}$$

$$T = \mathfrak{T} + \frac{2}{\varepsilon} e^{-\beta t} \int_0^\varepsilon (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x - \mathfrak{T}) \cos \mu x\ dx$$

$$\int_0^\varepsilon (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x - \mathfrak{T}) \cos \mu x\ dx = (\mathfrak{A} - \mathfrak{T}) \int_0^\varepsilon \cos \mu x\ dx + \mathfrak{B} \int_0^\varepsilon x \cos \mu x\ dx$$

$$= \frac{\mathfrak{A}-\mathfrak{T}}{\mu} \int_0^\varepsilon \cos \mu x \, d(\mu x) + \frac{\mathfrak{B}}{\mu^2} \int_0^\varepsilon \mu x \cos \mu x \, d(\mu x)$$

$$= \frac{\mathfrak{A}-\mathfrak{T}}{\mu} \sin \mu \varepsilon + \frac{\mathfrak{B}}{\mu^2} (\mu \varepsilon \sin \mu \varepsilon + \cos \mu \varepsilon - 1)$$

$$= \frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\varepsilon-\mathfrak{T}) \sin \mu \varepsilon}{\mu} - \mathfrak{B} \frac{1-\cos \mu \varepsilon}{\mu^2}$$

oder wegen $\mu \varepsilon = \frac{\pi}{2}$, $\sin \mu \varepsilon = 1$, $\cos \mu \varepsilon = 0$:

$$\frac{2}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x-\mathfrak{T}) \cos \mu x \, dx = \left[\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\varepsilon-\mathfrak{T}}{\frac{\pi}{2\varepsilon}} - \frac{\mathfrak{B}}{\left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2} \right] \frac{2}{\varepsilon}$$

$$= \frac{4}{\pi} \left(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\varepsilon-\mathfrak{T}-\frac{2\varepsilon}{\pi}\mathfrak{B} \right)$$

$$u = \mathfrak{T} + \frac{4}{\pi} \left(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\varepsilon-\mathfrak{T}-\frac{2\varepsilon}{\pi}\mathfrak{B} \right) \cos \mu x \, e^{-\beta t}$$

$$u = \mathfrak{T} + \frac{4}{\pi} \left(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\varepsilon-\mathfrak{T}-\frac{2\varepsilon}{\pi}\mathfrak{B} \right) \cos \frac{\pi}{2} \frac{x}{\varepsilon} \, e^{-a\left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 t}$$

$$T = \mathfrak{T} + \frac{4}{\pi} \left(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\varepsilon-\mathfrak{T}-\frac{2\varepsilon}{\pi}\mathfrak{B} \right) e^{-a\left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 t}$$

Die Dampfheizung.

Allgemeine Beschreibung der Einrichtung einer Dampfheizung. Die wesentlichen Bestandtheile einer Dampfheizung sind: 1) eine vollständige Dampfkesseleinrichtung zur Erzeugung des Wasserdampfes; 2) ein vertikales Standrohr, um den Dampf vom Kessel aus in die verschiedenen Stockwerke des zu heizenden Gebäudes zu leiten; 3) die Wärmeröhren, welche die Wärme des Dampfes an die Luft der Räume abgeben, die geheizt werden sollen.

Tafel XVIII., Fig. 7 und 8 zeigen einen Grund- und Aufriss der Einrichtung einer Dampfheizung für ein Fabrikgebäude. A ist der in einem Anbau aufgestellte Dampfapparat, a ist das Standrohr, b_1 b_2 b_3 sind die Wärmeröhren in den einzelnen Stockwerken, die je nach der Breite des Gebäudes in jedem Stockwerk aus zwei oder drei Zweigröhren bestehen. Das Standrohr a wird gewöhnlich mit Hanf oder Stroh umwickelt, weil dasselbe nur zur Fortleitung und Vertheilung, nicht aber zur Wärmeabgabe dient. Die Wärmeröhren b_1 b_2 b_3 .... liegen nicht horizontal, sondern haben vom Standrohr