Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1863

Cylindrische Wandung

urn:nbn:de:bsz:31-270981

$$t_2 = T_3 + \frac{\gamma_0}{\gamma_2}(\Delta_1 - T_1)$$

$$t_3 = \Delta_0 + \frac{\gamma_0}{\gamma_3}(\Delta_1 - T_1)$$

Führt man diese Werthe von t_1 t_2 t_3 in die Gleichungen (10) ein, so findet man:

$$T_2 + \frac{\gamma_0}{\gamma_1}(\Delta_1 - T_1) = T_1 - \frac{\gamma_0 (\Delta_1 - T_1) e_1}{\lambda_1}$$

$$T_3 + \frac{\gamma_0}{\gamma_2}(\Delta_1 - T_1) = T_2 - \frac{\gamma_0 (\Delta_1 - T_1) e_2}{\lambda_2}$$

$$\Delta_0 + \frac{\gamma_0}{\gamma_3}(\Delta_1 - T_1) = T_3 - \frac{\gamma_0 (\Delta_1 - T_1) e_3}{\lambda_3}$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen findet man:

$$\Delta_0 + \gamma_0 (\Delta_1 - T_1)\left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{1}{\gamma_3}\right) = T_1 - \gamma_0 (\Delta_1 - T_1)\left(\frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + \frac{e_3}{\lambda_3}\right)$$

und hieraus folgt:

$$T_1 = \frac{\Delta_0 + \gamma_0 \Delta_1 \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{1}{\gamma_3}\right) + \gamma_0 \Delta_1 \left(\frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + \frac{e_3}{\lambda_3}\right)}{1 + \gamma_0 \left(\frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + \frac{e_3}{\lambda_3}\right) + \gamma_0 \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{1}{\gamma_3}\right)} \quad (11)$$

Vermöge der Gleichungen (9) ist aber $W = F \gamma_0 (\Delta_1 - T_1)$. Führt man in diesen Ausdruck für W den Werth von T_1, den die Gleichung (11) darbietet, ein, so findet man:

$$W = \frac{F (\Delta_1 - \Delta_0)}{\frac{1}{\gamma_0} + \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{1}{\gamma_3} + \frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + \frac{e_3}{\lambda_3}} \quad . \; . \; . \quad (12)$$

Mit diesem Ausdruck kann die Wärmemenge beurtheilt werden, welche durch eine Kesselwand eindringt, wenn dieselbe auf der den Verbrennungsgasen zugewendeten Seite mit einer Oxydschichte und mit einer Russschichte, auf der dem Kesselwasser zugekehrten Seite dagegen mit einer Oxydschichte und mit einer Kesselsteinschichte belegt ist.

Cylindrische Wandung. Tafel XIV., Fig. 15. Wir nehmen an, die Temperatur sei im Innern constant Δ_1, ausserhalb constant Δ_2 und $\Delta_1 > \Delta_2$ so dass die Wärme von innen nach aussen geht.

Nennen wir ferner:

r_1 den inneren, r_2 den äusseren Halbmesser des Cylinders;

t_1 und t_2 die Temperaturen des Cylinders an der inneren und an der äusseren Fläche;

γ_1 und γ_2 die Ein- und Ausstrahlungscoeffizienten;

λ den Leitungscoeffizienten;

l die Länge des Cylinders;
W die in einer Zeiteinheit durch den Cylinder gehende Wärme;
u die Temperatur des Wandmaterials in einer Entfernung ζ von der Axe des Cylinders.

Im Beharrungszustand der Erwärmung sind die durch die Cylinderflächen $2\, r_1 \pi\, l$, $2 \zeta \pi\, l$, $2\, r_2 \pi\, l$ in jeder Zeiteinheit gehenden Wärmequantitäten $2\, r_1\, \pi\, l\, \gamma_1\, (\Delta_1 - t_1)$, $2\, r_2 \pi\, l\, \gamma_2 (t_2 - \Delta_2)$, $-\lambda\, 2\, \zeta\, \pi\, l \frac{du}{d\zeta}$ gleich gross und gleich W. Man hat daher die Gleichheiten:

$$W = 2\, \pi\, l \gamma_1\, r_1\, (\Delta_1 - t_1) = 2\, \pi\, l\, \gamma_2\, r_2\, (t_2 - \Delta_2) = -\lambda\, 2\, \pi\, l\, \zeta\, \frac{du}{d\zeta} \quad (12)$$

aus welchen die drei unbekannten Grössen t_1 t_2 und W bestimmt werden können.

Das Integrale der Gleichung:

$$W = -\lambda\, 2\, \pi\, l\, \frac{\zeta\, du}{d\zeta}$$

ist:

$$u = -\frac{W}{2\, \pi\, l\, \lambda} \text{lognat}\, \zeta + \text{const} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Nun ist für $\zeta = r_1$ $u = t_1$ und für $\zeta = r_2$ $u = t_2$; daher hat man:

$$t_1 = -\frac{W}{2\, \pi\, l\, \lambda} \text{lognat}\, r_1 + \text{const} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

$$t_2 = -\frac{W}{2\, \pi\, l\, \lambda} \text{lognat}\, r_2 + \text{const} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Die Differenz dieser Ausdrücke gibt:

$$t_1 - t_2 = \frac{W}{2\, \pi\, l\, \lambda} \text{lognat} \frac{r_2}{r_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Aus den Gleichungen (12) folgt:

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= \Delta_1 - \frac{W}{2\, \pi\, l\, \gamma_1\, r_1} \\ t_2 &= \Delta_2 + \frac{W}{2\, \pi\, l\, \gamma_2\, r_2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

$$t_1 - t_2 = \Delta_1 - \Delta_2 - \frac{W}{2\, \pi\, l} \left(\frac{1}{\gamma_1\, r_1} + \frac{1}{\gamma_2\, r_2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Setzt man die Werthe von $t_1 - t_2$, welche die Gleichungen (16) und (18) darbieten, einander gleich und sucht hierauf W so findet man:

$$W = \frac{2\, \pi\, l\, (\Delta_1 - \Delta_2)}{\frac{1}{\gamma_1\, r_1} + \frac{1}{\gamma_2\, r_2} + \frac{1}{\lambda} \text{lognat} \frac{r_2}{r_1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Kugelförmige Wandung. Tafel XIV., Fig. 15. Betrachten wir nun die Wärmebewegung durch ein sphärisches Gefäss, das innen und aussen mit Flüssigkeiten in Berührung steht, die ihre Temperatur mit der Zeit nicht ändern.

Nennt man:

r_1 r_2 die Halbmesser der inneren und der äusseren Kugelflächen;

Δ_1 Δ_2 die Temperaturen der Medien in der Kugel und ausserhalb derselben;

t_1 t_2 die Temperaturen an der inneren und äusseren Fläche der Gefässwand;

γ_1 und γ_2 die Ein- und Ausstrahlungscoeffizienten;

λ den Wärmeleitungscoeffizienten;

u die Temperatur in einer Entfernung ζ vom Mittelpunkt der Kugel;

W die Wärmemenge, welche in einer Zeiteinheit durch die kugelförmige Wand entweicht.

Die Wärmemengen, welche in einer Zeiteinheit durch die Kugelflächen gehen, deren Halbmesser r_1 ζ r_2 sind, haben in diesem Falle die Werthe $4 r_1^2 \pi \gamma_1 (\Delta_1 - t_1)$, $4 r_2^2 \pi \gamma_2 (t_2 - \Delta_2)$, $-4 \zeta^2 \pi \lambda \frac{du}{d\zeta}$, und jede derselben ist gleich der Wärmemenge W, die in jeder Sekunde aus der Kugel entweicht. Wir haben daher:

$$W = 4 r_1^2 \pi \gamma_1 (\Delta_1 - t_1) = 4 r_2^2 \pi \gamma_2 (t_2 - \Delta_2) = -4 \zeta^2 \pi \lambda \frac{du}{d\zeta} \quad . \quad (20)$$

Das Integrale der Gleichheit

$$W = -4 \zeta^2 \pi \lambda \frac{du}{d\zeta}$$

ist:

$$u = \frac{W}{4 \pi \lambda} \cdot \frac{1}{\zeta} + \text{const} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

Nun ist für $\zeta = r_1$, $u = t_1$ und für $\zeta = r_2$, $u = t_2$; daher hat man:

$$t_1 = \frac{W}{4 \pi \lambda} \frac{1}{r_1} + \text{const}$$

$$t_2 = \frac{W}{4 \pi \lambda} \frac{1}{r_2} + \text{const}$$

Demnach auch:

$$t_1 - t_2 = \frac{W}{4 \pi \lambda} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

Die Gleichheiten (20) geben:

$$t_1 = \Delta_1 - \frac{W}{4 \pi \gamma_1 r_1^2}$$

$$t_2 = \Delta_2 + \frac{W}{4 \pi \gamma_2 r_2^2}$$