Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1863

Wärmemenge, die durch eine ebene Gefässwand von gleicher Dicke geht

urn:nbn:de:bsz:31-270981

die, wenn e und $u_1 - u$ sehr klein sind, als eine zu Ω parallele Fläche angesehen werden kann. Ich nehme nun an, dass wenn $u > u_1$ ist, von der Fläche Ω nach Ω_1 in einer Zeiteinheit eine Wärmemenge W_2 ströme, die der Fläche Ω und der Temperaturdifferenz $u - u_1$ direkt, der Entfernung e, den Flächen Ω und Ω_1 aber verkehrt proportional ist, und setze deshalb:

$$W_2 = \lambda \frac{u - u_1}{e} \Omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Den Coeffizienten λ nenne ich den Wärmeleitungscoeffizienten. Für $u - u_1 = 1$, $\Omega = 1$, $e = 1$ gibt diese Formel $W_2 = \lambda$. Der Coeffizient λ ist also die Wärmemenge, die in der Zeiteinheit durch einen Stab geht, dessen Querschnitt gleich Eins und dessen Länge gleich Eins ist, wenn die Differenz der an den Enden des Stabes herrschenden Temperaturen Einen Grad beträgt. Ist e unendlich klein und bezeichnet man seinen Werth in diesem Fall mit $d\zeta$, so ist, wenn $u > u_1$ ist, $u - u_1 = -\frac{du}{d\zeta} d\zeta$; daher $\frac{u - u_1}{e} = \frac{du}{d\zeta}$, und dann wird:

$$W_2 = -\lambda \Omega \frac{du}{d\zeta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Vermittelst dieser durch die Gleichungen (1) und (3) analytisch ausgedrückten Voraussetzungen lassen sich die von *Fourier* und *Poisson* durch ziemlich umständliche Betrachtungen aufgefundenen allgemeinen Differenzialgleichungen, welche die Wärmebewegung im Innern der Körper bestimmen, herleiten. Ich will jedoch diese Herleitung unterlassen, weil es mir nur darum zu thun ist, die oben gestellten speziellen Fragen zu beantworten, was vermittelst der Gleichungen (1) und (3) direkt geschehen kann.

Wärmemenge, die durch eine ebene Gefäßwand von gleicher Dicke geht. Es sei Tafel XIV., Fig. 13, A B C D eine ebene Gefässwand, die von zwei Medien berührt wird, deren Temperaturen unveränderlich Δ_1 und Δ_0 sind. Es sei $\Delta_1 < \Delta_0$, so dass die Wärme von A B nach C D geht. Wir setzen den Beharrungszustand der Wärmebewegung voraus, nehmen also an, dass sich die Temperatur irgend eines Punktes m mit der Zeit nicht ändert. Es sei t_1 die Temperatur der Wand längs A B, t_0 die Temperatur der Wand längs C D, u die Temperatur in der von A B um ζ abstehenden Ebene E F, e die Wanddicke oder die Entfernung der Ebenen A B und C D, γ_1 der Einstrahlungscoeffizient für den Eintritt der Wärme in A B, γ_0 der Ausstrahlungscoeffizient für den Austritt der Wärme aus C D, λ der Wärmeleitungscoeffizient zur Bestimmung der

Wärmefortpflanzung im Innern, F die Fläche, durch welche die Wärme einströmt, W die Wärmemenge, welche im Beharrungszustand der Bewegung in jeder Zeiteinheit durch das Wandstück von der Grösse F geht.

Vermöge des durch (1) ausgedrückten Satzes ist die Wärmemenge, die in einer Zeiteinheit durch A B einströmt $F \gamma_1 (\Delta_1 - t_1)$, ist ferner die Wärmemenge, die in einer Zeiteinheit durch C D ausströmt $F \gamma_0 (t_0 - \Delta_0)$. Vermöge des durch die Gleichung (3) ausgedrückten Gesetzes, ist die durch die Fläche E F in einer Zeiteinheit gehende Wärmemenge $- \lambda F \frac{du}{d\zeta}$. Da im Beharrungszustand diese drei Wärmemengen gleich gross und gleich W sein müssen, so hat man:

$$W = F \gamma_1 (\Delta_1 - t_1) = F \gamma_0 (t_0 - \Delta_0) = - \lambda F \frac{du}{d\zeta} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Aus der Gleichheit $F \gamma_1 (\Delta_1 - t_1) = - \lambda F \frac{du}{d\zeta}$ folgt durch Integration:

$$u = - \frac{\gamma_1 (\Delta_1 - t_1)}{\gamma} \zeta + \text{const}$$

Es ist aber für $\zeta = o \quad u = t_1$, und für $\zeta = e \quad u = t_0$; demnach $t_1 = \text{const}$ und $t_0 = - \frac{\gamma_1 (\Delta_1 - t_1)}{\lambda} e + \text{const}$, folglich:

$$t_0 = t_1 - \frac{\gamma_1 (\Delta_1 - t_1)}{\gamma} e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Auch ist:

$$u = t_1 - \frac{\gamma_1 (\Delta_1 - t_1)}{\lambda} \zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Aus dieser letzten Gleichung ersieht man, dass die Temperatur innerhalb der Wand von A B an bis C D hin gleichförmig abnimmt. Vermöge der Gleichheiten (4) hat man auch:

$$\gamma_1 (\Delta_1 - t_1) = \gamma_0 (t_0 - \Delta_0)$$

Aus dieser Gleichung in Verbindung mit (5) findet man:

$$\left.\begin{aligned} t_0 &= \frac{\frac{\Delta_1}{\gamma_0} + \frac{\Delta_0}{\gamma_0} + \frac{e}{\lambda} \Delta_0}{\frac{1}{\gamma_0} + \frac{1}{\gamma_1} + \frac{e}{\lambda}} \\ t_1 &= \frac{\frac{\Delta_1}{\gamma_0} + \frac{\Delta_0}{\gamma_1} + \frac{e}{\lambda} \Delta_1}{\frac{1}{\gamma_0} + \frac{1}{\gamma_1} + \frac{e}{\lambda}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Setzt man diesen Werth von t_1 in den Ausdruck $W = F \gamma_1 (\Delta_1 - t_1)$, so findet man:

$$W = F \frac{\Delta_1 - \Delta_0}{\frac{1}{\gamma_0} + \frac{1}{\gamma_1} + \frac{e}{\lambda}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Hieraus sieht man, dass die in einer Zeiteinheit durch eine ebene Gefässwand gehende Wärmemenge der Fläche und der Temperaturdifferenz der Medien direkt, der Wanddicke, aber nicht verkehrt proportional ist. Nur in dem Fall, wenn die Aus- und Einstrahlungscoeffizienten γ_1 und γ_0 ausserordentlich gross wären, so dass man $\frac{1}{\gamma_0} + \frac{1}{\gamma_1}$ gegen $\frac{e}{\lambda}$ vernachlässigen dürfte, würde die Wärmemenge W der Wanddicke verkehrt proportional werden. Der Werth von W wird gross, wenn γ_0 γ_1 und λ grosse Werthe haben, d. h. wenn sowohl die Ein- und Ausstrahlung, als auch die Leitung leicht von Statten geht.

Zusammengesetzte Wand. Es sei Tafel XIV. Fig. 14:

$A_0 B_0 A_3 B_3$ eine aus drei Schichten gebildete Wand;

Δ_1 Δ_0 die Temperaturen der Medien, mit welchen die Wand in Berührung steht;

T_1 t_1 T_2 t_2 T_3 t_3 die Temperaturen an den Begrenzungsflächen der Schichten;

γ_0 γ_1 γ_2 γ_3 die Wärmeübergangscoeffizienten an den Trennungsflächen A_0 B_0, A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3 der Medien;

λ_1 λ_2 λ_3 die Wärmeleitungscoeffizienten für den Durchgang der Wärme durch die Schichten;

e_1 e_2 e_3 die Dicken der Schichten;

W die Wärmemenge, die in einer Zeiteinheit durch eine Fläche von der Ausdehnung F geht.

Dies vorausgesetzt, findet man nach den Grundsätzen, welche zu den Gleichungen (4) und (5) geführt haben, folgende Systeme von Gleichungen:

$$W = F \gamma_0 (\Delta_1 - t_1) = F \gamma_1 (t_1 - T_2) = F \gamma_2 (t_2 - T_3) = F \gamma_3 (t_3 - \Delta_0) \quad . \quad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= T_1 - \frac{\gamma_0 (\Delta_1 - T_1) e_1}{\lambda_1} \\ t_2 &= T_2 - \frac{\gamma_1 (t_1 - T_2) e_2}{\lambda_2} \\ t_3 &= T_2 - \frac{\gamma_2 (t_2 - T_3) e_3}{\lambda_3} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Aus den Gleichungen (9) folgt:

$$t_1 = T_2 + \frac{\gamma_0}{\gamma_1} (\Delta_1 - T_1)$$