# Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1863

Durchgang der Wärme durch Gefässwände

urn:nbn:de:bsz:31-270981

$$L = \frac{\gamma_0}{1 + \alpha T}\, \Omega \sqrt{2 g h \frac{\alpha (T - t)}{(1 + \alpha t)(1 + m)} - \left(1 + \frac{\mathfrak{T} - T}{T - t}\right)} \quad . \quad . \quad (3)$$

wobei nun T die Temperatur bedeutet, mit welcher die Luft den Kessel verlässt und unmittelbar in die Atmosphäre tritt. Bei einer solchen Einrichtung wäre die Luftmenge L eben so gross, als bei einer ganz gewöhnlichen Feuerungsanlage mit einem Kamin von der Höhe H, wenn

$$\sqrt{h \left(1 + \frac{\mathfrak{T} - T}{T - t}\right)} = \sqrt{H}$$

oder wenn

$$h = \frac{H}{1 + \frac{\mathfrak{T} - T}{T - t}}$$

Für $\mathfrak{T} = 1200^0$, $T = 200^0$, $t = 20^0$ wird $\frac{h}{H} = \frac{1}{6 \cdot 5}$.

Diese Schlothöhe braucht also nur den sechsten Theil einer Kaminhöhe zu haben, um die gleiche Wirkung hervorzubringen, wie ein Kamin. Allein die Lokalverhältnisse werden schwerlich jemals von der Art sein, dass die Anwendung eines so zu sagen negativen oder nach abwärts gekehrten Kamins einen praktischen Vortheil zu gewähren im Stande wären, und bei einer mässigen Schlothöhe h von circa $2^m$ ist die Wirkung desselben von keiner Erheblichkeit.

## Durchgang der Wärme durch Gefäßwände.

**Voraussetzungen.** Wir wollen uns die Aufgabe vorlegen, die Wärmemenge zu bestimmen, die durch ebene, cylindrische und sphärische Gefässwände geht, wenn diese Wände mit Medien in Berührung stehen, die eine constante Temperatur haben.

Die Fortpflanzung der Wärme im Innern von starren Körpern wurde zuerst (1812) von *Fourier* *), später (1815) von *Poisson* **) untersucht. Ueber das Wesen der Wärme haben diese Geometer ihre Ansichten nicht ausgesprochen, sondern sie bauen ihre Theorien auf gewisse Voraussetzungen, und gelangen auf abweichenden analytischen Wegen zu übereinstimmenden Endresultaten, die innerhalb gewisser Grenzen durch die Erfahrung bestätiget worden sind.

Ich werde zur Lösung der oben gestellten speziellen Aufgaben

---

*) Théorie de la chaleur, par *Fourier*.

**) Mémoire sur la distribution de la chaleur dans les corps solides, par *Poisson*. Journal de l'école polytechnique, cahier XIX.

den von *Fourier* und *Poisson* eingeschlagenen Wegen nicht folgen, sondern ziehe es vor, von zwei naturgemäss scheinenden Voraussetzungen auszugehen, durch welche man auf sehr einfache Weise ganz zu dem gleichen Resultate gelangt. Ich nehme an:

a. dass die Wärmemenge, welche durch die Oberfläche eines mit einem flüssigen Medium in Berührung stehenden festen Körpers in einer bestimmten Zeit eindringt, wenn die Temperatur des Mediums höher ist als die Temperatur des Körpers, oder aus dem Körper in das Medium entweicht, wenn seine Temperatur niedriger ist als die des Körpers, proportional sei 1) der Grösse der mit dem Medium in Berührung stehenden Oberfläche; 2) der Differenz der Temperaturen des Mediums und des Körpers an seiner Oberfläche; 3) der Zeit, während welcher die Wärmemittheilung stattfindet, vorausgesetzt, dass während derselben Aenderungen in den Temperaturen nicht eintreten; 4) einem gewissen Coeffizienten, dessen Werth von der Körpersubstanz, von der Beschaffenheit der Oberfläche des Körpers und von der Natur des Mediums abhängig ist.

Nennt man:

$\varDelta$ die Temperatur des Mediums;
t die Temperatur der Substanz des Körpers in der Nähe seiner Oberfläche;
F die Fläche, durch welche die Wärme geht;
$W_1$ die Wärmemenge, die in einer Zeiteinheit durch die Fläche F geht;
$\gamma$ den Ein- oder Ausstrahlungscoeffizienten, so ist unter den ausgesprochenen Voraussetzungen:

$$\left.\begin{array}{l} \text{wenn } t > \varDelta \text{ ist, } W_1 = \gamma F\,(t - \varDelta) \\ \text{wenn } \varDelta < t \text{ ist, } W_1 = \gamma F\,(\varDelta - t) \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Für $F = 1,\ t - \varDelta = 1$ wird $W_1 = \gamma$. Der Coeffizient $\gamma$ drückt also die Wärmemenge aus, die in einer Zeiteinheit durch eine Flächeneinheit bei einer Temperaturdifferenz von 1° eindringt.

b. Die Wärmefortpflanzung im Innern des Körpers gründe ich auf folgende Betrachtung:

Es sei $\Omega$ ein kleines Flächenstückchen im Innern des Körpers, u die Temperatur in allen Punkten von $\Omega$. Errichtet man in einem beliebigen Punkt A der Fläche $\Omega$ einen Perpentikel und schneidet auf demselben eine kleine Länge e ab, so kömmt man nach einem Punkt $A_1$, in welchem eine von u nur wenig verschiedene Temperatur $u_1$ stattfindet. Errichtet man in allen Punkten von $\Omega$ Perpentikel und sucht in denselben die Punkte auf, die eine Temperatur $u_1$ haben, so werden diese Punkte in einer kleinen Fläche $\Omega_1$ liegen, die, wenn $e$ und $u_1 - u$ sehr klein sind, als eine zu $\Omega$ parallele Fläche angesehen werden kann. Ich nehme nun an, dass wenn $u > u_1$ ist, von der Fläche $\Omega$ nach $\Omega_1$ in einer Zeiteinheit eine Wärmemenge $W_2$ ströme, die der Fläche $\Omega$ und der Temperaturdifferenz $u - u_1$ direkt, der Entfernung $e$, den Flächen $\Omega$ und $\Omega_1$ aber verkehrt proportional ist, und setze deshalb:

$$W_2 = \lambda \frac{u - u_1}{e} \Omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Den Coeffizienten $\lambda$ nenne ich den Wärmeleitungscoeffizienten. Für $u - u_1 = 1$, $\Omega = 1$, $e = 1$ gibt diese Formel $W_2 = \lambda$. Der Coeffizient $\lambda$ ist also die Wärmemenge, die in der Zeiteinheit durch einen Stab geht, dessen Querschnitt gleich Eins und dessen Länge gleich Eins ist, wenn die Differenz der an den Enden des Stabes herrschenden Temperaturen Einen Grad beträgt. Ist $e$ unendlich klein und bezeichnet man seinen Werth in diesem Fall mit $d\zeta$, so ist, wenn $u > u_1$ ist, $u - u_1 = -\frac{du}{d\zeta} d\zeta$; daher $\frac{u - u_1}{e} = \frac{du}{d\zeta}$, und dann wird:

$$W_2 = -\lambda \Omega \frac{du}{d\zeta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Vermittelst dieser durch die Gleichungen (1) und (3) analytisch ausgedrückten Voraussetzungen lassen sich die von *Fourier* und *Poisson* durch ziemlich umständliche Betrachtungen aufgefundenen allgemeinen Differenzialgleichungen, welche die Wärmebewegung im Innern der Körper bestimmen, herleiten. Ich will jedoch diese Herleitung unterlassen, weil es mir nur darum zu thun ist, die oben gestellten speziellen Fragen zu beantworten, was vermittelst der Gleichungen (1) und (3) direkt geschehen kann.

**Wärmemenge, die durch eine ebene Gefäßwand von gleicher Dicke geht.** Es sei Tafel XIV., Fig. 13, A B C D eine ebene Gefässwand, die von zwei Medien berührt wird, deren Temperaturen unveränderlich $\varDelta_1$ und $\varDelta_0$ sind. Es sei $\varDelta_1 < \varDelta_0$, so dass die Wärme von A B nach C D geht. Wir setzen den Beharrungszustand der Wärmebewegung voraus, nehmen also an, dass sich die Temperatur irgend eines Punktes $m$ mit der Zeit nicht ändert. Es sei $t_1$ die Temperatur der Wand längs A B, $t_0$ die Temperatur der Wand längs C D, $u$ die Temperatur in der von A B um $\zeta$ abstehenden Ebene E F, $e$ die Wanddicke oder die Entfernung der Ebenen A B und C D, $\gamma_1$ der Einstrahlungscoeffizient für den Eintritt der Wärme in A B, $\gamma_0$ der Ausstrahlungscoeffizient für den Austritt der Wärme aus C D, $\lambda$ der Wärmeleitungscoeffizient zur Bestimmung der

Wärmefortpflanzung im Innern, F die Fläche, durch welche die Wärme einströmt, W die Wärmemenge, welche im Beharrungszustand der Bewegung in jeder Zeiteinheit durch das Wandstück von der Grösse F geht.

Vermöge des durch (1) ausgedrückten Satzes ist die Wärmemenge, die in einer Zeiteinheit durch A B einströmt $F \gamma_1 (\varDelta_1 - t_1)$, ist ferner die Wärmemenge, die in einer Zeiteinheit durch C D ausströmt $F \gamma_0 (t_0 - \varDelta_0)$. Vermöge des durch die Gleichung (3) ausgedrückten Gesetzes, ist die durch die Fläche E F in einer Zeiteinheit gehende Wärmemenge $- \lambda F \frac{du}{d\zeta}$. Da im Beharrungszustand diese drei Wärmemengen gleich gross und gleich W sein müssen, so hat man:

$$W = F \gamma_1 (\varDelta_1 - t_1) = F \gamma_0 (t_0 - \varDelta_0) = - \lambda F \frac{du}{d\zeta} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Aus der Gleichheit $F \gamma_1 (\varDelta_1 - t_1) = - \lambda F \frac{du}{d\zeta}$ folgt durch Integration:

$$u = - \frac{\gamma_1 (\varDelta_1 - t_1)}{\gamma} \zeta + \text{const}$$

Es ist aber für $\zeta = o$ $u = t_1$, und für $\zeta = e$ $u = t_0$; demnach $t_1 = \text{const}$ und $t_0 = - \frac{\gamma_1 (\varDelta_1 - t_1)}{\lambda} e + \text{const}$, folglich:

$$t_0 = t_1 - \frac{\gamma_1 (\varDelta_1 - t_1)}{\gamma} e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Auch ist:

$$u = t_1 - \frac{\gamma_1 (\varDelta_1 - t_1)}{\lambda} \zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Aus dieser letzten Gleichung ersicht man, dass die Temperatur innerhalb der Wand von A B an bis C D hin gleichförmig abnimmt. Vermöge der Gleichheiten (4) hat man auch:

$$\gamma_1 (\varDelta_1 - t_1) = \gamma_0 (t_0 - \varDelta_0)$$

Aus dieser Gleichung in Verbindung mit (5) findet man:

$$\left. \begin{aligned} t_0 &= \frac{\frac{\varDelta_1}{\gamma_0} + \frac{\varDelta_0}{\gamma_0} + \frac{e}{\lambda} \varDelta_0}{\frac{1}{\gamma_0} + \frac{1}{\gamma_1} + \frac{e}{\lambda}} \\ t_1 &= \frac{\frac{\varDelta_1}{\gamma_0} + \frac{\varDelta_0}{\gamma_1} + \frac{e}{\lambda} \varDelta_1}{\frac{1}{\gamma_0} + \frac{1}{\gamma_1} + \frac{e}{\lambda}} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Setzt man diesen Werth von $t_1$ in den Ausdruck $W = F \gamma_1 (\varDelta_1 - t_1)$, so findet man:

$$W = F \frac{\Delta_1 - \Delta_0}{\frac{1}{\gamma_0} + \frac{1}{\gamma_1} + \frac{e}{\lambda}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Hieraus sieht man, dass die in einer Zeiteinheit durch eine ebene Gefässwand gehende Wärmemenge der Fläche und der Temperaturdifferenz der Medien direkt, der Wanddicke, aber nicht verkehrt proportional ist. Nur in dem Fall, wenn die Aus- und Einstrahlungscoeffizienten $\gamma_1$ und $\gamma_0$ ausserordentlich gross wären, so dass man $\frac{1}{\gamma_0} + \frac{1}{\gamma_1}$ gegen $\frac{e}{\lambda}$ vernachlässigen dürfte, würde die Wärmemenge W der Wanddicke verkehrt proportional werden. Der Werth von W wird gross, wenn $\gamma_0$ $\gamma_1$ und $\lambda$ grosse Werthe haben, d. h. wenn sowohl die Ein- und Ausstrahlung, als auch die Leitung leicht von Statten geht.

**Zusammengesetzte Wand.** Es sei Tafel XIV. Fig. 14:

$A_0 B_0 A_3 B_3$ eine aus drei Schichten gebildete Wand;

$\Delta_1$ $\Delta_0$ die Temperaturen der Medien, mit welchen die Wand in Berührung steht;

$T_1$ $t_1$ $T_2$ $t_2$ $T_3$ $t_3$ die Temperaturen an den Begrenzungsflächen der Schichten;

$\gamma_0$ $\gamma_1$ $\gamma_2$ $\gamma_3$ die Wärmeübergangscoeffizienten an den Trennungsflächen $A_0$ $B_0$, $A_1$ $B_1$, $A_2$ $B_2$, $A_3$ $B_3$ der Medien;

$\lambda_1$ $\lambda_2$ $\lambda_3$ die Wärmeleitungscoeffizienten für den Durchgang der Wärme durch die Schichten;

$e_1$ $e_2$ $e_3$ die Dicken der Schichten;

W die Wärmemenge, die in einer Zeiteinheit durch eine Fläche von der Ausdehnung F geht.

Dies vorausgesetzt, findet man nach den Grundsätzen, welche zu den Gleichungen (4) und (5) geführt haben, folgende Systeme von Gleichungen:

$$W = F \gamma_0 (\Delta_1 - t_1) = F \gamma_1 (t_1 - T_2) = F \gamma_2 (t_2 - T_3) = F \gamma_3 (t_3 - \Delta_0) \quad . \quad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= T_1 - \frac{\gamma_0 (\Delta_1 - T_1) e_1}{\lambda_1} \\ t_2 &= T_2 - \frac{\gamma_1 (t_1 - T_2) e_2}{\lambda_2} \\ t_3 &= T_2 - \frac{\gamma_2 (t_2 - T_3) e_3}{\lambda_3} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Aus den Gleichungen (9) folgt:

$$t_1 = T_2 + \frac{\gamma_0}{\gamma_1} (\Delta_1 - T_1)$$

$$t_2 = T_3 + \frac{\gamma_0}{\gamma_2}(\Delta_1 - T_1)$$

$$t_3 = \Delta_0 + \frac{\gamma_0}{\gamma_3}(\Delta_1 - T_1)$$

Führt man diese Werthe von $t_1$ $t_2$ $t_3$ in die Gleichungen (10) ein, so findet man:

$$T_2 + \frac{\gamma_0}{\gamma_1}(\Delta_1 - T_1) = T_1 - \frac{\gamma_0(\Delta_1 - T_1)e_1}{\lambda_1}$$

$$T_3 + \frac{\gamma_0}{\gamma_2}(\Delta_1 - T_1) = T_2 - \frac{\gamma_0(\Delta_1 - T_1)e_2}{\lambda_2}$$

$$\Delta_0 + \frac{\gamma_0}{\gamma_3}(\Delta_1 - T_1) = T_3 - \frac{\gamma_0(\Delta_1 - T_1)e_3}{\lambda_3}$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen findet man:

$$\Delta_0 + \gamma_0(\Delta_1 - T_1)\left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{1}{\gamma_3}\right) = T_1 - \gamma_0(\Delta_1 - T_1)\left(\frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + \frac{e_3}{\lambda_3}\right)$$

und hieraus folgt:

$$T_1 = \frac{\Delta_0 + \gamma_0 \Delta_1\left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{1}{\gamma_3}\right) + \gamma_0 \Delta_1\left(\frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + \frac{e_3}{\lambda_3}\right)}{1 + \gamma_0\left(\frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + \frac{e_3}{\lambda_3}\right) + \gamma_0\left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{1}{\gamma_3}\right)} \qquad (11)$$

Vermöge der Gleichungen (9) ist aber $W = F\gamma_0(\Delta_1 - T_1)$. Führt man in diesen Ausdruck für W den Werth von $T_1$, den die Gleichung (11) darbietet, ein, so findet man:

$$W = \frac{F(\Delta_1 - \Delta_0)}{\frac{1}{\gamma_0} + \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{1}{\gamma_3} + \frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + \frac{e_3}{\lambda_3}} \quad . \; . \; . \quad (12)$$

Mit diesem Ausdruck kann die Wärmemenge beurtheilt werden, welche durch eine Kesselwand eindringt, wenn dieselbe auf der den Verbrennungsgasen zugewendeten Seite mit einer Oxydschichte und mit einer Russschichte, auf der dem Kesselwasser zugekehrten Seite dagegen mit einer Oxydschichte und mit einer Kesselsteinschichte belegt ist.

**Cylindrische Wandung.** Tafel XIV., Fig. 15. Wir nehmen an, die Temperatur sei im Innern constant $\Delta_1$, ausserhalb constant $\Delta_2$ und $\Delta_1 > \Delta_2$ so dass die Wärme von innen nach aussen geht.

Nennen wir ferner:

$r_1$ den inneren, $r_2$ den äusseren Halbmesser des Cylinders;

$t_1$ und $t_2$ die Temperaturen des Cylinders an der inneren und an der äusseren Fläche;

$\gamma_1$ und $\gamma_2$ die Ein- und Ausstrahlungscoeffizienten;

$\lambda$ den Leitungscoeffizienten;

$l$ die Länge des Cylinders;
$W$ die in einer Zeiteinheit durch den Cylinder gehende Wärme;
$u$ die Temperatur des Wandmaterials in einer Entfernung $\zeta$ von der Axe des Cylinders.

Im Beharrungszustand der Erwärmung sind die durch die Cylinderflächen $2 r_1 \pi l$, $2 \zeta \pi l$, $2 r_2 \pi l$ in jeder Zeiteinheit gehenden Wärmequantitäten $2 r_1 \pi l \gamma_1 (\varDelta_1 - t_1)$, $2 r_2 \pi l \gamma_2 (t_2 - \varDelta_2)$, $-\lambda 2 \zeta \pi l \frac{du}{d\zeta}$ gleich gross und gleich $W$. Man hat daher die Gleichheiten:

$$W = 2 \pi l \gamma_1 r_1 (\varDelta_1 - t_1) = 2 \pi l \gamma_2 r_2 (t_2 - \varDelta_2) = - \lambda 2 \pi l \zeta \frac{du}{d\zeta} \quad (12)$$

aus welchen die drei unbekannten Grössen $t_1$ $t_2$ und $W$ bestimmt werden können.

Das Integrale der Gleichung:

$$W = - \lambda 2 \pi l \frac{\zeta du}{d\zeta}$$

ist:

$$u = - \frac{W}{2 \pi l \lambda} \operatorname{lognat} \zeta + \text{const} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Nun ist für $\zeta = r_1$ $u = t_1$ und für $\zeta = r_2$ $u = t_2$; daher hat man:

$$t_1 = - \frac{W}{2 \pi l \lambda} \operatorname{lognat} r_1 + \text{const} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

$$t_2 = - \frac{W}{2 \pi l \lambda} \operatorname{lognat} r_2 + \text{const} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Die Differenz dieser Ausdrücke gibt:

$$t_1 - t_2 = \frac{W}{2 \pi l \lambda} \operatorname{lognat} \frac{r_2}{r_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Aus den Gleichungen (12) folgt:

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= \varDelta_1 - \frac{W}{2 \pi l \gamma_1 r_1} \\ t_2 &= \varDelta_2 + \frac{W}{2 \pi l \gamma_2 r_2} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

$$t_1 - t_2 = \varDelta_1 - \varDelta_2 - \frac{W}{2 \pi l} \left( \frac{1}{\gamma_1 r_1} + \frac{1}{\gamma_2 r_2} \right) \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Setzt man die Werthe von $t_1 - t_2$, welche die Gleichungen (16) und (18) darbieten, einander gleich und sucht hierauf $W$ so findet man:

$$W = \frac{2 \pi l (\varDelta_1 - \varDelta_2)}{\frac{1}{\gamma_1 r_1} + \frac{1}{\gamma_2 r_2} + \frac{1}{\lambda} \operatorname{lognat} \frac{r_2}{r_1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

**Kugelförmige Wandung.** Tafel XIV., Fig. 15. Betrachten wir nun die Wärmebewegung durch ein sphärisches Gefäss, das innen und aussen mit Flüssigkeiten in Berührung steht, die ihre Temperatur mit der Zeit nicht ändern.

Nennt man:

$r_1$ $r_2$ die Halbmesser der inneren und der äusseren Kugelflächen;

$\Delta_1$ $\Delta_2$ die Temperaturen der Medien in der Kugel und ausserhalb derselben;

$t_1$ $t_2$ die Temperaturen an der inneren und äusseren Fläche der Gefässwand;

$\gamma_1$ und $\gamma_2$ die Ein- und Ausstrahlungscoeffizienten;

$\lambda$ den Wärmeleitungscoeffizienten;

$u$ die Temperatur in einer Entfernung $\zeta$ vom Mittelpunkt der Kugel;

W die Wärmemenge, welche in einer Zeiteinheit durch die kugelförmige Wand entweicht.

Die Wärmemengen, welche in einer Zeiteinheit durch die Kugelflächen gehen, deren Halbmesser $r_1$ $\zeta$ $r_2$ sind, haben in diesem Falle die Werthe $4 r_1^2 \pi \gamma_1 (\Delta_1 - t_1)$, $4 r_2^2 \pi \gamma_2 (t_2 - \Delta_2)$, $-4 \zeta^2 \pi \lambda \frac{du}{d\zeta}$, und jede derselben ist gleich der Wärmemenge W, die in jeder Sekunde aus der Kugel entweicht. Wir haben daher:

$$W = 4 r_1^2 \pi \gamma_1 (\Delta_1 - t_1) = 4 r_2^2 \pi \gamma_2 (t_2 - \Delta_2) = -4 \zeta^2 \pi \lambda \frac{du}{d\zeta} \quad . \quad (20)$$

Das Integrale der Gleichheit

$$W = -4 \zeta^2 \pi \lambda \frac{du}{d\zeta}$$

ist:

$$u = \frac{W}{4 \pi \lambda} \cdot \frac{1}{\zeta} + \text{const} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

Nun ist für $\zeta = r_1$, $u = t_1$ und für $\zeta = r_2$, $u = t_2$; daher hat man:

$$t_1 = \frac{W}{4 \pi \lambda} \frac{1}{r_1} + \text{const}$$

$$t_2 = \frac{W}{4 \pi \lambda} \frac{1}{r_2} + \text{const}$$

Demnach auch:

$$t_1 - t_2 = \frac{W}{4 \pi \lambda} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

Die Gleichheiten (20) geben:

$$t_1 = \Delta_1 - \frac{W}{4 \pi \gamma_1 r_1^2}$$

$$t_2 = \Delta_2 + \frac{W}{4 \pi \gamma_2 r_2^2}$$

$$t_1 - t_2 = \Delta_1 - \Delta_2 - \frac{W}{4\pi}\left(\frac{1}{\gamma_1 r_1^2} + \frac{1}{\gamma_2 r_2^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Die Werthe von $t_1 - t_2$, welche (22) und (23) darbieten, einander gleich gesetzt und dann $W$ gesucht, so findet man:

$$W = \frac{4\pi(\Delta_1 - \Delta_2)}{\frac{1}{\gamma_1 r_1^2} + \frac{1}{\gamma_2 r_2^2} + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

**Vergleichung zwischen verschiedenen Wandflächen.** Nennen wir:

$w_1$ die Wärmemenge, die in der Zeiteinheit durch eine Flächeneinheit einer ebenen Wand geht;

$w_2$ die Wärmemenge, die durch eine Flächeneinheit der äusseren Fläche einer cylindrischen Wand geht;

$w_3$ die Wärmemenge, die durch eine Flächeneinheit der inneren Fläche einer cylindrischen Wand geht;

$w_4$ die Wärmemenge, die durch eine Flächeneinheit der äusseren Fläche einer sphärischen Gefässwand geht;

$w_5$ die Wärmemenge, die durch eine Flächeneinheit der inneren Fläche einer sphärischen Gefässwand geht.

Vorausgesetzt, dass in allen diesen Fällen die Temperaturdifferenz der Medien und die Coeffizienten $\lambda_1\ \gamma_1\ \gamma_2$ die gleichen Werthe haben, erhält man aus den früher aufgefundenen Ausdrücken für $w_1\ w_2\ w_3\ w_4\ w_5$ folgende Formeln:

$$w_1 = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{e}{\lambda}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

$$w_2 = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\frac{1}{\gamma_1}\frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{r_2}{\lambda}\operatorname{lognat}\frac{r_2}{r_1}} \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

$$w_3 = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2}\frac{r_1}{r_2} + \frac{r_1}{\lambda}\operatorname{lognat}\frac{r_2}{r_1}} \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

$$w_4 = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\frac{1}{\gamma_1}\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{r_2^2}{\lambda}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

$$w_5 = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 + \frac{r_1^2}{\lambda}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Nennt man sowohl für ebene, als auch für cylindrische und sphärische Gefässe $e$ die Wanddicke und setzt voraus, dass dieselbe gegen die Halbmesser $r_1$ und $r_2$ klein sind, so darf man sich erlauben zu setzen:

$$\log \frac{r_2}{r_1} = \operatorname{lognat} \frac{r_1 + e}{r_1} = \operatorname{lognat}\left(1 + \frac{e}{r_1}\right) = \frac{e}{r_1}$$

$$\frac{r_2}{r_1} = 1 + \frac{e}{r_1}$$

und dann wird:

$$W_2 = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{e}{\lambda} + \frac{e}{\gamma_1}\,\frac{e}{r_1}} \quad \ldots \quad (30)$$

$$W_3 = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{e}{\lambda} - \frac{e}{\gamma_2}\,\frac{e}{r_1}} \quad \ldots \quad (31)$$

$$W_4 = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{e}{\lambda} + \frac{2}{\gamma_1}\,\frac{e}{r_1}} \quad \ldots \quad (32)$$

$$W_5 = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{e}{\lambda} - \frac{2}{\gamma_2}\,\frac{e}{r_1}} \quad \ldots \quad (33)$$

Vergleicht man diese Werthe von $W_2\, W_3\, W_4\, W_5$ mit dem Werth von $W_1$ (25), so sieht man leicht, dass:

$$W_5 > W_3 > W_1 > W_2 > W_4$$

Die grösste Wärmemenge geht demnach durch eine Flächeneinheit der inneren Fläche eines spärischen Gefässes, die kleinste durch eine Flächeneinheit der äusseren Fläche eines sphärischen Gefässes. Die durch eine Flächeneinheit einer ebenen Wand gehende Wärme liegt zwischen derjenigen Wärmemenge, die durch eine Flächeneinheit der inneren und äusseren Fläche einer cylindrischen Gefässwand geht.

Ist der Wärmeleitungscoeffizient $\lambda$ in Vergleich zu den Aus- und Einstrahlungscoeffizienten $\gamma_1\, \gamma_2$ sehr gross, so kann man in allen für die Wärmemengen aufgefundenen Formeln das von den Leitungscoeffizienten abhängige Glied gegen die Glieder, welche den Einfluss der Strahlung ausdrücken, vernachlässigen. Dadurch werden aber die in der Zeiteinheit durch eine Flächeneinheit gehenden Wärmemengen von dem Leitungscoeffizienten, mithin von der Natur des Materials, aus welchem die Wand besteht, so wie auch von der Wanddicke beinahe unabhängig. Es ist also in dem Falle, wenn die Leitung im Verhältniss zur Strahlung sehr gross ist, die durch eine Wand gehende Wärmemenge sowohl von der

Natur des Materials, als auch von der Wanddicke beinahe unabhängig.

Ist hingegen die Leitungsfähigkeit des Materials eine schwache, und sind dagegen die Ein- und Ausstrahlungscoeffizienten sehr stark, so kann man umgekehrt die von $\gamma_1$ und $\gamma_2$ abhängigen Glieder gegen das von $\lambda$ abhängige vernachlässigen und dann findet man aus (25), (30), (31), (32), (33), dass annähernd

$$W_1 = W_2 = W_3 = W_4 = W_5 = \lambda \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{e}$$

ist. In diesem Fall hat also die Form der Wand beinahe keinen Einfluss und ist für alle Gefässe die Wärmemenge, dem Leitungscoeffizienten und der Temperaturdifferenz der Medien direkt, der Wanddicke dagegen verkehrt proportional.

Zu diesen Folgerungen ist auch *Peclet* auf rein experimentalem Wege gekommen.

**Werthe der Coeffizienten.** Die absoluten Werthe von $\gamma_1\ \gamma_2 \ldots$ $\lambda_1\ \lambda_2 \ldots$ sind leider nur für wenige Fälle bekannt; wir werden in der Folge einige angeben. Für den Wärmedurchgangs-Coeffizienten:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{e}{\lambda}}$$

Durch einfach gebildete Wandungen habe ich für mehrere Fälle folgende Werthe gefunden:

| Uebergang | Coeffizient k |
|---|---|
| a) aus Luft durch eine Wand aus gebrannter Erde von 1$^{cm}$ Dicke in Luft (Ofenheizung) . . . . . . . . . | k = 5 |
| b) aus Luft durch eine Wand von Gusseisen von 1 bis 1·5$^{cm}$ Dicke in Luft . . . . . . . . . . . . . | k = 14 |
| c) aus Luft durch eine Wand von Eisenblech in Luft | k = 7 |
| d) aus Luft durch eine Wand von Eisenblech in Wasser oder aus Wasser in Luft (Dampfkesselheizung) . . | k = 23 |
| e) aus Dampf durch eine Wand von Gusseisen in Luft (Dampfheizung) . . . . . . . . . . . . . . . . | k = 12 |

Dabei ist die Stunde als Einheit genommen, d. h. diese Werthe von k bestimmen die Wärmemengen, welche stündlich durch einen Quadratmeter Wandfläche gehen bei einer Temperaturdifferenz von Einem Grad.