Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1863

Berechnung der Wirkungsgrösse, die einem Ballungsakt entspricht stehen; wir müssen es daher für höchst wahrscheinlich ansehen, dass weder auf der Sonne noch auf irgend einem der selbstleuchtenden Fixsterne oder sonstigen selbstleuchtenden Himmelskörper organisches Leben gefunden werden kann, sondern nur allein auf den durch Abkühlung dunkel gewordenen Planeten. Die Sonnen und Fixsterne sind also für die Planeten Licht- und Wärmequellen, welche auf denselben alles Leben und Wirken hervorbringen. Erst dann, wenn einmal eine Sonne durch Abkühlung eine feste Rinde erhalten hat, kann auf derselben organisches Leben zum Vorschein kommen.

Wenn man bedenkt, dass alle Weltkörper ihre Entstehung, ihre Bewegung, ihre Wärme- und Lichtzustände einem Gravitationsprozess verdanken; dass unsere Erde überdies die mächtigsten Motoren, Wasser, Wind und Dampfkraft, so wie auch den ganzen Reichthum an organischem Leben, der Licht- und der Wärmewirkung der Sonne, also in letzter Instanz abermals einem Gravitationsprozess verdankt: so erkennt man den kolossalen Umfang der Rolle, welche die Gravitationskraft im Weltganzen zu spielen bestimmt ist, und die bewunderungswürdige Einfachheit der Mittel, welche die Natur zur Erreichung ihrer grossen Zwecke in Anwendung zu bringen weiss.

Berechnung der Wirkungsgröße, die einem Ballungsakt entspricht. Die Berechnung der Wirkungsgrösse, die einem Ballungsakt entspricht, unterliegt keiner besonderen Schwierigkeit, wenn man sich erlaubt anzunehmen: 1) dass ursprünglich die Stofftheilchen so weit von einander entfernt sind, dass kein merklicher Fehler begangen wird, wenn man bei der Berechnung der Wirkungsgrösse sich so benimmt, wie wenn der Stoff ursprünglich, d. h. vor dem Ballungsakt unendlich weit zerstreut gewesen ist; 2) dass durch die Ballung ein kugelförmiges Gebilde entsteht, in welchem die Masse gleichförmig und continuirlich vertheilt ist.

Es sei r_0 die initiale Entfernung zweier Massentheilchen m und m_1, r deren Entfernung in irgend einem beliebigen Augenblick während des Ballungsaktes, r_1 ihre Entfernung in dem gebildeten Ball, λ die Kraft, mit welcher sich vermöge der allgemeinen Gravitation zwei Masseneinheiten anziehen, wenn deren Entfernung gleich der Einheit ist. Dies vorausgesetzt, ist die Wirkung, welche entwickelt wird, indem die Massentheilchen aus der Entfernung r_0 in die Entfernung r_1 übergehen:

$$-\int_{r_0}^{r_1} \frac{m\, m_1 \lambda}{r^2} \, d\, r$$

Verrichtet man die Integration, so findet man

$$\lambda\, m\, m_1 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right)$$

Da wir annehmen, dass r_0 vielmal grösser ist, als r_1, d. h. dass das ursprüngliche Volumen der im Raum zerstreuten Materie vielmals grösser war als das Volumen der geballten Masse, so dürfen wir $\frac{1}{r_0}$ gegen $\frac{1}{r_1}$ vernachlässigen. Die Wirkung, welche den Massentheilchen m und m_1 entspricht, wird demnach:

$$\frac{\lambda\, m\, m_1}{r_1}$$

Legen wir nun dem Zeichen r_1 den Sinn bei, dass es bedeutet die Entfernung irgend eines Massentheilchens der geballten Masse von dem Ort, den das ganz individuelle Massenatom m in der geballten Masse einnimmt, so ist:

$$\lambda\, m\, S \frac{m_1}{r_1}$$

die Wirkung, welche während des Ballungsaktes durch die Annäherung aller Massenatome an das Atom m entsteht. Diese Summe $S \frac{m_1}{r_1}$ kann nichts anderes sein, als eine gewisse Funktion der Entfernung des Atoms m vom Mittelpunkt der Kugel, die durch den Ballungsakt entsteht. Berechnen wir diese Summe für jedes Massenatom m, multipliziren jede dieser Summen mit dem Produkt $m \lambda$ und machen hierauf die Summen aller Produkte $m \lambda S \frac{m_1}{r_1}$, so erhalten wir den zweifachen Werth der Totalwirkung W, welche dem ganzen Ballungsakt entspricht; es ist demnach:

$$W = \frac{1}{2} \Sigma \left[m\, \lambda \left(S \frac{m_1}{r_1} \right) \right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Wir müssen nun diesem symbolischen Ausdrucke eine für die Ausrechnung seines Werthes geeignete Form geben.

Nennen wir:

ϱ und ϱ_1 die Entfernungen der Atome m und m_1 in der geballten Masse vom Mittelpunkt derselben;

Θ den Winkel, welchen die Radien ϱ und ϱ_1 gegen einander bilden; so ist:

$$r_1^2 = \varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\, \varrho\, \varrho_1 \cos \Theta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Legen wir durch den Radius ϱ irgend eine fixe Ebene und bezeichnen durch ω den Neigungswinkel derselben mit der Ebene des Dreiecks, das durch die drei Linien $\varrho\, \varrho_1\, r_1$ gebildet wird, und betrachten m_1 als diejenige Masse, welche in dem Raum eingeschlossen ist, der durch die drei unendlich kleinen Dimensionen $\varrho_1 d\Theta$, $d\varrho_1$, $\sin\Theta\, d\omega$ bestimmt wird, so können wir schreiben:

$$m_1 = \mu\, \varrho_1\, d\Theta\, d\varrho_1\, \varrho_1 \sin\Theta\, d\omega$$

$$m_1 = \mu\, \varrho_1^2 \sin\Theta\, d\varrho_1\, d\Theta\, d\omega \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

wobei μ die Masse bedeutet, welche die Volumeneinheit der geballten Masse enthält.

Wir können daher schreiben:

$$S\, \frac{m_1}{r_1} = \mu \iiint \frac{\varrho_1^2 \sin\Theta\, d\varrho_1\, d\Theta\, d\omega}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho\varrho_1 \cos\Theta}} \quad \ldots \quad (4)$$

Da diese Summe auf den ganzen Ball auszudehnen ist, so sind die Integrationen auszuführen:

für ϱ_1 von 0 bis R
„ ω „ 0 „ 2π
„ Θ „ 0 „ π

wobei R den Halbmesser des Balles bezeichnet.

Die Integration in Bezug auf ω gibt:

$$S\, \frac{m_1}{r_1} = \pi\mu \iint \frac{\varrho_1^2 \sin\Theta\, d\varrho_1\, d\Theta}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho\varrho_1 \cos\Theta}}$$

Nun ist:

$$\sin\Theta\, d\Theta = -d(\cos\Theta)$$

demnach:

$$S\, \frac{m_1}{r_1} = \pi\mu \int \varrho_1^2 d\varrho_1 \left(\int \frac{-d(\cos\Theta)}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho\varrho_1 \cos\Theta}} \right)$$

Allgemein ist:

$$\int \frac{-d(\cos\Theta)}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho\varrho_1 \cos\Theta}} = \frac{2}{2\varrho\varrho_1} \sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho\varrho_1 \cos\Theta}$$

demnach:

$$\int_0^\pi \frac{-d(\cos\Theta)}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho\varrho_1 \cos\Theta}} = \frac{1}{\varrho\varrho_1} \Big[(\varrho + \varrho_1) - (\varrho - \varrho_1) \Big] = \frac{2}{\varrho}$$

und folglich erhalten wir:

$$S\, \frac{m_1}{r_1} = 2\pi\mu \int_0^R \frac{2\varrho_1^2 d\varrho_1}{\varrho} = \frac{4\pi\mu}{\varrho} \frac{R^3}{3}$$

Diesen Werth in (1) eingeführt, erhält man:

$$W = \frac{1}{2} \Sigma m \lambda \frac{3\pi\mu}{\varrho} \frac{R^3}{3} = \frac{2}{3} \pi\lambda\mu R^3 \Sigma \frac{m}{\varrho} \quad \ldots \quad (5)$$

Denken wir uns mit ϱ und $\varrho + d\varrho$ zwei Kugelflächen beschrieben, so ist die zwischen denselben enthaltene Masse gleich $4\varrho^2\pi\, d\varrho\,\mu$. Der Antheil der Summe $\Sigma \frac{m}{\varrho}$, welcher dieser Masse entspricht, ist demnach $4\varrho\pi\mu\, d\varrho$ und der Totalwerth ist:

$$\Sigma \frac{m}{\varrho} = \int_0^R 4\,\pi\,\mu\,\varrho\,d\,\varrho = 2\,\pi\,\mu\,R^2$$

Wir erhalten demnach:

$$W = \frac{2}{3}\,\pi\,\lambda\,\mu\,R^3 . 2\,\pi\,\mu\,R^2 = \frac{4}{3}\,\pi^2\,\mu^2\,\lambda\,R^5 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

woraus man zunächst ersieht, dass die Ballungswirkung der fünften Potenz des Radius von dem entstandenen Ball proportional ist, also bei grossen Bällen ungemein gross wird.

Temperatur des Balles. Nimmt man an, dass die ganze Wirkung zuletzt, wenn die Ballung geschehen ist, in den Aether der Dynamiden übergeht und Schwingungen erzeugt, die der Wärme entsprechen, und dass alle Dynamiden in gleicher Weise erschüttert werden, so dass in allen gleiche Temperaturen eintreten, so lässt sich diese Temperatur u_0 leicht berechnen.

Nennt man $\mathfrak{C}$ die Wärmemenge (in Wärmeeinheiten ausgedrückt), welche erforderlich ist um einer Masseneinheit des Balles eine Temperaturerhöhung von einem Grad zu ertheilen, so ist: $\frac{4}{3}\,R^3\,\pi\,\mu\,\mathfrak{C}\,u_0$ die Wärmemenge, welche erforderlich ist, um der Masse $\frac{4}{3}\,R^3\,\pi\,\mu$ des Balles eine Temperaturerhöhung von u_0 Grad zu ertheilen. Nennt man weiter $k = 424^{Klgm}$ die Wirkungsgrösse, welche einer Wärmeeinheit entspricht, so ist:

$$\frac{4}{3}\,R^3\,\pi\,\mu\,\mathfrak{C}\,u^0\,k$$

die in Kilogrammmetern ausgedrückte Wirkungsgrösse, welche erforderlich ist, um die geballte Masse von 0° Temperatur bis u_0 Grad zu erwärmen. Wenn wir annehmen, dass die ursprüngliche Temperatur der Materie 0° war, so erhalten wir demnach:

$$W = \frac{4}{3}\,\pi^2\,\lambda\,\mu^2\,R^5 = \frac{4}{3}\,R^3\,\pi\,\mu\,\mathfrak{C}\,u_0\,k$$

Demnach:

$$u_0 = \frac{\pi\,\lambda\,\mu\,R^2}{k\,\mathfrak{C}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Hiermit ist nun die Temperatur der geballten Masse berechnet, und man sieht, dass dieselbe dem Quadrat des Halbmessers des Balles proportional ist, dass sich demnach die mittleren Temperaturen der Weltkörper wie die zweiten Potenzen ihrer Halbmesser oder wie ihre Oberflächen verhalten.

Numerische Rechnungen. Relative Werthe. Nimmt man an, dass $\mathfrak{C}$ für alle Planeten und für die Sonne den gleichen Werth hat, so