# Der Maschinenbau

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1863

Theorie der Jonval'schen Turbine

urn:nbn:de:bsz:31-270981

drückt bedeutet, und $\mathfrak{N}$ die so eben berechnete Anzahl Umdrehungen des Rades per 1'.

Für die Bestimmung der Dimensionen aller Theile, welche zum Aufzug und zur Transmission dienen, gebe ich hier keine Regeln an, weil dafür im ersten Band gesorgt ist.

Wenn man sich mit einem geringeren, aber doch für die Praxis genügenden Grad von Genauigkeit begnügen will, kann man das Turbinenrad nach folgendem einfachen Verfahren berechnen und verzeichnen.

Man berechne die Wassermenge Q, welche per 1″ auf das Rad wirken muss, damit es den zum Betriebe nothwendigen Effekt hervorbringen kann, vermittelst der Formel:

$$Q = 0{\cdot}107 \frac{N}{H} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Hierauf berechne man den inneren Halbmesser $R_2$ des Rades vermittelst der Formel:

$$R_2 = 0{\cdot}538 \sqrt{Q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Ist $R_2$ gleich oder kleiner als $0{\cdot}5^m$, so verzeichne man den Horizontaldurchschnitt des Rades geometrisch ähnlich dem Rade auf Tafel VI., Atlas des grösseren Turbinenwerkes.

Ist $R_2$ grösser als 0·5, so verzeichne man den Horizontaldurchschnitt des Rades ähnlich dem Rade Tafel III., Atlas des grösseren Turbinenwerkes.

Um die Höhe $\delta_1$ des Rades zu bestimmen, berechne man zuerst den Werth von U vermittelst der Formel:

$$U = 0{\cdot}8 \sqrt{2\,g\,H}$$

und dann erhält man:

$$\delta_1 = \frac{Q}{i\,s\,U}$$

Die zweckmässigste Anzahl $\mathfrak{N}$ der Umdrehungen des Rades per 1″ ist:

$$\mathfrak{N} = 4{\cdot}7 \frac{\sqrt{2\,g\,H}}{R_2}$$

## Theorie der Jonval'schen Turbine.

**Vorbereitungen** Eine ganz genaue Theorie auch dieser Turbine würde erfordern, dass man im Stande wäre, den Bewegungen und Wechselwirkungen aller einzelnen Wassertheilchen durch analytische Rechnungen zu folgen, was leider nicht möglich ist. Wir sind daher auch hier genöthigt, von gewissen Voraussetzungen auszugehen, durch welche die Durchführung der Rechnungen möglich wird, die aber zugleich die Bedeutung haben, dass sie Bedingungen aussprechen, bei deren Erfüllung eine regelmässige und vortheilhafte Bewegung des Wassers statt finden kann.

Diese Voraussetzungen sind folgende:

1. Die Turbine befinde sich in einem Beharrungszustand der Bewegung, wobei sich der Bewegungszustand des Wassers und des Rades mit der Zeit nicht ändert, ein gleichförmiger Wasserzufluss vorhanden ist, und ein konstanter Widerstand der Axe der Turbine entgegen wirkt.

2. Das Wasser gelange ohne irgend eine Störung aus dem Zuflusskanal durch den Maschinenmantel und durch das Einlaufrad bis an die Mündungen dieses Rades.

3. Das Einlaufrad wie das Turbinenrad habe jedes so viele stetig und mässig gekrümmte Radflächen, dass in der Bewegung der Wassertheilchen merkliche Störungen nicht eintreten können.

4. Die Flächen des Einlaufrades und des Turbinenrades seien so gebildet, dass sie durch jede durch die Radaxe gelegte Ebene nach einer auf die Axe senkrecht stehenden geraden Linie geschnitten werden. Diese Flächen entstehen demnach, indem eine gerade Linie, welche die Axe stets senkrecht durchschneidet, längs dieser Axe herabgleitet und dabei nach einem gewissen Gesetz sich wendet.

5. Wir setzen ferner voraus, dass jedes Wasseratom während seiner Bewegung durch das Turbinenrad in der Fläche des Kreiscylinders verbleibe, dessen Halbmesser gleich ist der Entfernung des Punktes, wo das Theilchen in das Rad eingetreten ist, von der Axe.

6. Das Wasser fülle die Kanäle der beiden Räder vollkommen aus, so dass ein unregelmässiges Hin- und Herschlagen oder Versprühen des Wassers nicht statt finden kann.

Alle diese Voraussetzungen sind in der Wirklichkeit nur annähernd erfüllt, insbesondere ist die fünfte immer nur für die Wassertheilchen streng richtig, welche am äusseren Umfang des Rades in dasselbe eintreten, denn die Wassertheilchen, welche in das Rad in einem Punkt eintreten, dessen Entfernung von der Radaxe kleiner ist, als der äussere Halbmesser des Rades, werden während ihrer Bewegung durch das Rad nicht ganz sicher geleitet, entfernen sich nach und nach von der Axe und verlassen das Rad in einem Punkt, dessen Entfernung von der Axe grösser ist, als die Entfernung des Eintrittspunktes. Vermöge dieses Vorganges sollte man vermuthen, dass durch die Wechselwirkung der Wassertheilchen bei der *Jonval*'schen Turbine grössere Störungen entstehen müssten, als bei der *Fourneyron*'schen Turbine, allein es ist nicht zu übersehen, dass die Bewegung des Wassers bis zum Austrittspunkt aus dem Leitrade bei der *Fourneyron*'schen Turbine komplizirter ist, als bei der *Jonval*'schen Turbine, und somit scheinen die Vortheile und Nachtheile in der Weise ausgeglichen, dass beide Anordnungen im Ganzen gleich günstige Effektleistungen hervorbringen.

Der folgenden Berechnung legen wir eine Turbine mit mittlerer Aufstellung Tafel XI., Fig. 1 und 6, zu Grund, und nehmen an, dass im Zuflussrohr, so wie auch unten im Abflussrohr Klappen oder Schieber angebracht sind, wodurch die Zuströmung wie die Abströmung regulirt werden kann. Für die Rechnung wählen wir folgende Bezeichnungen:

$O$ der Querschnitt des Zuleitungsrohres;
$\omega$ der Querschnitt der Oeffnung zwischen der Klappe und der Wand des Zuleitungsrohres;
$R_1$ der äussere Halbmesser des Rades;
$R_2$ der innere Halbmesser des Rades;
$R = \frac{1}{2}(R + R_2)$ der mittlere Halbmesser des Rades;
$\alpha$ der Winkel, den die mittlere Richtung, nach welcher das Wasser die Leitkanäle verlässt, mit der unteren Ebene des Leitkurvenrades bildet:
$\beta$ der Winkel, den eine durch die obere Kante einer Radkurve gelegte tangirende Ebene mit der oberen Ebene des Rades bildet;
$\gamma$ der Winkel, den die Richtung, nach welcher das Wasser das Rad verlässt mit der unteren Ebene des Rades bildet;
$i$ Anzahl der Leitkurven;
$s$ die normale Entfernung zweier Leitkurven, gemessen in einer Entfernung $R$ von der Axe;
$\Omega$ die Summe der Querschnitte aller Ausflussöffnungen am Leitrade;
$i_1$ Anzahl der Radkurven;
$s_2$ die obere Weite eines Radkanales, gemessen in einer Entfernung $R$ von der Axe;
$s_1$ die untere Weite eines Radkanales, gemessen in einer Entfernung $R$ von der Axe;
$\Omega_2$ die Summe der oberen Querschnitte aller Radkanäle;
$\Omega_1$ die Summe der unteren Querschnitte aller Radkanäle;
$O_1$ der Querschnitt des Abflussrohres unter dem Turbinenrade;
$\omega_1$ der Querschnitt der unteren Ausflussöffnung, durch welche das Wasser in den Abflusskanal gelangt;

$\varkappa$ k $k_1$ $\varkappa_1$ die Kontraktions-Coeffizienten, welche den Oeffnungen $\omega$ $\Omega$ $\Omega_1$ $\omega_1$ entsprechen;

$v_1$ die äussere, $v_2$ die innere, $x = \frac{v_1 + v_2}{2}$ die mittlere Geschwindigkeit des Rades in den Entfernungen $R_1$, $R_2$, $\frac{1}{2}(R_1 + R_2)$ von der Axe;

U die absolute Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser aus den Leitkanälen tritt;

$u_2$ $u_1$ die relativen Geschwindigkeiten des Wassers gegen die Radschaufeln an der oberen und an der unteren Ebene des Rades;

w die absolute Geschwindigkeit des Wassers im Abflussrohr unmittelbar unter dem Rade;

C c $C_1$ $c_1$ die Geschwindigkeit des Wassers in den Querschnitten O $\omega$ $O_1$ $\omega_1$;

$\mathfrak{A}$ Druck der Atmosphäre auf einen Quadratmeter;

$\mathfrak{Q}$ Druck auf einen Quadratmeter zwischen den Wassertheilchen in der Ebene zwischen dem Leitrade und dem Turbinenrade;

$\mathfrak{Q}_1$ Druck auf einen Quadratmeter zwischen den Wassertheilchen unmittelbar unter dem Turbinenrade;

$\mathfrak{P}$ Druck auf einen Quadratmeter zwischen den Wassertheilchen, unmittelbar hinter der obern Einlassklappe;

$\varepsilon$ Metalldicke der Leitfläche;

$\varepsilon_1$ Metalldicke der Radfläche;

$\varrho = 1000$ Gewicht von einem Kubikmeter Wasser;

$g = 9{\cdot}808$ Beschleunigung durch die Schwere;

$E_n$ Nutzeffekt des Rades in Kilogramm-Metern;

H das totale Gefälle;

h Höhe des Mittelpunktes der Einlassklappe über dem Spiegel des Unterwassers;

$h_2$ Höhe der unteren Ebene des Rades über dem Spiegel des Unterwassers;

$h_1$ Tiefe des Mittelpunktes der unteren Ausflussöffnung $\omega_1$ unter dem Spiegel des Unterwassers;

z Höhe des Turbinenrades.

Diese Bezeichnungen vorausgesetzt, wenden wir uns nun zur Entwicklung der Theorie, und wollen zunächst diejenigen Bedingungen aufsuchen, welche dem absoluten Maximum des Effektes entsprechen würden, wenn Reibungen und Störungen in der Bewegung des Wassers nicht stattfänden.

**Bedingungen des Maximal-Effektes.** Wenn wir die verschiedenen Reibungen des Wassers an den Röhrenwänden und an den Leitflächen und Radflächen vernachlässigen, ferner die Störungen in der Bewegung des Wassers an den Einengungen, so wie beim Uebertritt aus dem Leitrad in das Turbinenrad unberücksichtiget lassen, also eine ideal vollkommene Anordnung voraussetzen, erhalten wir für die Bewegung und Wirkung des Wassers folgende Beziehungen.

Die untere Ebene des Einlaufrades befindet sich in einer Tiefe $H - h - z$ unter dem Wasserspiegel im Zuflusskanal, und in der Ebene zwischen dem Einlaufrad und dem Turbinenrad herrscht eine Pressung, die einer Wassersäule von der Höhe $\frac{\mathfrak{Q}}{\varrho}$ entspricht. Wenn also Reibungen und Störungen vernachlässigt werden, hat man für die Ausflussgeschwindigkeit $U$ aus dem ~~Turbinen~~Leitrad folgende Gleichung:

$$\frac{U^2}{2\,g} = H - h_2 - z + \frac{\mathfrak{A}}{\varrho} - \frac{\mathfrak{Q}}{\varrho} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Die Bedingungen, dass das Wasser ohne Stoss aus dem Leitrad in das Turbinenrad übertritt, sind: Tafel XI., Fig. 6,

$u_2$

$$\left.\begin{aligned} \frac{v}{U} &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta} \\ \frac{\cancel{u^2}}{U} &= \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Auch besteht zwischen diesen Geschwindigkeiten und Winkeln noch folgende Beziehung:

$$u_2 = v^2 + U^2 - 2\,v\,U \cos \alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

welche auch aus den Gleichungen (2) folgt, wenn man $\beta$ eliminirt.

Die oberhalb und unterhalb des Rades herrschenden Pressungen sind als Wassersäulen ausgedrückt $\frac{\mathfrak{Q}}{\varrho}$, $\frac{\mathfrak{Q}_1}{\varrho}$. Da wir die Reibung des Wassers an den Wänden der Radkanäle vernachlässigen, ferner die wechselseitige Störung der Wassertheilchen nicht in Rechnung bringen, und zugleich voraussetzen, dass jedes Wassertheilchen während seiner Bewegung durch das Rad seine Entfernung von der Axe nicht ändert, so erhalten wir zur Bestimmung der relativen Geschwindigkeit $u_1$ folgende Gleichung:

$$\frac{u_1^2}{2\,g} = \frac{u_2^2}{2\,g} + \frac{\mathfrak{Q}}{\varrho} - \frac{\mathfrak{Q}_1}{\varrho} + z \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4))$$

Die absolute Geschwindigkeit $w$, mit welcher das Wasser aus dem Rade hervorkommt, ist:

$$w^2 = u_1^2 + v^2 - 2\,u_1\,v \cos \gamma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Da diese Geschwindigkeit für die vortheilhafteste Effektleistung verschwinden soll, so muss sein:

$$\left.\begin{array}{r} \gamma = o \\ u_1 = v \end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots (6)$$

weil wir annehmen, dass das Wasser ohne die geringste Störung von dem Rad weg durch den unteren Cylinder und durch die untere Ausflussöffnung in den Abflusskanal gelange, so besteht die Beziehung:

$$\frac{\mathfrak{Q}_1}{\varrho} + h_2 = \frac{\mathfrak{A}}{\varrho} \dots\dots\dots\dots (7)$$

Da der Druck $Q_1$ nie negativ werden kann, so darf $h_2$ nie grösser als $\frac{Q}{\varrho}$ sein, d. h. wenn die Wassermenge unter dem Rad nicht abreissen soll, muss die Höhe der unteren Ebene des Rades über dem unteren Wasserspiegel kleiner sein, als die Höhe der Wassersäule, welche dem Druck der Atmosphäre entspricht.

Hiermit sind nun alle Gleichungen, welche das absolute Maximum des Nutzeffektes charakterisiren, aufgestellt, und wir haben dieselben nun weiter analytisch zu verarbeiten.

Durch Addition der Gleichungen (1), (4) und (7) folgt:

$$\frac{U^2}{2\,g} = H + \frac{u_2^{\,2}}{2\,g} - \frac{u_1^{\,2}}{2\,g} \dots\dots\dots\dots (8)$$

Setzt man für $u_2^{\,2}$ seinen Werth aus (3) und berücksichtigt, dass $u_1 = v$ sein soll, so findet man:

$$\frac{U^2}{2\,g} = H + \frac{v^2}{2\,g} + \frac{U^2}{2\,g} - \frac{2\,v\,U}{2\,g}\cos\alpha - \frac{v_2}{2\,g}$$

oder:

$$o = H - \frac{2\,v\,U}{2\,g}\cos\alpha$$

und wenn man aus der ersten der Gleichungen (2) den Werth von $v$ einführt, erhält man eine Gleichung, aus welcher folgt:

$$U = \sqrt{g\,H\,\frac{\sin\beta}{\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)}} \dots\dots\dots\dots (9)$$

Führt man diesen Werth von $U$ in die Gleichungen (2) ein, so folgt ferner:

$$v = \sqrt{g\,H\,\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\,\sin\beta}} \dots\dots\dots\dots (10)$$

$$u_2 = \sqrt{g\,H\,\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)\cdot tg\beta}} \dots\dots\dots\dots (11)$$

Setzt man den Werth (9) in die Gleichung (1), so folgt aus derselben:

$$\frac{\mathfrak{Q}}{\varrho} = \mathrm{H}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{\sin\beta}{\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)}\right) - \mathrm{h}_2 - \mathrm{z} + \frac{\mathfrak{A}}{\varrho} \quad \ldots \quad (12)$$

Die Bedingungen, welche ausdrücken, dass das Wasser die Kanäle erfüllt, sind:

$$\mathrm{Q} = \Omega\,\mathrm{U}\,\mathrm{k} = \Omega_2\,\mathrm{u}_2 = \Omega_1\,\mathrm{u}_1\,\mathrm{k}_1 \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

Hieraus folgt:

$$\Omega = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{U}\,\mathrm{k}}$$

12u

$$\Omega_2 = \Omega\,\mathrm{k}\,\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{u}_2}$$

$$\Omega_1 = \Omega\,\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{k}_1}\,\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{u}_1}$$

und mit Berücksichtigung von (2) und (6):

12u

$$\left.\begin{aligned} \Omega &= \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{U}\,\mathrm{k}} \\ \Omega_2 &= \Omega\,\mathrm{k}\,\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \\ \Omega_1 &= \Omega\,\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{k}_1}\,\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

Diese Ergebnisse unserer Theorie werden wir in der Folge zur Aufstellung von Regeln zur Berechnung der Dimensionen von neu zu erbauenden Turbinen benutzen; vorerst aber ist es nothwendig, die richtigen Werthe von $\Omega$, $\Omega_2$ und $\Omega_1$ zu bestimmen.

**Bestimmung der effektiven Werthe von $\Omega$, $\Omega_2$, $\Omega_1$.** Die Gleichungen (13) sind nur dann richtig, wenn man für $\Omega$, $\Omega_1$ $\Omega_2$ die effektiven, d. h. diejenigen Querschnitte in Rechnung bringt, durch welche das Wasser wirklich strömen kann. Um diese effektiven Werthe von $\Omega$, $\Omega_1$, $\Omega_2$ zu finden, muss man die bei *Jonval*'schen Turbinen nicht unbeträchtliche Dicke der Leit- und Radschaufeln in Rechnung bringen.

Es ist $\frac{2\,\mathrm{R}\,\pi}{\mathrm{i}}$ eine Schaufeltheilung des Leitrades, gemessen an der Peripherie des mittleren Kreises vom Halbmesser R. Betrachtet man das untere Ende jeder Leitschaufel als eine gegen die untere Ebene des Rades unter einem Winkel $\alpha$ geneigte schiefe Ebene, so ist die mittlere normale Weite eines Kanales des Leitrades $\frac{2\,R\,\pi}{i}\sin\alpha - \varepsilon$ und da die radiale Dimension eines Kanales gleich $R_1 - R_2$ ist, so ist der Querschnitt eines Kanales $(R_1 - R_2)\left(\frac{2\,R\,\pi}{i}\sin\alpha - \varepsilon\right)$ und die Summe der Querschnitte aller Kanäle $i\,(R_1 - R_2)\left(\frac{2\,R\,\pi}{i}\sin\alpha - \varepsilon\right)$. Dieses ist aber nicht der effektive Werth von $\Omega$, denn die Radschaufeln versperren durch ihre Dicke theilweise diese Ausströmungsöffnung. Jede Radschaufel versperrt nämlich durch ihre Dicke $\varepsilon_1$ und radiale Dimension $R_1 - R_2$ die normale Ausströmungsöffnung um $\varepsilon_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}(R_1 - R_2)$ und alle $i_1$ Radschaufeln um $i_1\,\varepsilon_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}(R_1 - R_2)$. Der effektive Werth von $\Omega$ ist demnach:

$$\Omega = i\,(R_1 - R_2)\left(\frac{2\,R\,\pi}{i}\sin\alpha - \varepsilon\right) - i_1\,\varepsilon_1\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\,(R_1 - R_2)$$

Berücksichtiget man, dass $R = \frac{1}{2}(R_1 - R_2)$ ist, so kann dieser Werth von $\Omega$ geschrieben werden, wie folgt:

$$\Omega = R_1^{\,2}\left[1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\right]\pi\sin\alpha\left(1 - \frac{i}{2\,\pi\sin\alpha}\,\frac{\varepsilon}{R} - \frac{i_1}{2\,\pi\sin\beta}\,\frac{\varepsilon_1}{R}\right) \quad (15)$$

Der effektive Werth von $\Omega_1$ ist dagegen:

$$\Omega_1 = i_1\,s_1\,(R_1 - R_2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Führt man diese Werthe von $\Omega$ und $\Omega_1$ in die dritte der Gleichungen (14) ein und sucht den Werth von $s_1$, so findet man ohne Schwierigkeit:

$$s_1 = R\left[\frac{2\,\pi\sin\alpha}{i_1} - \left(\frac{i}{i_1}\,\frac{\varepsilon}{R} + \frac{\varepsilon_1}{R}\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)\right]\frac{k}{k_1}\,\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \quad \ldots \quad (17)$$

Diese Ergebnisse, in Verbindung mit Erfahrungsthatsachen und einigen Gefühlsurtheilen, wollen wir nun zur Aufstellung von Regeln für die Berechnung der wesentlichsten Dimensionen von neu zu konstruirenden Turbinen benützen.