

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

**Festgabe zum Jubiläum der vierzigjährigen Regierung
seiner Königlichen Hoheit des Grossherzogs Friedrich von
Baden**

Friedrich <I., Baden, Großherzog>

Karlsruhe, 1892

Die Zerstreung des Lichtes durch matte Oberflächen und die
Empfindungseinheit zum Messen der Empfindungsstärke von Christian
Wiener

[urn:nbn:de:bsz:31-280153](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-280153)

DIE
ZERSTREUUNG DES LICHTES DURCH
MATTE OBERFLÄCHEN

UND DIE

EMPFINDUNGSEINHEIT ZUM MESSEN
DER EMPFINDUNGSSTÄRKE

VON

CHRISTIAN WIENER.

Geschichtliches und Wesen der Zerstreung.

Zu den in dieser Abhandlung zu beschreibenden und zu erörternden Untersuchungen über die Lichtzerstreung durch matte Körperoberflächen wurde ich durch die in meinem Lehrfache der darstellenden Geometrie liegende Aufgabe geführt, Körper mit ihren Helligkeitsgraden abzubilden. Die bisherigen ausgiebigsten Quellen theoretischer und experimenteller Untersuchungen, welche Grundlagen für die Lösung dieser Aufgabe bieten, findet man immer noch in zwei Werken aus der Mitte des vorigen Jahrhunderts, in Lamberts Photometrie* und in Bouguers Optik.** Dieselben sind für jene Zwecke bisher kaum verwerthet worden, und ich habe in meiner darstellenden Geometrie*** versucht, sie in höherem Grade auszunutzen. Während nun, wie allgemein anerkannt wird, die Beleuchtungsstärke eines Elementes der beleuchteten Fläche gleich der Stärke des beleuchtenden Lichtes, getheilt durch das Quadrat seines Abstandes vom Elemente, und vervielfacht mit dem Cosinus des Einfallswinkels ϵ ist, so ist die Helligkeit, in welcher das Element dem betrachtenden Auge erscheint, mit jener Beleuchtungsstärke und mit dem Rückstrahlungsvermögen (Albedo bei Lambert) proportional. Aber auch die Richtung, in welcher man das Element betrachtet, kann von Einfluss sein. Diesen Einfluss bestimmt Lambert durch das nach ihm benannte Lambertsche oder Cosinusgesetz, nach welchem ein Flächenelement, welches das empfangene Licht zerstreut, unter dem Rückwerfungs- oder Ausfallswinkel α eine Lichtmenge zurückwirft, die mit $\cos \alpha$ proportional ist. Da aber die scheinbare Grösse des Elementes ebenfalls mit $\cos \alpha$ proportional und die Helligkeit mit dieser scheinbaren Grösse umgekehrt proportional ist, so ist nach dem Lambertschen Gesetze die Helligkeit einer matten Fläche unabhängig von α , oder die Fläche erscheint unter derselben mit $\cos \epsilon$ proportionalen Helligkeit, von welcher Seite man sie auch betrachten mag.

* Lambert, photometria, Augsburg 1760.

** Bouguer, essai d'optique, Paris 1729, und traité d'optique, Paris 1760.

*** Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Bd. 1, 1884, S. 55 und 390 ff.

Dass das Lambertsche Gesetz aber nicht allgemein richtig ist, geht schon aus den Beobachtungen von Bouguer hervor. Er fand auf eine Weise, die wir bei unseren später anzugebenden Versuchen ebenfalls befolgt haben, dass bei nahe übereinstimmender Beleuchtungs- und Sehrichtung, also bei $\varepsilon = \alpha$, die Helligkeit nicht mit $\cos \varepsilon$ proportional ist, wie es nach Lambert sein sollte, sondern dass sie mit wachsendem ε schneller als $\cos \varepsilon$ abnimmt. Die folgende Tabelle enthält Bouguers Ergebnisse und zur Vergleichung auch die Werthe von $\cos \varepsilon$, sowie auch die von $\cos^2 \varepsilon = \cos \varepsilon \cdot \cos \alpha$.

Ein- und Ausfallswinkel $\varepsilon = \alpha$	Beobachtete verhältnissmässige Helligkeit von			1000 $\cos \varepsilon$	1000 $\cos^2 \varepsilon$
	mattem Silber	Gyps	holländischem Papier		
0°	1000	1000	1000	1000	1000
15	802	762	971	966	933
30	640	640	743	866	750
45	455	529	507	707	500
60	319	352	332	500	250
75	209	194	203	259	67

Bei Abbildungen wird das Lambertsche Gesetz, obgleich es nicht genau ist, doch fast ausschliesslich und mit guter Wirkung angewendet. Nach ihm ist also die Helligkeit proportional mit $\cos \varepsilon$. Ausserdem wurde aber vorgeschlagen, die Helligkeit proportional mit $\cos \varepsilon \cdot \cos \alpha$, und andererseits, sie proportional mit $\cos \varepsilon : \cos \alpha$ zu setzen. Die Linien einer krummen Fläche, entlang welcher $\cos \varepsilon$ oder die Stärke der Beleuchtung unveränderlich ist, heissen die Lichtgleichen oder Isophoten, und die Linien, entlang welcher $\cos \varepsilon \cdot \cos \alpha$ unveränderlich ist, hat Burmester* Isophengen, das wäre Hellegleichen, genannt. Sie wurden zuerst für eine Kugel konstruirt von Schülern Monges**, dann für viele Flächen von Burmester. Diese Annahme von $\cos \varepsilon \cdot \cos \alpha$ ist aber jedenfalls unrichtig; denn nach ihr wäre für $\alpha = 90^\circ$, oder für Stellen, wo die Sehstrahlen die Fläche berühren, d. i. für den Umriss, die Helligkeit gleich Null, was dem nächstliegenden Augenscheine widerspricht. — Die Annahme $\cos \varepsilon : \cos \alpha$ wurde von Brisson*** vorgeschlagen. Nach ihr müsste der Umriss am

* Burmester, Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmässig gestalteter Flächen, 1871, S. 259.

** Mémoire sur la détermination géométrique des teintes dans les dessins. Journ. de l'école polyt., cah. 1, Paris an III (1797).

*** Zusatz von Brisson zu einem Vortrage von Monge, worin dieser die Beleuchtungsstärke mit $\cos \varepsilon$ proportional setzt, enthalten in der 5. Auflage von Monge, géométrie descriptive (1827), veranstaltet von Brisson.

hellsten erscheinen und wirklich beruft sich Brisson darauf, dass der Umriss des Vollmondes am hellsten erscheint, obgleich an ihm auch zugleich die Licht- und Schattengrenze liegt, also die Beleuchtungsstärke am geringsten ist. Allein Bouguer und Zöllner erklären diese Erscheinung in naheliegender Weise durch die starken Unebenheiten der Mondoberfläche; und wirklich zeigt auch ein Körper mit glatter aber matter Oberfläche durchaus nicht einen helleren Umriss, wie auch die folgenden Versuche bestätigen besonders aber nicht, wenn der Umriss zugleich die Licht- und Schattengrenze bildet.

Neuerdings hat auch Herr Seeliger* Versuche veröffentlicht, nach denen das Lambertsche Gesetz für beleuchtete matte Oberflächen nicht richtig ist.

Sodann hat Herr Lommel** theoretische Untersuchungen über die Lichtzerstreuung angestellt, wobei er nach dem Vorgange Fouriers von der Anschauung ausgeht, dass diese Zerstreuung nicht von der Oberfläche, sondern von Raumtheilen der Körpermasse hervorgebracht wird, wie auch die Färbung des zerstreuten Lichtes es fordert. Für undurchsichtige feste glühende Körper kommt er dann zu dem Cosinusetz; denn die Länge des im Innern des Körpers von einem Lichtstrahle bis zu seiner vollen Absorption zurückgelegten Weges ist nur von dem Absorptionsvermögen, nicht aber von dem Ausfallwinkel α abhängig, so dass die senkrechte Tiefe dieser lichtzerstreuenden Schicht und damit die Menge des zerstreuten Lichtes mit $\cos \alpha$ proportional sein muss. Dies Ergebniss wurde von Herrn Möller*** durch Beobachtungen an glühenden Metallplatten bestätigt. Herr Lommel bestimmt auf dieser Grundlage die Stärke des Fluorescenzlichtes, wobei er ausserdem dem einfallenden Strahle den entsprechenden Einfluss auf die Endformel zuschreibt. In einer späteren Abhandlung† hat Herr Lommel die Helligkeit zerstreut reflectirender Stoffe untersucht und dabei die allmähliche Absorption des in das Innere bis zu einer gewissen Tiefe eindringenden Lichtes und die Wiederausstrahlung desselben verfolgt. Er kommt dabei †† zu einer Formel für die Stärke des zurückgeworfenen Lichtes, welche ausser von dem Absorptions- und Diffusionsvermögen der Substanz und von der Dicke der diffundirenden Schicht, — welche Dicke aber nur einen Einfluss ausübt, so lange die Schicht ganz dünn ist, — nur von dem Ein- und Ausfallwinkel (ϵ und α) abhängt, und in Bezug auf diese Winkel symmetrisch ist, so dass die Menge des von einem Flächenelemente zurückgeworfenen Lichtes sich nicht ändert, wenn man den einfallenden und den ausfallenden Strahl mit einander vertauscht.

* Seeliger, über das Lambertsche Gesetz der Photometrie. Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft Jahrgang 20, 1885, S. 267.

** Lommel, über Fluorescenz. Wied. Ann. d. Phys. u. Chem. Neue Folge, Bd. 10, 1880, S. 449.

*** Möller, experimentelle Untersuchung des Lichtemanationsgesetzes glühender Körper. Wied. Ann. d. Phys. u. Chem., Bd. 24, 1885, S. 266.

† Lommel, die Photometrie der diffusen Zurückwerfung. Wied. Ann. d. Phys. u. Chem. Neue Folge Bd. 36, 1889, S. 473.

†† S. 488 und 489.

Diese Ergebnisse sind unter der stillschweigenden Voraussetzung gewonnen, dass eine Spiegelung durchaus nicht stattfindet, dass also die Oberfläche vollkommen matt oder rauh ist. Und für diese werden sie auch durch ausgedehnte Beobachtungen des Herrn Ångström* bestätigt, welche derselbe in dem physikalischen Institute in Strassburg über die Zerstreung strahlender Wärme machte. Er stellte durch Berussung mit verschiedenartigen Stoffen oder durch Absetzen aus einer Suspension vollkommen matte oder rauhe Oberflächen her, welche selbst bei grossem Einfallswinkel keine Spiegelung erkennen liessen, und fand bei ihnen jene Sätze mit guter Annäherung bestätigt. Andere Stoffe, wie Papier und gegossener Gyps liessen dagegen eine vermehrte Zurückwerfung in der Richtung der Spiegelung erkennen.

Ueber derartige nicht vollkommen matte Körperoberflächen, die man als matte und glatte bezeichnen kann, erstreckt sich das Gültigkeitsbereich der Lommelschen Formel nicht. Bei solchen Flächen hat vielmehr noch die Neigung ν der Einfallsebene gegen die Ausfallsebene einen wesentlichen Einfluss. Denkt man sich unter diesen Ebenen nicht je eine unbegrenzte Ebene, sondern nur den rechten Winkel, dessen einer Schenkel die Normale des fraglichen Flächenelementes ist, dessen anderer Schenkel daher in diesem erweiterten Elemente liegt, und welcher rechte Winkel den einfallenden, beziehungsweise den ausfallenden Strahl in sich einschliesst, so bilden die Einfallsebene und Ausfallsebene einen Winkel ν , der zwischen 0 und 180° schwankt und das Azimuth beider Strahlen heissen mag. Dieses Azimuth ist nach Lommels Formel ohne Einfluss; es muss nach ihr bei bestimmt gegebenem Einfallswinkel dieselbe Helligkeit herrschen in allen Richtungen desselben Ausfallswinkels, welche Richtungen einen Umdrehungskegel bilden. Dies gilt nach Ångström nahezu für Wärmestrahlung durch rauhe, nicht aber bei nur matten Flächen, wie bei gegossenem Gyps und Briefpapier. In Uebereinstimmung mit dem letzteren ist nach meinen Versuchen mit gegossenem Gyps unter den Richtungen jenes Kegels die Helligkeit am grössten bei dem Strahle, welcher dem gespiegelten am nächsten liegt ($\nu = 180^\circ$), und am kleinsten bei demjenigen, welcher dem einfallenden am nächsten liegt ($\nu = 0^\circ$). So ergab sich für $\epsilon = 75^\circ$ und $\alpha = 75^\circ$ die Helligkeit $H = 2,04$ für $\nu = 180^\circ$, und $H = 0,22$ für $\nu = 0^\circ$, wenn die Helligkeit bei senkrechter Bestrahlung und senkrechtem Beschauen ($\epsilon = \alpha = 0^\circ$) als Einheit angenommen wird. Während ferner bei Ångströms Versuchen an rauhen Oberflächen sich die ausgestrahlte Wärmemenge nur wenig änderte, wenn ϵ und α mit einander vertauscht wurden, fand ich bei Gyps eine starke Aenderung der Helligkeit bei dieser Vertauschung. So ergab sich bei $\nu = 180^\circ$, wenn also der einfallende und der ausfallende Strahl auf entgegengesetzten Seiten der Flächennormale lagen, für $\epsilon = 15^\circ$ und $\alpha = 75^\circ$, $H = 0,83$, dagegen für $\epsilon = 75^\circ$, $\alpha = 15^\circ$, $H = 0,22$;

* Ångström, über die Diffusion der strahlenden Wärme von ebenen Flächen. Wied. Annal. d. Phys. u. Chem., Neue Folge Bd. 26, 1885, S. 253.

und für $\epsilon = 0^\circ$ und $\alpha = 75^\circ$, $H = 0,76$, dagegen für $\epsilon = 75^\circ$ und $\alpha = 0^\circ$, $H = 0,24$. Ein kleiner Einfallswinkel und ein grosser Ausfallswinkel brachte also eine grössere Helligkeit hervor, als ein grosser Einfallswinkel und ein kleiner Ausfallswinkel. An der Grenze war bei streifender Bestrahlung ($\epsilon = 90^\circ$) und senkrechtem Beschauen ($\alpha = 0^\circ$) natürlich $H = 0$, aber bei streifendem Beschauen ($\alpha = 90^\circ$) und senkrechter Bestrahlung ($\epsilon = 0^\circ$) herrschte noch die beträchtliche Helligkeit $H = 0,59$. Die beiden auf Messung beruhenden Kurven der späteren Figur 2 müssten gleich sein, wenn ϵ und α vertauschbar wären; sie sind aber sehr verschieden.

Zur Erklärung der Strahlenzerstreuung durch matte Körperoberflächen dienten zwei Anschauungen. Die eine ist die erwähnte des Eindringens der Erschütterung durch den Strahl bis zu einer gewissen Tiefe, und des Ausstrahlens dieser Erschütterung aus der durchdrungenen Körperschicht nach allen Richtungen. Diese Anschauung ist gestützt durch die Farbe, welche die matten Körperoberflächen besitzen, sowie durch mannichfache Versuche, so auch durch die von Ångström* nach welchen die Diffusion mit der Dicke der auf eine zuvor berusste Fläche aufgelegten rauhen Schicht bis zu einer gewissen Grenze zunimmt; so war sie z. B. bei Magnesiumoxyd bei einer Dicke von 0,26 mm unter sonst gleichen Umständen etwa doppelt so gross als bei einer Dicke von nur 0,05 mm.

Auf eine andere Anschauung stützte Bouguer* eine ausgebildete Theorie der Lichtzerstreuung. Er dachte sich die matte Körperoberfläche durch eine grosse Anzahl kleiner ebener spiegelnder Flächenelemente gebildet, die nach allen Richtungen gelagert sind. Die Gesamtgrösse dieser Flächen von einer gewissen Richtung ist am grössten in der Richtung der Gesamtoberfläche und nimmt ab bei zunehmendem Winkel gegen dieselbe, so dass eine vorherrschende Spiegelung in dem Sinne der Wirkung der Gesamtoberfläche eintritt. Um die Grösse der Flächenelemente in den verschiedenen Richtungen zu bestimmen, hat Bouguer für verschiedene Körper die Helligkeiten gemessen, welche bei (nahezu) übereinstimmender Bestrahlungs- und Sehrichtung ($r = 0^\circ$, $\epsilon = \alpha$) stattfindet. Indem dann, entsprechend seiner Annahme, nur die auf dieser Richtung senkrechten Flächenelemente, und zwar stets unter demselben Ein- und Ausfallswinkel von 0° zur Wirkung kommen, ist mit der hervorgebrachten Helligkeit H die Gesamtgrösse der so gelagerten Flächenelemente proportional, und zwar derjenigen, welche in einem so grossen Theile der Gesamtfläche enthalten sind, dass er eine gewisse unveränderliche Bildgrösse auf der Netzhaut erzeugt. Soll diese gewisse, aber willkürliche Bildgrösse durch die an der Stelle des betrachteten Flächenelementes befindliche, auf dem Sehstrahl senkrechte Flächeneinheit hervorgebracht werden, so wird sie durch den Theil $1:\cos \epsilon$ der betrachteten Fläche hervorgebracht, da der Sehstrahl

* A. a. O. S. 278. S. auch Quincke, über die optischen Eigenschaften der Metalle. Pogg. Ann. d. Ph. u. Ch., Bd. 29, 1863, S. 368.

** Traité d'optique, S. 161 ff.

mit ihr den Winkel $\alpha = \epsilon$ bildet. Auf die Flächeneinheit der betrachteten Fläche geht demnach eine mit $H: (1 : \cos \epsilon) = H \cos \epsilon$ proportionale Menge jener auf dem Sehstrahle senkrechten Elemente. Diese Grössen $H \cos \epsilon$ dienen daher als Mass der Gesamtgrösse der auf der Flächeneinheit der betrachteten Fläche befindlichen Elemente von einer gewissen Stellung, die unter dem Winkel ϵ gegen die Gesamtmfläche geneigt ist. Bouguer trägt nun diese Grössen in der Einfallsebene auf den Linien der zurückgeworfenen Strahlen auf und erhält dadurch eine Kurve, welche er die Zählkurve der Rauigkeiten (*numératrice des aspérités*) nennt. Dieselbe hat eine angenähert elliptische Gestalt, mit der Flächennormale als grossen Axe. Mittelst dieser Kurve löst er rein geometrisch eine Anzahl von Aufgaben, wie z. B. eine solche über die Sehrichtung der grössten Helligkeit bei einem gegebenen einfallenden Strahle, und geht dabei von der Annahme aus, dass bei gegebenem einfallendem und ausfallendem Strahle nur die auf der Halbirungslinie des Winkels dieser beiden Strahlen senkrechten Flächenelemente (spiegelnd) wirken, dass also der einfallende und der ausfallende Strahl ohne Aenderung der Helligkeit vertauscht werden dürfen. Dass bei glatten und matten Körperoberflächen diese Vertauschbarkeit in Wirklichkeit nicht besteht, wie vorhin mitgeteilt wurde, zeigt, dass für sie die Theorie der einfachen Spiegelung nicht genügt, wie auch die des Eindringens der Strahlen nicht genügt. Da aber solche Flächen bei grösseren Einfallswinkeln eine deutliche Spiegelung zeigen, so müssen spiegelnde Flächenelemente vorhanden sein. Die angeführte Beobachtung, wonach die Helligkeit grösser ist bei kleinem Einfalls- und grossem Ausfallswinkel, als im umgekehrten Falle, erklärt sich aber leicht durch gegenseitige Beeinflussung der Rauigkeiten, insbesondere dadurch, dass im ersten Falle, also bei steilerem Auftreffen, die Strahlen in die Vertiefungen der Rauigkeiten eindringen und durch mehrfache Zurückwerfung nach allen Richtungen zerstreut werden, dass dagegen im zweiten Falle die Vertiefungen zum Theil im Schatten liegen. Indem ferner Bouguer die Menge des zurückgeworfenen Lichtes nur von der Richtung der Halbirungslinie des Winkels des ein- und des ausfallenden Strahles, nicht aber von der Grösse dieses Winkels abhängig sein lässt, vernachlässigt er die Thatsache, dass bei grossem Einfallswinkel die Spiegelung viel stärker ist, als bei kleinem, obgleich er sie an anderer Stelle bei reinen Spiegeln messend nachweist. Seine beschränkten Versuche bei matten Flächen führten ihn nicht auf die Widersprüche seiner Theorie mit der Wirklichkeit, da er nur bei ineinanderliegenden ein- und ausfallendem Strahle beobachtete.

Wir kommen also zu dem Ergebnisse, dass bei matten Körperoberflächen sowohl ein Eindringen der Lichtstrahlen, als eine zerstreue Spiegelung an kleinen Flächenelementen stattfindet. Diese Umstände sind aber bei dem wechselnden Grade der Rauigkeit und bei den wechselnden Gestalten der Erhöhungen so mannichfach, dass in jedem einzelnen Falle nur Beobachtungen Aufschluss über die Verhältnisse liefern.

So mögen im Folgenden die Beobachtungen mitgeteilt werden, welche ich im Jahre 1883 unter Beihülfe meines Sohnes Otto an gegossenem Gyps ausgeführt habe, sowie die Helligkeitsflächen, welche sich aus diesen Beobachtungen ergaben.

Dem sollen noch Beobachtungen aus jener Zeit angeschlossen werden über die Stärke oder Grösse der Helligkeitsempfindung und ihre Messung durch eine Empfindungseinheit. Während von mancher, insbesondere philosophischer Seite die Möglichkeit der Messung der Empfindungsstärke in Abrede gestellt und behauptet wird, dass von zwei Empfindungen nur angegeben werden könne, ob sie gleich seien, oder ob die eine stärker als die andere sei, stellt Fechner* eine Massformel für die Grösse der Empfindung auf. Und auf seinem Standpunkte stehe auch ich; er hatte sich mir schon früher aufgedrängt, ehe ich Fechners Arbeiten kannte. Während nun Fechner es in der Regel vermeidet, eine bestimmte Empfindungseinheit anzugeben, möchte ich mich gerade einer solchen bedienen, nämlich der auf die Unterscheidbarkeit gegründeten. Fechner gibt dieses Mass als das nächstliegende an, dieses Mass bildet das Wesen seiner Unterschiedsmassformel**, und er zeigt deren Anwendung bei dem Schätzen der Sterngrössen***; es tritt aber, wie mir scheint, bei ihm das Wesen dieser Messungsweise nicht mit der Einfachheit hervor, die sie in sich birgt.

Die Lichtzerstreuung durch gegossenen Gyps.

Ich liess mir zwei gleiche quadratische Platten aus feinstem weissem Gyps von 25 cm Seite giessen, und beleuchtete sie im sonst dunklen Zimmer mit je einer Stearinkerze von 6 auf das Pfund, deren Flammen ich durch Biegen des Doctes in das Innere der Flamme vergrössern konnte, und die ich auf möglichst gleichen Flammhöhen hielt. Als Einheit der Helligkeit nahm ich die Helligkeit an, unter welcher eine solche Gypsplatte erschien bei senkrechter Beleuchtung durch ein Licht im Abstände von 1 Meter und bei senkrechtem Beschauen ($\epsilon = \alpha = 0^\circ$). Die Bestrahlungs- und Sehrichtung konnten in Wirklichkeit nicht ganz zusammenfallen; aber da die Helligkeit bei kleinen Abweichungen des Einfallswinkels ϵ und α von 0° sich nur wenig ändert, konnten beide Winkel gleich und als 0° angenommen werden. Der Abstand des beschauenden Auges von der Platte ist ohne Einfluss auf die Helligkeit. Das Licht wurde durch einen Schirm vom Auge abgeblendet. Änderte man den Abstand des Lichtes von der einen Gypsplatte, die wir als die erste (I) bezeichnen wollen, von 1 m zu a m, so wurde, stets bei $\epsilon = \alpha = 0^\circ$, die Helligkeit $= 1 : a^2$, und diese diente als Mass der Helligkeit für die zweite Gypsplatte (II). Diese wurde so aufgestellt, dass

* Fechner, Elemente der Psychophysik, 1860; 2. unveränd. Aufl. 1889. Bd. 2, S. 12.

** A. a. O., Bd. 2, S. 96 ff.

*** S. 107 ff.

ihr Rand und derjenige von I sich für das Auge deckten, und dass sie vom Auge unter dem Ausfallswinkel α betrachtet wurde; sie wurde dann von einem zweiten Lichte im Abstände von b m unter dem Einfallswinkel ϵ beleuchtet, derart, dass das Azimuth (der Winkel der Ein- und der Ausfallsebene) ν war. Die beiden Lichte wurden durch Schirme so abgeblendet, dass jedes nur eine der Platten beleuchtete und dass keines das Auge bestrahlte. Dann wurde die Platte I so lange verschoben, bis die beiden Platten an ihren scheinbar zusammenfallenden Grenzen gleich hell erschienen, also ihre Bilder verschmolzen, und es wurde die Beurtheilung erleichtert durch eine vor das Auge gehaltene Blende mit einer Oeffnung, durch welche man nur kleinere, nahezu gleich gross erscheinende Theile beider Platten erblickte. Indem man dann den Abstand der Platte I von dem Lichte mass und $= a$ fand, war die Helligkeit beider Platten $= 1 : a^2$, und die Helligkeit H der II würde bei einem Lichtabstande $= 1$ m gleich $H = b^2 : a^2$ sein. Dies ist aber die gewünschte Grösse, nämlich die Helligkeit, in welcher die Platte II bei dem Einfallswinkel ϵ , dem Ausfallswinkel α und dem Azimuth ν , beleuchtet durch ein Licht im Abstände von 1 m, erscheint.

Um diese letzteren drei Winkel zu messen, oder vielmehr bestimmte Grössen derselben herzustellen, schnitt ich aus Karton eine Kreisscheibe von etwa 18 cm Halbmesser aus, schnitt dieselbe nach der einen Hälfte eines Durchmessers ganz, nach der andern halb durch, und ebenfalls halb nach einem auf jenem Durchmesser senkrechten Halbmesser, so dass man durch Umbiegen eine körperliche Ecke herstellen konnte

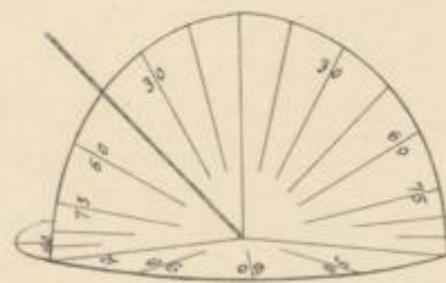


Fig. 1.

(Fig. 1), von welcher zwei Seiten und zwei Winkel rechte waren, die dritte Seite und der dritte Winkel aber, die einander gleich waren, sich von 0 bis 180° verändern konnten. Indem ich nun diese veränderliche Seite auf die Gypsplatte auflegte, bildete die nicht in ihr liegende Kante die Flächennormale, die durch sie begrenzten rechtwinkligen Seiten wurden als Ein- und Ausfallsebene benutzt, und die dritte veränderliche Seite gab ihr Azimuth an. Indem die Azimuthwinkel von 30 zu 30° , die Ein- und Ausfallswinkel von 15 zu 15° getheilt waren und ausserdem 82° , und 86° anzeigten, und indem eine im Scheitel befestigte Schnur in jenen Ebenen nach dem Auge und nach dem Lichte geführt wurde, gab sie den Aus- und den Einfallswinkel, der Grundhalbkreis aber das Azimuth an. Der bewegliche rechte Winkel wurde zeitweilig durch angeklebte Papierstreifen auf ein bestimmtes Azimuth fest eingestellt, für welches dann nacheinander alle Messungen vorgenommen wurden.

Auf diese Weise wurde innerhalb der angegebenen Werthe von ν, α, ϵ die Helligkeiten gemessen, dabei für dieselben Winkel meist 2, manchmal mehr, selten nur eine Einstellung vorgenommen. Es ergab sich dabei z. B. bei $\nu = 30^\circ, \epsilon = 30^\circ, \alpha = 75^\circ$ für die Platte II der Abstand des Lichtes von ihr $b = 1,225$ m; dann wurde die Platte I

(bei senkrechtem Bestrahlen und Beschauen) so lange verschoben, bis ihr Bild mit dem von II verschmolz, worauf die Messung den Abstand ihres Lichtes von ihr $a = 1,465$ m ergab. Die Helligkeit von II wäre dann bei dem Lichtabstande $= 1$ m selbst $H = (1,225 : 1,465)^2 = 0,701$ gewesen. Eine zweite Einstellung lieferte $a = 1,225$ m, $b = 1,405$ m, daher $H = 0,762$.

Um ein Mass für die erlangte Genauigkeit zu erhalten, stellte ich die zwei Gypsplatten nebeneinander, und setzte sie an der Grenzkante der senkrechten Beleuchtung durch dasselbe Licht aus. Ich liess nun die eine verschieben, bis die Bilder beider verschmolzen, mass die Abstände der beweglichen und fand dieselben schwankend zwischen den äussersten Grenzen $0,746$ und $0,774$ m, ihre Helligkeit also zwischen $(1 : 0,746)^2$ und $(1 : 0,774)^2$, d. h. zwischen $1,797$ und $1,666$, also um $0,131$. Die verhältnissmässige grösste Schwankung war daher $0,131 : 1,738 = 0,075$, wobei $1,738$ die mittlere Helligkeit war; die grösste Abweichung vom Mittel war aber $0,072$ und die verhältnissmässige $= 0,072 : 1,738 = 0,0406$; der mittlere verhältnissmässige Fehler betrug $0,0196$. Grösser war die Unsicherheit bei Anwendung von zwei Lichtern, deren Verschiedenheit dann mitwirkte; die Abweichung zweier Messungen von einander konnte dann bis auf $0,1$ der Helligkeit steigen, in ganz seltenen Fällen noch höher. Wenn dem gegenüber schon Helligkeitsunterschiede von $0,01$ und kleiner beobachtet werden konnten, nämlich bei einem schwachgrauen Ringe auf weissem Grunde, der auf einer sich rasch drehenden weissen Scheibe durch einen schwarzen Strich hervorgebracht wurde, so ist zu beachten, dass hierbei nur eine Lichtquelle zur Wirkung kommt, und dass für eine solche Figur eines beiderseits in Weiss eingeschlossenen Ringes das Auge besonders empfindlich ist.

Bei den angegebenen nicht grossen Genauigkeiten der Messung musste die Ausgleichung um so sorgfältiger vorgenommen werden. Dies geschah nach dem Gesetze der Stetigkeit in geometrischer Weise. Man kann nämlich nach dem Vorgange Bourguers Helligkeitsflächen bilden, und zwar in verschiedener Weise. Trägt man für einen bestimmten einfallenden Strahl, also bei unveränderlichem ϵ , auf jedem von dem selben Punkte F der Fläche ausgehenden ausfallenden Strahle die Helligkeit H auf, unter welcher die Fläche in ihm erscheint, so bilden die Endpunkte dieser Strecken H eine Fläche, die Helligkeitsfläche. Nach dem Lambertschen Gesetze wäre diese Helligkeit unveränderlich $= \cos \epsilon$, also die Helligkeitsfläche eine Halbkugel von diesem Halbmesser. Trägt man dagegen auf jenen Strahlen die von demselben Flächenelemente, das wir als Flächeneinheit annehmen, ausgestrahlten Lichtmengen auf, welche $= H \cos \epsilon$ sind, so würde man eine andere Fläche, die der ausgestrahlten Lichtmengen erhalten, und diese wäre nach dem Lambertschen Gesetze wieder eine Kugel, welche aber die Fläche in F berührte, und den Halbmesser jener Helligkeitshalbkugel zum Durchmesser hätte. Endlich kann man von F aus einen festen ausfallenden Strahl ziehen, dem also ein unveränderliches α zukommt, und auf jedem nach F

gezogenen einfallenden Strahle bei unveränderlicher Stärke desselben, die Helligkeit auftragen, unter welcher durch seine Wirkung in jener festen Richtung die Fläche erscheint. Man könnte diese die Beleuchtungsfläche nennen, weil sie für jede Beleuchtungsrichtung die Helligkeit für eine gewisse Sehrichtung angibt. Sie unterscheidet sich von der Helligkeitsfläche dadurch, dass sie die beleuchtete Platte in F berührt, während die Helligkeitsfläche sie nach einer ausgedehnten Kurve schneidet, weil für streifende Lichtstrahlen die Helligkeit Null wird, für streifende Sehstrahlen aber endlich bleibt. Nach dem Lambertschen Gesetze wäre auf jedem einfallenden Strahle die Helligkeit $\cos \epsilon$ aufzutragen, die Fläche würde also eine berührende Kugel vom Durchmesser Eins sein; sie wäre unabhängig von α , oder für jede Lage des ausfallenden Strahles dieselbe. Wollte man endlich noch bei festem ausfallendem Strahle auf jedem einfallenden Strahle die von dem unveränderlichen Flächenelemente ausgestrahlte Lichtmenge auftragen, so müsste man die vorher gefundenen Helligkeiten noch mit $\cos \alpha$ multipliciren. Nach dem Lambertschen Gesetze erhielte man dann eine berührende Kugel vom Durchmesser $\cos \alpha$. Wir werden in der Folge nur die Helligkeiten, nicht aber die von der Flächeneinheit ausgestrahlten Lichtmengen ins Auge fassen, so dass nur die Helligkeits- und die Beleuchtungsflächen in Betracht kommen.

Diese Flächen sind nun stetige, und mittelst ihrer Stetigkeit kann man die mit den Beobachtungsfehlern behafteten Messungsergebnisse verbessern. Bei den Helligkeitsflächen ist ϵ unveränderlich; und legt man eine schneidende Ebene durch die Flächennormale, so erhält man eine Schnittkurve, für deren beide Hälften die Azimuthe ν und $180^\circ - \nu$ mit übereinstimmendem, unveränderlichem ν gelten, in welcher sich H nur mit α ändert. Eine solche Kurve soll Meridiankurve heissen. Legt man dagegen einen schneidenden Umdrehungskegel mit F als Spitze und der Flächennormale als Umdrehungsaxe, also mit unveränderlichem α , so ändert sich H mit ν . Diese Kurve heisse die Kegelkurve. Entsprechend liefert die Beleuchtungsfläche Meridian- und Kegelkurven.

Da H von den 3 unabhängig Veränderlichen ϵ , α , ν abhängt, so erhält man jene Kurven, indem man zwei dieser letzteren Grössen unveränderlich lässt; dann ist H nur noch von der letzten der drei abhängig. Da ϵ , α , ν Winkel, H ein Strahl, so ist jede der Kurven durch Polarkoordinaten gegeben. Trägt man auf den Strahlen die durch Messung erhaltenen H auf, so wird die durch deren zweite Endpunkte gelegte Kurve wegen der Messungsfehler nicht stetig sein, und es muss dann eine sich den Beobachtungspunkten möglichst anschliessende stetige Kurve gezeichnet werden. Nun erhält man aber dreierlei Kurven:

- 1) wenn ϵ , ν unveränderlich, die Meridiankurve αH ,
- 2) wenn α , ν unveränderlich, die Meridiankurve ϵH ,
- 3) wenn ϵ , α unveränderlich, die Kegelkurve νH .

Die letztere Kurve befindet sich auf einem Umdrehungskegel und nimmt zweierlei Gestalten an, indem entweder das unveränderliche ϵ einen festen einfallenden Strahl bezeichnet, daher die Kurve auf dem Kegel $a r$ liegt, oder indem a einen festen ausfallenden Strahl bezeichnet, und daher die Kurve auf dem Kegel ϵr liegt. Die bestimmenden Elemente r, H sind aber beidesmal dieselben. Man erhält daher wesentlich doch nur dreierlei Kurven, die beiden Meridiankurven $a H$ und ϵH und die Kegelkurve $r H$. Wenn man eine dieser Kurven, z. B. die einem bestimmten ϵ und r zugehörige $a H$ stetig an die Beobachtungspunkte angeschmiegt hat, so ist für jeden Strahl dieser Kurve ein System von 4 zusammengehörigen Werthen ϵ, a, r, H festgesetzt. Die Kurven ϵH und $r H$ enthalten aber den Werth von H für denselben Strahl, und müssen für ihn denselben Werth von H liefern. Dadurch entsteht die schwierige Aufgabe, drei Gruppen von Kurven $a H, \epsilon H, r H$ zu zeichnen, welche sich den Beobachtungspunkten möglichst anschliessen, stetig sind, und in denen die drei zu denselben a, ϵ, r gehörigen H dieselben sind. Die Anzahl der Kurven hängt von den gewählten Intervallen ab. Für die Messung wählte ich meist solche von 30° , für die Zeichnung auch kleinere, nämlich für ϵ und a die Winkel $0, 15, 30, 45, 60, 75, 82\frac{1}{2}, 86\frac{1}{4}, 90^\circ$, — wobei der letztere Winkel als Grenzwinkel galt, welcher nur durch stetige Verlängerung erreicht wurde, — für r die Winkel $0, 30, 60, 90, 120, 150, 180^\circ$. Ich verzeichnete 41 solcher Kurven mit ihren Polarkoordinaten, also wirkliche Meridiankurven, und die Kegelkurven in der Abwicklung der Kegel. Ich fand aber, dass dabei die Empfindlichkeit des Blickes für Stetigkeit nicht so gross war, als zu wünschen, und ging daher zu rechtwinkligen Koordinaten über. Ein unveränderliches H liefert bei Polarkoordinaten einen Kreis, bei rechtwinkligen eine gerade Linie. Die Abweichungen von einer Geraden können feiner empfunden werden, als die von einem Kreise, und auch bei anderen Kurven die Stetigkeit mittelst rechtwinkliger Koordinaten feiner, als mittelst Polarkoordinaten.

Um eine Vorstellung der letzteren Kurven zu geben, habe ich neben einige abgebildet. Figur 2 gibt die beiden wichtigsten, die für $\epsilon = 0^\circ$, also für den normal einfallenden Strahl, für welchen die Helligkeitsfläche eine Umdrehungsfläche, daher r ohne Einfluss ist, und die für $a = 0^\circ$, also für den normal ausfallenden Strahl, für welchen die Beleuchtungsfläche ebenfalls eine Umdrehungsfläche und r ohne Einfluss ist. Figur 3 gibt die Reihe der Kurven ϵH

für $a = 75^\circ$ und für r der Reihe nach $= 0$ und $180, 30$ und $150, 60$ und $120, 90^\circ$. Die Ordinaten H sind für die angegebenen Werthe der ϵ verzeichnet, und es sind die gemessenen Werthe von H durch kleine Querstriche angedeutet. Man erhält dadurch eine Vorstellung von dem Grade der Genauigkeit. Dabei zeigt sich, dass die

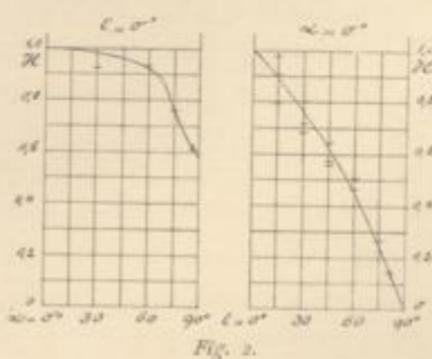


Fig. 2.

Beobachtungen für $\alpha = 75^\circ$, $\nu = 90^\circ$, $\epsilon = 30^\circ$ stark von der verzeichneten Kurve abweichen, so dass diese Beobachtung unbrauchbar wird; vielleicht waren hierbei die Lichte zu sehr ungleich geworden. Bei $\nu = 180^\circ$ tritt die hervorragende Wirkung der Spiegelung hervor; die Kurve konnte an dieser Stelle theilweise nur mit halben

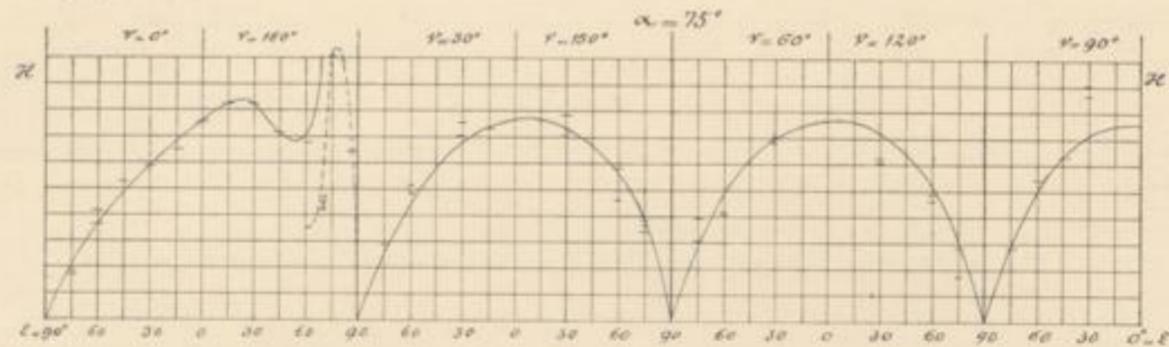


Fig. 3.

Ordinaten angegeben werden. Solcher Reihen wurden 23 verzeichnet. Auch diese Kurven mussten, wie die für die Polarkoordinaten, so gezogen werden, dass sie sich den Beobachtungspunkten möglichst anschlossen, dass sie stetig waren und dass jede Ordinate H , die in jeder der 3 Gruppen vorkommt, also im allgemeinen und wenigstens dreimal, jedesmal denselben Werth erhält. Dadurch wird auch der Uebergang der benachbarten Kurven ineinander stetig.

Nach diesen ausgeglichenen Kurven sind nun die folgenden Tabellen für die Werthe von H gebildet, und zwar jede einzelne für ein unveränderliches ϵ , dagegen für wechselnde α und ν , welche Winkel die Eingänge bilden. Jede Tabelle dient also unmittelbar zur Konstruktion einer der Helligkeitsflächen. Die Werthe von $\cos \epsilon$, welche die Werthe von H nach dem Lambert'schen Gesetze bilden, sind beigefügt, so dass man die Abweichung von diesem Gesetze unmittelbar erkennen kann. Es ist noch die Tabelle für $\epsilon = 54^\circ 44'$ zugefügt, weil dies der Einfallswinkel gegen die Grundriss- und die Aufrissebene der technischen Zeichnungen ist, wenn man, wie hier gebräuchlich, die Projektionen des Lichtstrahls unter 45° gegen die Projektionsaxe geneigt annimmt.

Tabelle der Helligkeiten H für die Einfallswinkel ϵ , die Ausfallswinkel α und die Azimuthe ν .

α	$\epsilon = 0^\circ$
0°	1,00
15	0,99
30	98
45	96
60	93
75	76
$82\frac{1}{2}$	65
$86\frac{1}{4}$	62
90	59

$\varepsilon = 15^\circ$ $\cos \varepsilon = 0,97$

α	$\nu = 0^\circ$	30	60	90	120	150	180
0°	0,90	90	90	90	90	90	90
15	91	91	91	91	91	91	91
30	93	93	93	93	93	93	93
45	94	93	92	92	92	93	94
60	91	90	88	89	90	91	92
75	68	74	75	76	76	77	83
$82\frac{1}{2}$	62	63	63	63	63	65	68
$86\frac{1}{4}$	59	60	61	61	61	62	64
90	56	57	58	59	59	60	60

$\varepsilon = 30^\circ$ $\cos \varepsilon = 0,87$

α	$\nu = 0^\circ$	30	60	90	120	150	180
0°	0,76	76	76	76	76	76	76
15	77	77	77	77	77	76	76
30	80	80	79	79	79	78	78
45	82	82	81	80	81	83	86
60	78	78	78	78	79	86	91
75	60	68	71	72	72	74	83
$82\frac{1}{2}$	53	61	64	64	65	67	73
$86\frac{1}{4}$	50	57	61	62	62	64	69
90	48	53	58	58	58	60	64

$\varepsilon = 45^\circ$ $\cos \varepsilon = 0,71$

α	$\nu = 0^\circ$	30	60	90	120	150	180
0°	0,62	62	62	62	62	62	62
15	62	62	62	62	62	61	60
30	63	63	63	63	62	62	62
45	63	63	63	63	63	66	87
60	60	63	64	65	66	74	94
75	50	58	62	63	64	67	72
$82\frac{1}{2}$	44	53	59	60	61	65	69
$86\frac{1}{4}$	42	49	57	58	59	64	68
90	40	46	55	56	58	62	67

$\varepsilon = 54^\circ 44'$ $\cos \varepsilon = 0,58$

α	$\nu = 0^\circ$	30	60	90	120	150	180
0°	0,52	52	52	52	52	52	52
15	51	51	51	51	50	50	49
30	51	51	51	50	50	49	49
45	50	51	52	52	52	54	65
60	48	51	54	54	55	62	97
75	42	48	53	54	56	61	71
$82\frac{1}{2}$	37	45	52	53	56	61	67
$86\frac{1}{4}$	34	42	51	52	55	61	66
90	32	38	50	51	55	61	65

$\varepsilon = 60^\circ$ $\cos \varepsilon = 0,50$

α	$\nu = 0^\circ$	30	60	90	120	150	180
0°	0,47	47	47	47	47	47	47
15	46	46	46	46	45	44	43
30	45	45	45	44	43	43	42
45	43	44	46	46	46	48	52
60	41	45	48	48	49	55	98
75	37	43	48	49	52	58	70
$82\frac{1}{2}$	33	40	48	49	53	59	65
$86\frac{1}{4}$	32	37	47	49	53	60	64
90	28	35	47	48	53	60	63

$\varepsilon = 75^\circ$ $\cos \varepsilon = 0,26$

α	$\nu = 0^\circ$	30	60	90	120	150	180
0°	0,24	24	24	24	24	24	24
15	23	23	23	23	23	23	22
30	22	22	22	22	22	21	20
45	21	22	22	22	23	24	24
60	21	24	25	25	26	30	42
75	22	24	28	28	31	38	2,04
$82\frac{1}{2}$	21	24	28	29	33	43	2,80
$86\frac{1}{4}$	19	23	30	31	35	45	1,80
90	16	22	30	32	36	47	1,40

$\varepsilon = 82\frac{1}{2}^\circ$ $\cos \varepsilon = 0,13$

α	$\nu = 0^\circ$	30	60	90	120	150	180
0°	0,13	13	13	13	13	13	13
15	13	13	13	13	13	13	13
30	12	12	12	12	11	11	11
45	11	11	11	11	12	12	12
60	10	12	13	13	14	16	22
75	12	12	15	16	16	25	1,90
$82\frac{1}{2}$	11	12	16	17	18	29	5,00
$86\frac{1}{4}$	10	12	17	18	20	32	5,21
90	08	11	17	18	22	35	2,60

$\varepsilon = 86\frac{1}{4}^\circ$ $\cos \varepsilon = 0,07$

α	$\nu = 0^\circ$	30	60	90	120	150	180
0°	0,07	07	07	07	07	07	07
15	07	07	07	07	07	07	07
30	06	06	06	06	06	06	06
45	05	05	05	05	05	05	06
60	05	06	07	07	07	08	11
75	06	07	08	09	10	12	1,30
$82\frac{1}{2}$	06	07	09	09	10	15	14,00
$86\frac{1}{4}$	05	06	09	09	11	16	14,40
90	04	06	09	09	11	18	14,00

In Figur 4 sind von den Helligkeitsflächen die Meridiane der Einfallsebenen, also für $\nu = 0$ und $= 180^\circ$ angegeben, und zwar für $\varepsilon = 0, 30, 60, 75, 82\frac{1}{2}^\circ$; die ge-

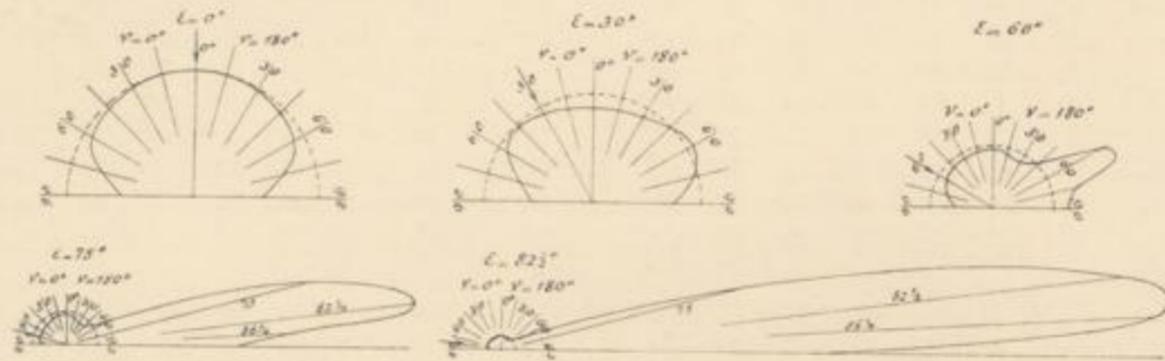


Fig. 4.

strichelten Halbkreise sind mit den Halbmessern $\cos \varepsilon$ verzeichnet, gehören also den Helligkeitsflächen an, welche dem Lambert'schen Gesetze entsprechen und Halbkugeln sind.

Die Tabellen für die Beleuchtungsflächen, also mit unveränderlichem α , bildet man aus den vorigen. In Figur 5 sind die Meridiane der Ausfallsebenen für diese Flächen für $\alpha = 0$ und $= 60^\circ$ verzeichnet; die gestrichelten Kreise gehören den Beleuchtungsflächen nach Lambert an, welche gleiche von α unabhängige Vollkugeln vom Halbmesser 1 bilden.

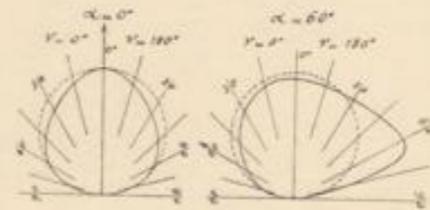
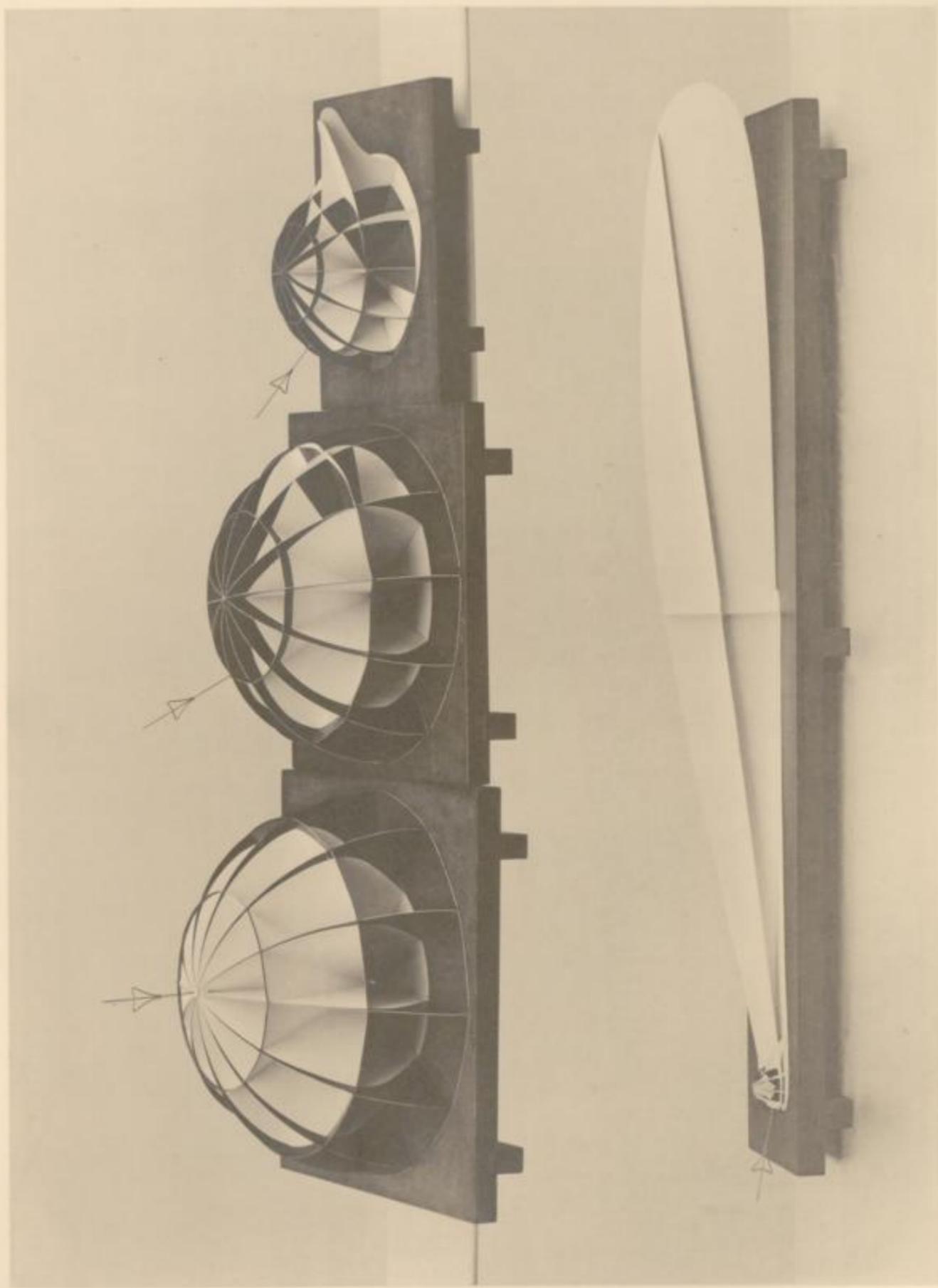


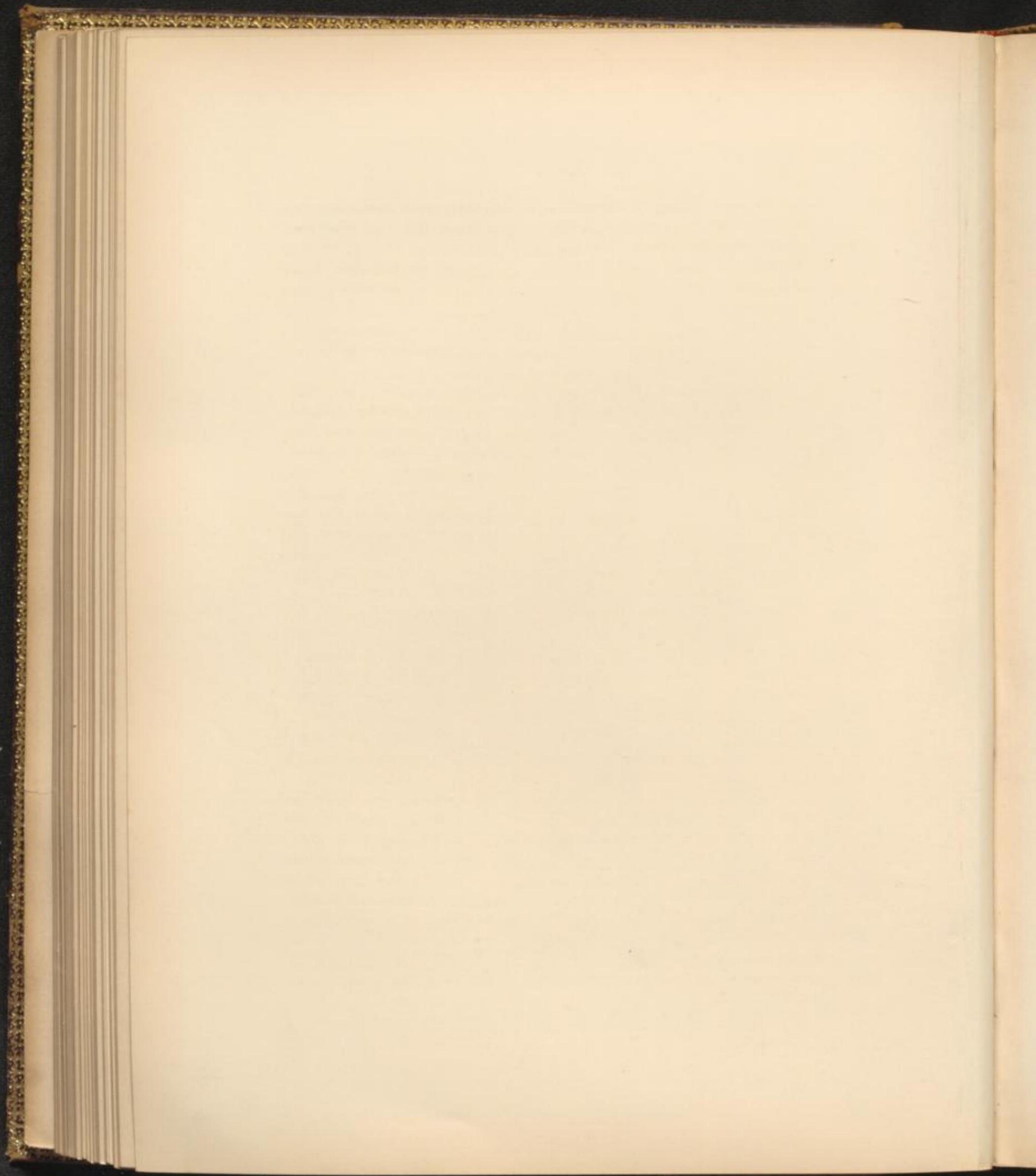
Fig. 5.

Die beigefügte Tafel gibt die photographischen Nachbildungen der Modelle von 4 Helligkeitsflächen für $\varepsilon = 0, 30, 60, 82\frac{1}{2}^\circ$, welche mein Assistent, Herr C. Tesch, ausgeführt hat. Es wurden die Meridiane in den angegebenen Intervallen von 30° ausgeschnitten und durch Kegel verbunden, welche bei den 3 ersten Modellen mit $\alpha = 30$ und 60° , bei dem letzten mit $\alpha = 82\frac{1}{2}^\circ$ gebildet sind. Auf Meridianen und Kegeln sind auch die kreisförmigen Schnitte mit den Helligkeitskugeln Lamberts (von den Halbmessern $\cos \varepsilon$) aufgezeichnet. Zur leichten Unterscheidung sind die Meridian- und Kegelkurven der wirklichen Helligkeitsflächen nach innen weiss gelassen, die der Lambert'schen nach innen schwarz angelegt. Der einfallende Lichtstrahl ist durch einen Draht mit Pfeilspitze bezeichnet.

Aus diesen Ergebnissen sind Folgerungen über den Vorgang der Lichtzerstreuung durch gegossenen Gyps und durch matte, aber nicht rauhe Oberflächen überhaupt in der Einleitung gezogen worden. Ueber die erfahrungsmässige Stärke der Lichtzerstreuung durch gegossenen Gyps kann man aus den Tabellen, oder auch aus den Figuren und Modellen, folgende Schlüsse ziehen.



Modelle von Helligkeitsflächen des Gypses bei Einfallswinkeln von 0 , 30 , 60 , $82\frac{1}{2}^{\circ}$.



1. Bei unveränderlichem Einfallswinkel ϵ und bei wechselnden Ausfallswinkeln α von 0 bis 60° ist die Helligkeit eine ziemlich gleichförmige und zwar meist etwas kleiner, als nach dem Lambertschen Gesetze.

2. Nimmt dann α weiter von 60 bis 90° zu, so nimmt die Helligkeit im allgemeinen ab, und erreicht in dieser Grenze von $\alpha = 90^\circ$ oder bei streifendem Sehen ungetähr $0,6$ derjenigen bei $\alpha = 0^\circ$.

3. Auf der dem einfallenden Strahle gegenüberliegenden Seite, also auf der Seite der Spiegelung ist die Helligkeit grösser als an den entsprechenden Stellen (von gleichem α) auf derselben Seite.

4. Die Spiegelung wird um so deutlicher und stärker, je grösser der Einfallswinkel ϵ ist. Bei $\epsilon = 45^\circ$ und noch mehr bei 60° ist sie durch grössere Helligkeit, noch nicht aber durch ein deutliches Spiegelbild oder durch Glanz bemerkbar. Die grösste Helligkeit H beträgt bei $\epsilon = 60^\circ$ schon $1,03$, während die mittlere etwas kleiner als $\cos \epsilon$ oder $0,5$ ist, und dies findet statt bei $\nu = 180^\circ$ und $\alpha = 67^\circ$, also bei einem Ausfallswinkel, der grösser als der Einfallswinkel (60°) ist. Auch bei einem Azimuthe, das kleiner als 180° , ist noch eine deutliche Lichtverstärkung zu bemerken, und zwar bis zu $\nu = 162^\circ$. Bei $\epsilon = 75^\circ$ ist eine deutliche Spiegelung mit Glanz sichtbar, und zwar von $\alpha = 73$ bis 90° , am stärksten mit $H = 2,2$ bei $\alpha = 79^\circ (> 75^\circ)$, während $\cos \epsilon = 0,26$. Bei $\epsilon = 82\frac{1}{2}^\circ$ reicht die Spiegelung von $\alpha = 73$ bis 90° , und ist am grössten mit $H = 5,2$ bei $\alpha = 85^\circ$, während $\cos \epsilon = 0,13$. Bei $\epsilon = 86\frac{1}{4}^\circ$ reicht die Spiegelung von $\alpha = 78\frac{1}{2}$ bis 90° , und ist am grössten mit $H = 14,4$ bei $\alpha = 88^\circ$, während $\cos \epsilon = 0,07$.

Man bemerkt also, dass die Spiegelung am stärksten ist bei einem Ausfallswinkel α , der immer etwas grösser als der Einfallswinkel ϵ ist. Nimmt man mit Bourguer an, was auch diese Beobachtungen bestätigen, dass die Fläche der spiegelnden Flächentheilchen um so grösser wird, je kleiner ihr Winkel mit der Gesamtoberfläche, so lässt sich jene Erscheinung, dass bei der stärksten Spiegelung $\alpha > \epsilon$ ist, leicht erklären. Bei merklicher Spiegelung sind α und ϵ Winkel, die $> 60^\circ$ und nicht sehr von einander verschieden sind. Lässt man nun ϵ unverändert und α etwas über ϵ hinauswachsen, so nehmen bei zunehmendem α auch $\alpha - \epsilon$ und $\alpha + \epsilon$ zu. Der Winkel der spiegelnden Flächentheilchen gegen die Gesamtoberfläche ist aber $\frac{1}{2}(\alpha - \epsilon)$, und die Gesamtgrösse dieser Flächentheilchen nimmt ab, wenn α zunimmt, aber nur wenig, da $(\alpha - \epsilon)$ stets klein bleibt. Dagegen ist $\frac{1}{2}(\alpha + \epsilon)$ der Einfalls- und Ausfallswinkel gegen diese Flächentheilchen, und mit seiner Zunahme nimmt die Stärke der Spiegelung zu, und bekanntlich besonders rasch bei grösseren Einfalls- (und Ausfallswinkeln), wie sie hier vorausgesetzt sind. Diese Zunahme überwiegt daher stets jene Abnahme, so dass die stärkste Spiegelung bei $\alpha > \epsilon$ stattfindet.

In Bezug auf die Nachahmung der Helligkeit in der Malerei ergibt sich daher, dass man ziemlich wahrheitsgemässe Ergebnisse erhält, wenn man im allgemeinen

das Lambertsche Gesetz gelten lässt, wenn man ferner bei sehr grossem Ausfallswinkel, besonders in der Nähe der streifenden Sehstrahlen, die Helligkeit auf 0,6 der nach Lambert erhaltenen Helligkeit verkleinert, andererseits aber in der Nähe der Spiegelungspunkte grössere, gegen ihn hin zunehmende Helligkeiten anwendet, die bei wachsendem Einfallswinkel ϵ in Glanzstellen übergehen.

Es wäre nun zu wünschen, dass weitere Untersuchungen an verschiedenen Stoffen mit wechselnder Beschaffenheit ihrer Oberfläche und auch mit feineren Hilfsmitteln, als sie dem Verfasser zu Gebote standen, ausgeführt, und dass für sie alle die Helligkeitsflächen ermittelt würden. Für die Malerei wären solche Untersuchungen besonders über die Bekleidungsstoffe, Leinwand, Tuch, Seide, Sammt, von grossem Werthe, und weiter gehend die Aufstellung von Farbenskalen, die darauf gegründet wären.

Die Empfindungseinheit zum Messen der Empfindungsstärke.

Ich will nun die auf S. 153 erwähnten und in ihrem Grundgedanken bezeichneten Versuche mittheilen, welche ich ausgeführt habe, um die Empfindungsstärke durch eine Empfindungseinheit zu messen.

Mit dem Wachsen der Helligkeit einer Fläche, das ist auch mit dem Wachsen des Reizes, den sie auf unser Auge ausübt, wird die Empfindung der Helligkeit stärker oder die Empfindungsgrösse oder Empfindungsstärke wächst. Aber die Helligkeitsempfindung nimmt nicht gleichförmig zu, wenn die Helligkeit gleichförmig zunimmt, oder allgemein, die Empfindungsstärke wächst nicht in dem gleichen Masse wie der Reiz. Denn wenn eine Fläche mit einer und nachher mit zwei Kerzen beleuchtet wird, so wird die Helligkeit um diejenige vermehrt, welche eine Kerze hervorbringt, und zugleich wird die Helligkeitsempfindung bedeutend gesteigert. Wenn aber die Fläche zuerst mit 100, dann mit 101 Kerzen beleuchtet wird, so wird die Helligkeit wieder um die von einer Kerze hervorgebrachte vermehrt, aber die Helligkeitsempfindung wird nicht merklich gesteigert. Oder allgemeiner: wenn in zwei Fällen der Reiz um gleich viel vermehrt wird, wird nicht zugleich die Empfindungsstärke um gleich viel vermehrt.

Hier drängt sich uns als Masseinheit der Zunahme der Empfindungsstärke und damit der Empfindungsstärke selbst die Merkbarkeit dieser Zunahme auf, so dass wir sagen, zwei Empfindungsstärken sind um eine Empfindungseinheit verschieden, wenn ihr Unterschied gerade bemerkt oder empfunden werden kann. Wenn wir daher im Falle der Helligkeitsempfindung unsere Gypsplatte in einem dunklen Raume mit schwarzen Wänden durch ein unserem Auge verdecktes, vielleicht recht schwaches Licht aus grosser Entfernung beleuchten, sie aber dennoch nicht erkennen können, und dann das Licht näher rücken, bis sich die Gypsplatte von ihrer dunklen Umgebung gerade bemerkbar abhebt, so ist die Empfindungsstärke von Null auf Eins gestiegen, besitzt

also die Stärke der Empfindungseinheit. Hat man dabei die zwei gleichen Platten neben einander gestellt, deren Bilder dann verschmelzen, und man nähert nachher die eine Platte dem Lichte, bis sie von der andern gerade unterschieden werden kann, so ist die Empfindungsstärke wieder um eine Einheit gestiegen, also = 2 geworden. Dann nähert man die dunklere, bis sie gerade als hellere unterschieden werden kann, so erregt sie eine Empfindung von der Stärke 3 u. s. w. Die Empfindungseinheit ist also gegeben durch die untere Grenze der Unterscheidbarkeit zweier Empfindungen, und die Masszahl einer Empfindungsstärke ist die Anzahl der schwächeren Empfindungsstärken, welche man zwischen der gegebenen und dem Mangel an jeder Empfindung mit gerade noch wirksamer Unterscheidbarkeit einschalten kann, vermehrt um Eins. So würde die durch einen Stern hervorgebrachte Empfindungsstärke gleich der Anzahl von Sternen von gerade noch unterscheidbarer Helligkeit sein, welche zwischen dem gegebenen Stern und der Finsterniss liegen, vermehrt um Eins. Diese Empfindungseinheit und daher auch die Masszahl der durch denselben Reiz hervorgebrachten Empfindungsstärke wird natürlich mit der Person, und auch bei derselben Person mit ihren verschiedenen Zuständen, z. B. mit dem Grade der Aufmerksamkeit und der Ermüdung, wechseln.

Dabei steht jedenfalls die Zunahme der Empfindungsstärke mit derjenigen des Reizes in einem gesetzmässigen Zusammenhange; es ist aber bei jener Bestimmung der Empfindungsstärke gar nicht nothwendig, diesen Zusammenhang zu kennen; man kann stets experimentell die Grösse der Empfindung in der angegebenen Weise abzählend bestimmen. Jener Zusammenhang ist aber in Wirklichkeit ein sehr einfacher, und gegeben durch das Webersche Gesetz. Nach ihm ist innerhalb gewisser Grenzen der Unterschied zweier Empfindungen gerade bemerkbar, wenn der Reiz sich um einen bestimmt verhältnissmässigen Theil seiner Grösse ändert.

Nimmt der Reiz r um Δr bis zu r_1 zu, so hat Δr sowohl zu dem kleineren r , wie zu dem grösseren $r_1 = r + \Delta r$ (und auch zu dem mittleren $r + \frac{1}{2} \Delta r$) ein unveränderliches Verhältniss. Ist $r : \Delta r = a$, so ist $r_1 : \Delta r = (r + \Delta r) : \Delta r = a + 1$, oder es ist

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{a}, \quad \frac{\Delta r}{r_1} = \frac{1}{a+1}.$$

So ist z. B. nach der zweiten Reihe der folgenden Versuche der Unterschied der Helligkeiten zweier Gypsplatten gerade bemerkbar, wenn er etwa $\frac{1}{12}$ der Helligkeit der weniger hellen, also $\frac{1}{13}$ derjenigen der helleren beträgt, so dass hier $a = 12$ wäre.

Der Unterschied dieser beiden Verhältnisszahlen liegt aber immer innerhalb der Fehlergrenze. Wir wollen mit Fechner* das Verhältniss $(1 : a)$ die Verhältnisschwelle (Verhältnisskonstante) nennen. a ist ihr reciproker Werth. Der Unterschied

* A. a. O. (S. 153) Bd. 1, S. 244.

der zu den Reizen r und r_1 gehörigen Empfindungen e und e_1 ist gerade bemerkbar, also die angenommene Empfindungseinheit.

Es sei nun eine Empfindung selbst (also nicht ein Empfindungsunterschied) gerade noch bemerkbar, also von dem Mangel einer Empfindung noch unterscheidbar, demnach ihre Stärke = 1, und es sei der zugehörige Reiz = r_1 . Es wächst dann die Empfindungsstärke zu 2, wenn der Reiz $r_2 = r_1 + \frac{1}{\alpha} r_1 = r_1 \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$ wird; sie wächst zu 3, wenn der Reiz $r_3 = r_2 + \frac{1}{\alpha} r_2 = r_1 \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^2$ wird, u. s. w. Entsprechend wollen wir die Empfindungsstärke = 0 setzen, wenn der Reiz r_0 so gross ist, dass $r_0 \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) = r_1$ wird, wenn auch in Wirklichkeit jede Empfindung unmerklich oder < 1 bleibt, sobald der Reiz $< r_1$ ist, so dass r_0 keine wirkliche Scheidegrenze verschiedener Empfindungen bildet. Diesen Reiz r_0 wollen wir mit Fechner* den Schwellenwerth s des Reizes nennen. Man kann sich vorstellen, dass von diesem Schwellenwerthe des Reizes an die Empfindung beginnt, sich nach dem Weberschen Gesetze über Null zu erheben, und dass sie merklich oder 1 wird bei $r_1 = \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)s$. Wir erhalten dann die Empfindungen $e = 0, 1, 2, \dots, e$ entsprechend bei den Reizen $r = s, s \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right), s \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^2, \dots, s \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^e$, oder es ist

$$r = s \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^e,$$

und daher

$$\begin{aligned} \log r &= e \log \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) + \log s, \\ \text{oder} \quad e &= \frac{\log r - \log s}{\log \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Um die Unveränderlichen s und α zu ermitteln, stellte ich Versuche an. Ich benutzte ein kleines Benzinlicht von 9 mm Flammenhöhe, welches die Helligkeit von 0,07 oder (1 : 14,3) Stearinlicht hatte. Denn im Abstände von 1,35 m von der Gypsplatte brachte es auf dieser dieselbe Helligkeit hervor, wie das Stearinlicht im Abstand von 5,11 m auf der benachbarten Platte; und es ist $(1,35 : 5,11)^2 = 0,07 = 1 : 14,3$. Ich stellte nun am dunklen Abend in einer Reihe von Zimmern im entferntesten die beiden Gypsplatten neben einander auf und liess durch die Thüren hindurch den Schein der

* A. a. O. Bd. 1, S. 238 ff. und Bd. 2, S. 13. Die folgenden Formeln stimmen im Wesentlichen mit denen Fechners überein. Derselbe nimmt aber meist keine bestimmte Einheit an, und geht von unendlich kleinen Zuwachsen des Reizes und der Empfindungsgrösse aus. Dem Sinne nach stimmt unsere folgende Formel mit der Unterschiedsmassformel Fechners überein, Bd. 2, S. 97.

Benzinflamme auf sie fallen; dem ohngeachtet konnte ich sie nicht bemerken. Ich näherte nun die Flamme bis die Platten sichtbar wurden. Die Entfernung der Flamme von ihnen war dann 18,82 m, daher die Helligkeit oder der Reiz $r = 0,07 : 18,82^2 = 0,0001972$, und die Empfindung $e = 1$. Ich liess nun, während die Flamme stehen blieb, die eine Platte näher rücken, bis sie heller erschien, als die andere. Sie hatte dann den Abstand von der Flamme = 18,34 m, ihre Helligkeit war daher $r = 0,07 : 18,34^2 = 0,0002075$ und die Empfindung war 2. Der Unterschied der Reize Δr ist daher $0,0002075 - 0,0001972 = 0,0000103$, also $\Delta r : r = (1 : e) = 0,0000103 : 0,0001972 = 0,052 = 1 : 19,2$; und $1 : (e + 1) = 0,0000103 : 0,0002075 = 0,0496 = 1 : 20,2$, also jedesmal $e = 19,2$. Nun liess ich die erste Platte näher rücken, bis sie gerade merkbar heller als die zweite erschien, und erhielt den Abstand 16,25 m u. s. w. Ich erhielt so die Abstände 18,82; 18,34; 16,25; 15,42; 14,24; 13,55 . . . und zuletzt 1,02; 0,97; 0,89; 0,86 m, wobei die letzte Aufstellung die 47., also $e = 47$ war, so dass die Empfindungsstärke 47 Einheiten besass. Dabei ergaben sich der Reihe nach 46 Werthe von $1 : e$ zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Aufstellungen oder Reizen, nämlich 0,052; 0,252; . . . oder ausgedrückt in Tausendtel: 52, 252, 111, 117, 121, 113, 152, 172, 206, 218, 165, 136, 107, 89, 78, 93, 70, 65, 156, 77, 161, 58, 91, 127, 92, 103, 194, 92, 236, 141, 216, 176, 297, 114, 167, 137, 169, 186, 226, 213, 138, 128, 226, 104, 190, 74. Man sieht, dass die Schwankungen sehr bedeutend waren, was zum Theil unvermeidlich sein wird, und in der Unsicherheit der Auffassung der Deutlichkeit liegt, womit der Helligkeitsunterschied bemerkbar ist. Andere oben angeführte Versuche (S. 155) haben ergeben, dass bei der Gleichschätzung zweier Helligkeiten der grösste Abstand derselben vom Mittel zu der Helligkeit selbst das Verhältniss 0,0406 besass, und dies ist kleiner als die kleinste der obigen Zahlen (0,052). Wäre die erstere Zahl unter den gleichen Umständen wie die letztere, also auch mit der kleinen Benzinflamme ermittelt, so könnte man in die Mitte zwischen beiden die eigentliche Grenze der Erkennbarkeit des Unterschiedes setzen. Das Ueberragen der beobachteten Zahlen über diese Grenze rührt von der im Begriffe der Empfindungseinheit angenommenen Erkennbarkeit des Empfindungsunterschiedes her, und ihr Schwanken von dem Wechsel in dem augenblicklich verlangten Grade der Deutlichkeit des Erkennens. Wir werden daher in der grösseren Menge der Beobachtungen eine grössere Sicherheit suchen müssen.

Bei den angeführten Versuchen wurden also zwischen der Dunkelheit und derjenigen Helligkeit, welche bei dem Lichtabstande von 0,86 m herrschte, oder bei $r = 0,07 : 0,86^2 = 0,0948$, 46 erkennbar verschiedene Helligkeiten eingeschaltet, oder die letzte Empfindungsstärke war $e = 47$. Dadurch kann man den mittleren Werth von e und den Schwellenwerth s berechnen, indem man in Formel (1) die zusammengehörigen Werthe $e = 1$, $r = 0,0001972$ und $e = 47$, $r = 0,0948$ einsetzt, und von den beiden so gewonnenen Gleichungen die eine von der anderen abzählt. Es fällt dadurch s aus, und man erhält

$$\log\left(1 + \frac{1}{a}\right) = \frac{\log 0,0948 - \log 0,0001972}{47 - 1} = 0,058307, \frac{1}{a} = 0,1437, a = 6,96,$$

oder nahezu = 7. Man erkennt also den Unterschied zweier Helligkeiten gerade deutlich, wenn er $\frac{1}{7}$ der geringeren, oder $\frac{1}{6}$ der grösseren dieser Helligkeiten ist.

Hieraus erhält man aber

$$s = \frac{0,0001972}{1 + 0,1437} = 0,0001728,$$

so dass die obigen Formeln werden

$$r = 0,0001728 \cdot 1,1437^e, \quad e = \frac{\log r - \log 0,0001728}{0,058312}.$$

Um die durch jede dieser Gleichungen dargestellte logarithmische Linie k mittelst ihrer Koordinaten r und e zu verzeichnen, trage man (Fig. 6) auf der Axe r für $e=0$ die $r=s=0,0001728$ als OS auf. Für $e=1$ wächst r zu $s \cdot 1,1437 = OC$, oder um $s \cdot 0,1437 = SC$. Zieht man nun aus irgend einem Punkte A der Axe r einen Kreisbogen mit dem Halbmesser $AB = OA \cdot 0,1437$ und an ihn die Tangente OB aus O , so ist auch der Abstand SC' , des Punktes S von OB gleich jenem Zuwachse SC des r . Zu $r = OC$ gehört dann $e=1$. Wächst nun r weiter um $CD = CD'$, so gehört zu D , $e=2$ u. s. w. Weil

aber beim Aneinanderreihen der Zuwächse der r die Fehler sich addiren, so berechnet man zweckmässig einige r , und findet so z. B. für $e=10$, $r=0,0006617$, wonach man die konstruirten Punkte verbessert. — Indem man die logarithmische Linie in ihrem ganzen Verlaufe gelten lässt, erhält man auch Bruchtheile von Helligkeiten, welche anzeigen, wie nahe man bei einem sprungweisen Fortschreiten der Helligkeitsempfindung um Einheiten bei einem folgenden merkbaeren Zuwachse sein würde.

Die Grössen s und a , welche bei derselben Person auf einige Zeit so gut wie unveränderlich sind, wechseln, wie schon angedeutet, mit der Person, und bei derselben

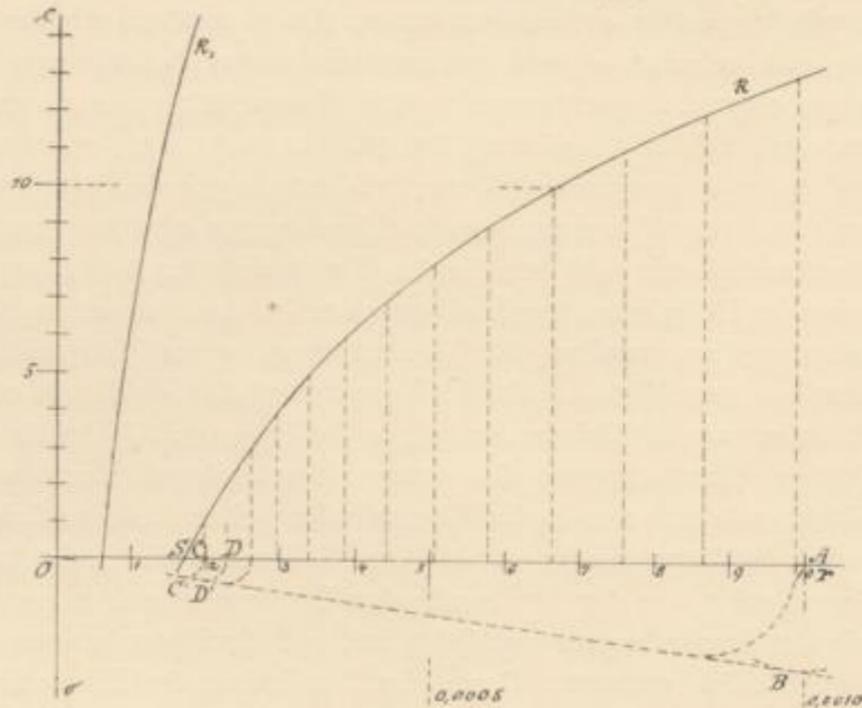


Fig. 6.

Person mit ihrem Zustande, z. B. mit dem Grade der Aufmerksamkeit und der Ermüdung. Bei den Helligkeitsempfindungen ist aber bei geringen Helligkeiten die Gewöhnung an die Dunkelheit, bei starken die Gewöhnung an das Licht von Einfluss, wobei die grössere Oeffnungsweite der Pupille im Dunkeln eine wesentliche Rolle spielen wird. Ich stellte eine zweite Reihe von Versuchen an, nachdem ich das Auge durch etwa 10 Minuten langes Zubringen im Dunkeln an die Dunkelheit gewöhnt und empfindlicher für schwache Lichteindrücke gemacht hatte. Ich stellte die Benzinflamme sehr klein und schützte die Wände des Zimmers, in dem ich mich befand, vor Beleuchtung durch dies Licht. Im Gegensatz dazu waren bei den vorhin angegebenen Versuchen diese Wände merklich hell und das Auge nicht an die Dunkelheit gewöhnt. Bei den neuen Versuchen hatte die Benzinflamme die Höhe von 7 mm und die Lichtstärke von $0,0232 = 1:43,2$. Ich fand dann die erste Sichtbarkeit ($\epsilon = 1$) bei $H = 0,000065$, und $1:\epsilon$ der Reihe nach $= 0,077; 0,100; \dots$ oder in Tausendtel 77, 100, 77, 48, 89, 74, 59, 96, 71, 108, 107, 58, 93, welche Werthe wesentlich kleiner als die früheren sind. Die letzte Helligkeit war $0,0001792$ bei $\epsilon = 14$. Man findet dann den mittleren Werth von $1:\epsilon = 0,0811 = 1:12,3; s = 0,00006012; r = 0,00006012 \cdot 1,0811'$.

Die Kurve ist durch die gestrichelte Linie k_1 der Figur 6 dargestellt.

Die Vergleichung der beiden Kurven k und k_1 zeigt, dass die Empfindungsstärken in hohem Grade mit der augenblicklichen Beschaffenheit des Sinneswerkzeuges wechseln. Es geht daraus hervor, dass die Masszahl der Empfindungsstärke durchaus nicht allein von der Grösse des Reizes abhängt, sondern selbstverständlich auch von der Person und ihrer augenblicklichen Beschaffenheit. Man ist durch solche Untersuchungen in den Stand gesetzt, die Empfindungsfähigkeiten oder Empfindlichkeiten* verschiedener Personen oder derselben Person zu verschiedenen Zeiten mit einander zu vergleichen.

Dabei macht es aber einen Unterschied, ob man die Unterschiedsschwellen oder die Reizschwellen mit einander vergleicht. Im ersteren Falle verhalten sich zwei Empfindlichkeiten E_a und E_a' wie die Zahlen a und a' . Denn wenn eine Person $\frac{1}{200}$ eine andere erst $\frac{1}{10}$ der Zunahme eines Reizes empfindet, so verhalten sich ihre Empfindlichkeiten wie $20:10$. Es verhalten sich also die Unterschiedsempfindlichkeiten umgekehrt wie die Unterschiedsschwellen, oder gerade wie deren reciproke Werthe, oder es ist

$$E_a : E_a' = \frac{1}{a'} : \frac{1}{a} = a : a'.$$

Ebenso verhalten sich offenbar die Schwellenempfindlichkeiten umgekehrt wie die Reizschwellen, oder

$$E_s : E_s' = s' : s.$$

*) Vergl. Fechner a. a. O., Bd. 1, S. 69 ff. und Bd. 2, S. 142 ff.

Bei unseren Versuchen war für das an das Licht gewöhnte Auge $\alpha = 6,96$, $s = 0,0001728$, und für das an Dunkelheit gewöhnte $\alpha' = 12,3$, $s' = 0,00006012$. Daher war $E_s : E_s' = 6,96 : 12,3 = 1 : 1,77$, und $E_r : E_r' = 0,00006012 : 0,0001728 = 1 : 2,86$.

Beiderlei Empfindlichkeiten haben sich also nicht gleichförmig geändert, sondern die Schwellenempfindlichkeit mehr als die Unterschiedsempfindlichkeit. Dass sich erstere durch die Gewöhnung an die Dunkelheit stark erhöht, ist bekannt, indem der Gewöhnte lesen kann, wo der aus dem Hellen kommende nichts zu unterscheiden vermag.

Die Unterschiedsempfindlichkeit ändert sich weniger, bleibt aber doch nicht ungeändert, wie Fechner annehmen zu müssen glaubt*, indem er voraussetzt, dass das Webersche Gesetz ohne Aenderung der Konstanten über jene Zustandsänderung des Beobachters wegschreitet.

* A. a. O. Bd. 1, S. 165.