Festgabe zum Jubiläum der vierzigjährigen Regierung seiner Königlichen Hoheit des Grossherzogs Friedrich von Baden

Friedrich <I., Baden, Großherzog>

Karlsruhe, 1892

Quadratsummen. Parameterdarstellungen quadratischer Mannichfaltigkeiten. Involutorische lineare Transformationen. Von Ludwig Wedekind

QUADRATSUMMEN.

PARAMETERDARSTELLUNGEN QUADRATISCHER MANNICHFALTIGKEITEN.

INVOLUTORISCHE LINEARE TRANSFORMATIONEN.

VON

LUDWIG WEDEKIND.

Vorbemerkung.

Die gegenwärtige Arbeit wurde — abgesehen von den Artikeln 5a bis 5e, die nachträgliche Umarbeitung und Erweiterung erfuhren — vor zwei Jahren abgeschlossen und ihr Inhalt damals in engeren Kreisen von Fachgenossen bekannt gegeben. Inzwischen sind von anderen Seiten Untersuchungen veröffentlicht worden, die sich, soweit wenigstens lineare Transformationen in Rede stehen, mit den Ergebnissen der vorliegenden Darstellung zum Theil berühren, zum Theil über sie hinausgehen. Es gilt das, wenn anders die Vergleichung erschöpfend war, insbesondere von den Kronecker'schen Abhandlungen über orthogonale Systeme in dem Jahrgang 1890 der Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften (S. S. 485 f., 525 f., 601 f., 691 f., 873 f., 1063 f.) und von den Betrachtungen über die linearen Transformationen einer Fläche zweiter Ordnung in sich, die Herr Lindemann, unter gleichzeitiger Beibringung eines ausführlichen Literaturnachweises, in dem zweiten Bande der Clebsch-Lindemann'schen Vorlesungen über Geometrie (S. S. 356—373) niedergelegt hat. — Möge es den nachfolgenden Aufzeichnungen gelingen, sich selbst zu rechtfertigen, wenn sie trotzdem in später Stunde noch unverkürzt an die Oeffentlichkeit treten.

I. Quadratsummen.

1. Wird ein Punkt des einschaligen Hyperboloids aufgefasst als Schnitt der beiden durch ihn hindurchgehenden Erzeugenden

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a}+\frac{z}{c} &= u\left(1-\frac{y}{b}\right) \\ u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right) &= 1+\frac{y}{b} \end{aligned}\right| \quad \text{und} \quad \left.\begin{aligned} \frac{x}{a}+\frac{z}{c} &= v\left(1+\frac{y}{b}\right) \\ v\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right) &= 1-\frac{y}{b} \end{aligned}\right|,$$

so gewinnt man für seine Coordinaten die Darstellung

$$\frac{x}{a}=\frac{uv+1}{u+v}, \quad \frac{y}{b}=\frac{u-v}{u+v}, \quad \frac{z}{c}=\frac{uv-1}{u+v}.$$

Ein Punkt des hyperbolischen Paraboloids erscheint durch die Gleichungen bestimmt

$$\frac{x}{a} = u + v, \quad \frac{y}{b} = u - v, \quad \frac{z}{c} = 2\,u\,v,$$

wenn er als Schnitt der Geraden

$$\left.\begin{aligned} u\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) &= \frac{z}{c} \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= 2\,u \end{aligned}\right| \quad \text{und} \quad \left.\begin{aligned} v\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) &= \frac{z}{c} \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} &= 2\,v \end{aligned}\right|$$

vorgestellt wird.

Die angezogenen Darstellungen geben ersichtlichen Anlass, die beiden Identitäten in's Auge zu fassen

$$(u\,v + 1)^2 + (u - v)^2 \equiv (u\,v - 1)^2 + (u + v)^2$$

und

$$(u + v)^2 - (u - v)^2 \equiv 4\,u\,v.$$

Diese Identitäten vereinfachen sich beziehlich für $v = u \; (= t)$ und für $u = t^2$, $v = 1$ zu

(1) $$(t^2 - 1)^2 + (2\,t)^2 \equiv (t^2 + 1)^2;$$

sie liefern damit an der Hand analytisch-geometrischer Ueberlegungen die bekannte Gleichung, welche der zahlentheoretischen Ermittlung rationaler rechtwinkliger Dreiecke vorsteht.

2. Der Identität (1) mag man jede der beiden Formen geben

$$\left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{2\,t}{t^2 + 1}\right)^2 \equiv 1 \quad \text{und} \quad \left(\frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}\right)^2 - \left(\frac{2\,t}{t^2 - 1}\right)^2 \equiv 1.$$

Die Benutzung dieser Formen im Wege einmaliger oder wiederholter Multiplication bietet das Mittel, gesetzmässig aus jeder beliebigen Identität neue Identitäten in unbeschränkter Zahl abzuleiten. So ergibt sich

(2) $$\left(\frac{t_1^2 - 1}{t_1^2 + 1} \cdot \frac{t_2^2 - 1}{t_2^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{t_1^2 - 1}{t_1^2 + 1} \cdot \frac{2\,t_2}{t_2^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{2\,t_1}{t_1^2 + 1}\right)^2 \equiv 1;$$

(3) $$\left(\frac{t_1^2 + 1}{t_1^2 - 1} \cdot \frac{t_2^2 - 1}{t_2^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{t_1^2 + 1}{t_1^2 - 1} \cdot \frac{2\,t_2}{t_2^2 + 1}\right)^2 - \left(\frac{2\,t_1}{t_1^2 - 1}\right)^2 \equiv 1;$$

(4) $$\left(\frac{t_1^2 + 1}{t_1^2 - 1} \cdot \frac{t_2^2 + 1}{t_2^2 - 1}\right)^2 - \left(\frac{t_1^2 + 1}{t_1^2 - 1} \cdot \frac{2\,t_2}{t_2^2 - 1}\right)^2 - \left(\frac{2\,t_1}{t_1^2 - 1}\right)^2 \equiv 1;$$

aber auch

(5) $$\left(\frac{t_1^2-1}{t_1^2+1}\cdot\frac{t_2^2-1}{t_2^2+1}\cdot\frac{t_3^2-1}{t_3^2+1}\right)^2+\left(\frac{t_1^2-1}{t_1^2+1}\cdot\frac{t_2^2-1}{t_2^2+1}\cdot\frac{2\,t_3}{t_3^2+1}\right)^2+\left(\frac{t_1^2-1}{t_1^2+1}\cdot\frac{2\,t_2}{t_2^2+1}\right)^2+\left(\frac{2\,t_1}{t_1^2+1}\right)^2\equiv 1;$$

u. s. f.

Beseitigung der Nenner und geeignete Umstellung der Terme in Indentitäten von der angeführten Art lehrt — bei Verwendung rationaler Parameterwerthe t —

Es können stets, und zwar bei beliebigen ganzzahligen p, q stets auf $2(p+q-2)$-fach unendlich viele Arten, Systeme von p ganzen Zahlen A und q ganzen Zahlen B derart gefunden werden, dass die arithmetische Summe der Quadrate der A gleich ist der arithmetischen Summe der Quadrate der B.

3. Wird t^2 ersetzt durch

$$\varepsilon_1 t_1^2 + \varepsilon_2 t_2^2 + \ldots + \varepsilon_n t_n^2 = \Sigma\,\varepsilon_i t_i^2 = \tau,$$

so verwandelt sich die Identität (1) in

(6) $$(\Sigma\,\varepsilon_i t_i^2 - 1)^2 + \varepsilon_1 (2\,t_1)^2 + \varepsilon_2 (2\,t_2)^2 + \ldots + \varepsilon_n (2\,t_n)^2 \equiv (\Sigma\,\varepsilon_i t_i^2 + 1)^2$$

oder

(7) $$\left(\frac{\tau-1}{\tau+1}\right)^2 + \varepsilon_1\left(\frac{2\,t_1}{\tau+1}\right)^2 + \varepsilon_2\left(\frac{2\,t_2}{\tau+1}\right)^2 + \ldots + \varepsilon_n\left(\frac{2\,t_n}{\tau+1}\right)^2 \equiv 1.$$

Die Gleichung (6) bestätigt, wenn man die ε_i in der Bedeutung von Vorzeichen auffasst, die Wahrheit des soeben erkannten Satzes von einem anderen Standpunkt aus. In besonders übersichtlicher Weise liefert sie — für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_n = 1$ und bei Benutzung ganzzahliger Werthe der t_i — n-fach unendlich viele Systeme von $n+1$ ganzen Zahlen, für welche die arithmetische Summe ihrer Quadrate sich als das Quadrat einer ganzen Zahl erweist.

Wird $\varepsilon_i = \dfrac{a_i}{a_0}$ und, zur Vermeidung von Brüchen, $t_i = a_0 u_i$ gesetzt, so tritt die Gleichung (6) unter die etwas allgemeinere Form

(8) $$a_0 (a_0\,\Sigma\,a_i u_i^2 - 1)^2 + a_1 (2\,a_0 u_1)^2 + a_2 (2\,a_0 u_2)^2 + \ldots + a_n (2\,a_0 u_n)^2 \equiv a_0 (a_0\,\Sigma\,a_i u_i^2 + 1)^2\,*$$

4. Die Gleichungen (2), (5) und verwandte oder auch die Gleichung (6) für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_n = 1$ stellen den einrechtwinkligen zweidimensionalen (d. h. ebenen) rationalen Dreiecken zweirechtwinklige dreifach ausgedehnte (räumliche, unebene, windschiefe) rationale Vierecke und stellen ihnen allgemein rationale $(n-1)$-rechtwinklige n-dimensionale $(n+1)$-Ecke an die Seite.

---

* Durch die Gleichung (8) wird für beliebig gewählte Zahlen $a_0, a_1, \ldots a_n$ die Aufgabe gelöst, ganze Zahlen $A_0, A_1, \ldots A_n$ zu finden, so dass das Aggregat vielfacher Quadrate $\Sigma\,a_i A_i^2$ gleich einem bedingten Vielfachen einer anderen Quadratzahl, nämlich $= a_0 A^2$ werde. Die Aufgabe, die Zahlen A_i so zu ermitteln, dass jenes Aggregat gleich einem nicht bedingten Vielfachen $a A^2$ werde, kann mindestens nicht in voller Unbeschränktheit gestellt werden, da beispielsweise a nicht negativ sein dürfte, wenn sämmtliche a_i positiv gewählt sind. Durch die triviale Gleichung

$$\Sigma\,a_i (a A_i)^2 \equiv a^2\,\Sigma\,a_i A_i^2$$

erledigt sich die Aufgabe, ganze Zahlen $B_i = a A_i$ so zu finden, dass das Aggregat $\Sigma\,a_i B_i^2$ sich als bedingtes Vielfache einer nicht bedingten Quadratzahl a^2 erweise.

II. Parameterdarstellungen quadratischer Mannichfaltigkeiten.

5. Mit jeder der im vorhergehenden Abschnitt auf 1 gebrachten Identitäten geht offenbar rationale Parameterdarstellung einer »centralen« Mannichfaltigkeit zweiter Ordnung Hand in Hand. So liefert die Gleichung (2) vermöge des Ansatzes

$$\frac{x}{a} = \frac{u^2-1}{u^2+1} \cdot \frac{v^2-1}{v^2+1}, \quad \frac{y}{b} = \frac{u^2-1}{u^2+1} \cdot \frac{2v}{v^2+1}, \quad \frac{z}{c} = \frac{2u}{u^2+1}$$

das Ellipsoid
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \quad \text{u. s. f.}$$

Die Identität (7) bietet den Vortheil, die centralen Mannichfaltigkeiten gleicher Ausdehnung nach formal übereinstimmenden Gesetzen zu erledigen. Vermöge ihrer ist beispielsweise für $n = 2$, und wenn

$$\frac{x}{a} = \frac{\varepsilon u^2 + \varepsilon' v^2 - 1}{\varepsilon u^2 + \varepsilon' v^2 + 1}, \quad \frac{y}{b} = \frac{2u}{\varepsilon u^2 + \varepsilon' v^2 + 1}, \quad \frac{z}{c} = \frac{2v}{\varepsilon u^2 + \varepsilon' v^2 + 1} \tag{9}$$

angenommen wird,

$$\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} + \varepsilon' \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

und es ist sonach lediglich eine Frage der Vorzeichen $\varepsilon, \varepsilon'$, ob durch die Gleichungen (9) die eine oder die andere der Mittelpunktflächen dargestellt wird.

5a. Durch den Ansatz (9), der die Betrachtung auf Gebilde des dreifach ausgedehnten Raumes einschränkt, wird eine Abbildung der Flächen zweiter Ordnung auf die uv-Ebene vermittelt; wir verweilen in Kürze bei einigen Besonderheiten, die ihr eigen sind.

Den Gleichungen

$$\frac{x}{a} = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}, \quad \frac{y}{b} = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \quad \frac{z}{c} = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}$$

— um etwa weiterhin beim Ellipsoid stehen zu bleiben — ordnen sich die Umkehrungsformeln zu

$$u^2 = \frac{c^2 y^2}{c^2 y^2 + b^2 z^2} \cdot \frac{a+x}{a-x}, \quad v^2 = \frac{b^2 z^2}{c^2 y^2 + b^2 z^2} \cdot \frac{a+x}{a-x}.$$

Die Abbildung ist daher ein-vierdeutig; derart indessen, dass sie sich lediglich innerhalb einer einfachen Gruppirung von Punkten und Bildpunkten zu je vieren bewegt: je vier Punkten $\eta u, \eta' v$ $(\eta = \pm 1, \eta' = \pm 1)$ entsprechen eindeutig vier Punkte $x, \eta y, \eta' z$, jedem von diesen ununterschiedlich jene vier ersten Punkte wieder.

Die Scheitel a, o, o und $-a, o, o$ des Ellipsoids mögen A, A' heissen, die Berührungsebenen in ihnen beziehlich mit e, e' bezeichnet sein.

Die in die yz-Ebene, die zx- und die xy-Ebene entfallenden Hauptschnitte der Fläche bilden sich in gleicher Reihenfolge in den Einheitskreis $u^2 + v^2 = 1$, in die Axe $u = o$ und in $v = o$ ab; es empfiehlt sich deshalb, die Bildebene normal zur x-Axe zu stellen — also sie etwa in c' anzulegen — und die Spur der xy-Ebene in ihr als u-, die Spur der xz-Ebene als v-Axe zu wählen. Den Schnittpunkten der genannten Bildcurven entsprechen die Scheitel der Fläche. Der Scheitel A macht eine Ausnahme, insofern sein Bild vollständiger in dem Kreise von unendlich grossem Radius zu suchen ist: man hat $u^2 + v^2 = \infty$ zu setzen, wenn x, y, z zu a, o, o werden sollen. Und wie der Flächenpunkt A, so zeigen auch die seinem Bilde angehörigen imaginären Kreispunkte der uv-Ebene ein Ausnahmeverhalten; jedem von ihnen entspricht eine der beiden imaginären geradlinigen Erzeugenden des Ellipsoids, die sich in A schneiden. In der That mag man jene imaginären Kreispunkte als die — von s unabhängigen — Grenzlagen ansehen, denen die Schnitte von $pu + qv + 1 = 0$ mit dem Geradenpaar $u + \eta i v + s = 0$ $(\eta = \pm 1)$ für $\lim p = 0 = \lim q$ zustreben; als ihre Bilder auf der Fläche erscheinen dann die — von s abhängigen — Punkte $a, -\frac{b}{s}, -\eta i \frac{c}{s}$, und diese erfüllen in ihrer Gesammtheit das Geradenpaar $\frac{x}{a} = 1$, $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$.

Die Bilder der vier reellen Kreispunkte des Ellipsoids sind die Punkte $0, \frac{\pm\sqrt{a^2 - c^2} \pm \sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{b^2 - c^2}}$ der uv-Ebene; die Zuordnung ist des genaueren dahin zu verstehen, dass den Punkten

$$0, \quad \frac{\eta\sqrt{a^2 - c^2} + \eta'\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{b^2 - c^2}} \qquad (\eta = \pm 1, \ \eta' = \pm 1)$$

eindeutig die Flächenpunkte

$$\eta\eta' a \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad 0, \quad \eta c \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}$$

entsprechen.

5 b. Ebene Schnitte des Ellipsoids bilden sich in Kreise ab, insbesondere jeder Schnitt der Fläche mit einer Ebene

$$\alpha \frac{x}{a} + \beta \frac{y}{b} + \gamma \frac{z}{c} + \delta = 0$$

in den Kreis

$$(\alpha + \delta)(u^2 + v^2) + 2\beta u + 2\gamma v - (\alpha - \delta) = 0$$

oder

$$\left(u + \frac{\beta}{\alpha + \delta}\right)^2 + \left(v + \frac{\gamma}{\alpha + \delta}\right)^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2}{(\alpha + \delta)^2} .$$

Werden die Schnitte durch den Scheitel A geführt $(\alpha = -\delta)$, so arten die Gleichungen der Bildkreise in $\beta u + \gamma v + \delta = 0$, die Kreise in die Gesammtheit der Geraden der uv-Ebene aus.

Fasst man die schneidenden Ebenen zu Ebenenbüscheln, ihre Schnitte zu »Schnittbüscheln« zusammen, so ordnen sich die Bildkreise natürlich zu Büscheln, deren Grundpunkte jedesmal die Schnitte der Fläche mit der Axe des betreffenden Ebenenbüschels abbilden. Ist eine solche Axe dargestellt als Schnitt der beiden Ebenen

$$\alpha \frac{x}{a} + \beta \frac{y}{b} + \gamma \frac{z}{c} + \delta = 0, \quad \alpha' \frac{x}{a} + \beta' \frac{y}{b} + \gamma' \frac{z}{c} + \delta' = 0,$$

und sind demgemäss

$$u^2 + v^2 + 2 \frac{\beta}{\alpha + \delta} u + 2 \frac{\gamma}{\alpha + \delta} v - \frac{\alpha - \delta}{\alpha + \delta} = 0,$$

$$u^2 + v^2 + 2 \frac{\beta'}{\alpha' + \delta'} u + 2 \frac{\gamma'}{\alpha' + \delta'} v - \frac{\alpha' - \delta'}{\alpha' + \delta'} = 0$$

die Grundkreise des zugeordneten Bildbüschels, so erhalten — für $(\gamma\,\alpha') = \gamma\,\alpha' - \gamma'\alpha$ u. s. f. — Mittellinie (Centrale) und gemeinsame Sehne (Chordale) aller Kreise des Büschels beziehlich die Gleichungen

$$\{(\gamma\,\alpha') + (\gamma\,\delta')\}\, u - \{(\beta\,\alpha') + (\beta\,\delta')\}\, v + (\gamma\,\beta') = 0$$

und

$$\{(\beta\,\alpha') + (\beta\,\delta')\}\, u + \{(\gamma\,\alpha') + (\gamma\,\delta')\}\, v - (\alpha\,\delta') = 0.$$

Diese geben ungezwungenen Aufschluss über das Verhalten eines Bildbüschels bei allen besonderen Lagen der Schnittbüschelaxe, die man etwa der Beachtung werth finden möchte.

5 c. Hinsichtlich der beiden soeben durch ihre Gleichungen festgelegten Kreise ist, wie man leicht erkennt,

$$\alpha\,\alpha' + \beta\,\beta' + \gamma\,\gamma' = \delta\,\delta'$$

die Bedingung dafür, dass sie sich unter rechten Winkeln schneiden*. Diese Bedingung nimmt die Form an

$$\frac{x'\,x''}{a^2} + \frac{y'\,y''}{b^2} + \frac{z'\,z''}{c^2} = 1,$$

wenn es sich um die Bilder von Schnitten handelt, die durch zwei Ebenen

$$\frac{x'\,x}{a^2} + \frac{y'\,y}{b^2} + \frac{z'\,z}{c^2} = 1, \qquad \frac{x''\,x}{a^2} + \frac{y''\,y}{b^2} + \frac{z''\,z}{c^2} = 1$$

hervorgerufen werden. D. h.

Wenn von zwei der Fläche begegnenden Ebenen eine jede durch den Pol der anderen geht, so durchsetzen die Bildkreise der Schnitte einander rechtwinklig.

In der gedachten Wechselbeziehung befinden sich je zwei Ebenen, die durch polar conjugirte Geraden gehen; und man hat also weiter:

Entsprechen sich die Axen l, m zweier Schnittbüschel mit Bezug auf das Ellipsoid als conjugirte Polaren, so entfallen die Kreise eines jeden der beiden Bildbüschel in die

* Vergl. Casey, On Bicircular Quartics; Transactions of the Royal Irish Academy, Bd. 24, S. 457.

Orthogonalkreise des anderen. Tritt die Axe l in die Ebene e ein ($x' = x'' = a$), so verbindet m den Scheitel A mit dem Berührungspunkt T der Tangentialebene t, welche — neben e — durch l an das Ellipsoid gelegt werden kann.

Behandelt man l in diesem Falle als die Gerade

$$\frac{x}{a} - 1 = 0, \quad \frac{x}{a} - 2\beta\frac{y}{b} - 2\gamma\frac{z}{c} + 1 = 0$$

und eine beliebige durch l hindurchgehende Ebene in der Gleichungsform

$$(1 + \lambda)\frac{x}{a} - 2\beta\frac{y}{b} - 2\gamma\frac{z}{c} + 1 - \lambda = 0,$$

so erhält der Kreis, welcher den Schnitt dieser Ebene abbildet, die Gleichung

$$(u - \beta)^2 + (v - \gamma)^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \lambda,$$

und man sieht:

Liegt die Axe eines Schnittbüschels in der Tangentialebene des Scheitels A, so lagern sich die Bildkreise zu einer Schaar concentrischer Kreise.

Der Mittelpunkt β, γ dieser Kreise ist das Bild des Berührungspunktes T. Denn der veränderliche Kreis der Schaar verjüngt sich zu jenem Mittelpunkt, sobald sich der zugeordnete ebene Schnitt seinerseits in einen Punkt zusammenzieht; und das geschieht für die dem betrachteten Schnittbüschel angehörige Tangentialebene t.

Das Bild des Schnittbüschels m besteht in diesem Fall aus dem Strahlbüschel, dessen Träger der Mittelpunkt der concentrischen Kreise ist. Denn weil die Schnitte des Büschels durch T gehen, so gehen ihre Bilder durch den Bildpunkt von T; und weil die Schnitte den Scheitel A enthalten, so sind ihre Bilder gerade Linien.

Was von dem Mittelpunkt jeder Schaar von concentrischen Kreisen gilt, hat für den Mittelpunkt jedes beliebigen Einzelkreises Geltung; und sonach ist in Vorstehendem überhaupt ein constructives Verfahren gewonnen, nach welchem man zu jedem ebenen Schnitt des Ellipsoids — und zwar durch Vermittlung der Gerade l, in der die Ebene des Schnitts die Tangentialebene e schneidet — den Flächenpunkt T finden kann, der dem Mittelpunkt des zugeordneten Bildkreises entspricht.

Rückt l innerhalb e in's Unendliche, so stellen sich die Ebenen des Büschels l normal zur x-Axe; diese wird ihrerseits zur Trägerin des Büschels m. Der gemeinsame Mittelpunkt aller Kreise, die den Büschel l abbilden, tritt alsdann, ebenso wie der mit diesem Mittelpunkt vereinigt gelegene Träger des Strahlbüschels, in welchem der Schnittbüschel m sein Bild findet, in den Nullpunkt der uv-Ebene ein.

Ist l eine Tangente in A, etwa

$$\frac{x}{a} - 1 = 0, \quad \beta\frac{y}{b} + \gamma\frac{z}{c} = 0,$$

und demgemäss m die conjugirte Tangente

$$\frac{x}{a} - 1 = 0, \quad \gamma \frac{y}{b} - \beta \frac{z}{c} = 0,$$

so arten die Bilder der Schnittbüschel l und m vollends in zwei zu einander rechtwinklig gestellte Schaaren von parallelen Geraden aus; denn dem Schnitt der Fläche mit der Ebene

$$\lambda \frac{x}{a} + \beta \frac{y}{b} + \gamma \frac{z}{c} - \lambda = 0$$

entspricht die Bildcurve

$$\beta u + \gamma v - \lambda = 0,$$

und dem Schnitt mit

$$\mu \frac{x}{a} + \gamma \frac{y}{b} - \beta \frac{z}{c} - \mu = 0$$

das Bild

$$\gamma u - \beta v - \mu = 0.$$

5 d. Die Schnitte der Fläche mit anderen Flächen zweiter Ordnung bilden sich allgemein in Curven vierter Ordnung ab, die in den imaginären Kreispunkten Doppelpunkte besitzen*. Enthalten die schneidenden Flächen den Scheitel A, so werden die Bilder Curven dritter Ordnung, die durch jene Kreispunkte hindurchgehen; sie vereinfachen sich zu Curven zweiter Ordnung, wenn die Grundfläche von den schneidenden Flächen in A berührt wird. Als diese Flächen kann man im letzteren Falle unbeschadet der Allgemeinheit Kegel wählen, deren Scheitel in A liegen.

Die Bilder beispielsweise der Krümmungslinien des Ellipsoids als seiner Schnitte mit den confocalen Flächen

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1$$

sind die Curven

$$(u^2 + v^2)^2 + 2 \frac{2a^2 - b^2 + \lambda}{b^2 + \lambda} u^2 + 2 \frac{2a^2 - c^2 + \lambda}{c^2 + \lambda} v^2 + 1 = 0.$$

Eine jede von ihnen ist die Umhüllung aller Kreise, die, aus den Punkten der Curve

$$(a^2 - c^2)(b^2 + \lambda) u^2 + (a^2 - b^2)(c^2 + \lambda) v^2 + (a^2 - b^2)(a^2 - c^2) = 0$$

als ihren Mittelpunkten beschrieben, den Kreis $u^2 + v^2 = 1$ rechtwinklig durchsetzen. Jene Kreise bilden die Schnitte ab, deren Ebenen normal zur yz-Ebene gestellt sind und berührend an die Krümmungslinie herantreten; der Ort der Mittelpunkte seinerseits ist Bild der Curve, nach welcher das Ellipsoid von dem Kegel

$$(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)\left(\frac{x}{a} - 1\right)^2 + (a^2 - c^2)(b^2 + \lambda)\frac{y^2}{b^2} + (a^2 - b^2)(c^2 + \lambda)\frac{z^2}{c^2} = 0$$

geschnitten wird.

5 e. Wird $a = b = c = 1$, so ist die behandelte Abbildung keine andere als die stereographische Projection, vermöge deren die Kugel vom Radius 1 aus einem Pol auf die zugehörige Gleicherebene ausgebreitet wird.

* Man vergleiche über diese Curven die erwähnte Abhandlung von Casey.

6. Für $$t = \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} = i\,.\,\frac{e^{\frac{\varphi}{2}i}+e^{-\frac{\varphi}{2}i}}{e^{\frac{\varphi}{2}i}-e^{-\frac{\varphi}{2}i}}$$ ist

$$\frac{t^2-1}{t^2+1} = \frac{e^{\varphi i}+e^{-\varphi}}{2} = \cos\varphi, \qquad \frac{2t}{t^2+1} = \frac{e^{\varphi i}-e^{-\varphi i}}{2i} = \sin\varphi;$$

und für $$t = \operatorname{Cotg}\frac{\varphi}{2} = \frac{e^{\frac{\varphi}{2}}+e^{-\frac{\varphi}{2}}}{e^{\frac{\varphi}{2}}-e^{-\frac{\varphi}{2}}}$$ beziehlich

$$\frac{t^2+1}{t^2-1} = \frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2} = \operatorname{Cos}\varphi, \qquad \frac{2t}{t^2-1} = \frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2} = \operatorname{Sin}\varphi.$$

Geeignete Verwendung dieser Beziehungen liefert transscendente Parameterdarstellungen, wie sie mindestens theilweise altbekannt sind. Insbesondere treten auf Grund der Gleichungen (2), (3), (4) das Ellipsoid und die beiden Hyperboloide unter die analytischen Darstellungen

$$x = a\cos\varphi\cos\psi,\quad y = b\cos\varphi\sin\psi,\quad z = c\sin\varphi;$$
$$x = a\operatorname{Cos}\varphi\cos\psi,\quad y = b\operatorname{Cos}\varphi\sin\psi,\quad z = c\operatorname{Sin}\varphi;$$
$$x = a\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Cos}\psi,\quad y = b\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Sin}\psi,\quad z = c\operatorname{Sin}\varphi.$$

III. Involutorische lineare Transformationen.

a. Allgemeine Betrachtungen.

7. Unter i, k, p, q seien im Folgenden ausnahmslos individuelle Indices, entnommen der Zahlenreihe $1, 2, \ldots n$, verstanden; ik bedeute eine Combination zu zweien bei Ausschluss, pq irgend eine solche bei Zulassung von Wiederholungen. Die Ausdrücke $\alpha_x, \alpha'_x, \beta_x, \alpha_y, \alpha_v$ und ähnliche seien durch die Gleichungen

$$\alpha_x = \Sigma\,\alpha_p\,x_p,\quad \alpha'_x = \Sigma\,\alpha'_p\,x_p,\quad \beta_x = \Sigma\,\beta_p\,x_p,\quad \alpha_y = \Sigma\,\alpha_p\,y_p,\quad \alpha_v = \Sigma\,\alpha_p\,v_p$$

und verwandte definirt. Die allgemeine — homogene oder nicht homogene — quadratische Form schliesslich $\Sigma_p\,\Sigma_q\,a_{pq}\,x_p\,x_q$ werde in bekannter symbolischer Schreibweise durch

$$\Sigma_p\,\Sigma_q\,a_{pq}\,x_p\,x_q = \alpha_x^2 = \alpha'^2_x = \alpha''^2_x = \ldots = \beta_x^2 = \beta'_x = \beta''^2_x = \ldots$$

wiedergegeben, vermöge deren die Coefficienten a_{pq} in Gestalt der Symbole $\alpha_p\,\alpha_q = \alpha'_p\,\alpha'_q = \ldots = \beta_p\,\beta_q = \ldots$ behandelt werden.

8. Die quadratische Mannichfaltigkeit

$$\alpha_y^2 = \alpha_x^2 \tag{10}$$

hat mit der Gerade »von der Richtung v«

$$y_p = v_p\,t + x_p \quad (p = 1, 2, \ldots n) \tag{11}$$

den Punkt $x_1, x_2, \ldots x_n$ oder x gemein. Der zweite, hiernach rational bestimmte Schnittpunkt beider, z, findet für den Parameterwerth

$$t = -\frac{2\,\alpha_v\,\alpha_x}{\beta_v}$$

statt und lautet desshalb

$$z_p = \frac{x_p\, \alpha_v^2 - 2\, v_p\, \alpha_v\, \alpha_x}{\beta_v^2} \quad (p = 1, 2, \ldots n). \tag{12}$$

9. Die lineare Substitution (12) ordnet — bei festgehaltenen x und variirenden v — *jedem* Punkt x der Mannichfaltigkeit (10) auf dem Wege stereographischer Projection nach und nach die Gesammtheit aller $(n-1)$-fach unendlich vielen Punkte z derselben zu; sie führt — bei festgehaltenen v und variirenden x — die Mannichfaltigkeit, und zwar auf $(n-1)$-fach unendlich viele Weisen, dergestalt in sich über, dass zu allen ihren Punkten diejenigen als entsprechend auftreten, welche mit ihnen beziehlich auf Sehnen von gemeinsamer Richtung liegen.

10. Rücksichtlich des n-dimensionalen Raumes überhaupt kommt der Substitution (12) die Eigenschaft zu: einmal, dass sie für alle Punkte ξ der linearen Mannichfaltigkeit

$$\alpha_v\, \alpha_\xi = 0 \tag{13}$$

zur identischen Transformation wird, insofern sie sich für deren Gesammtheit auf $z_p = \xi_p$ reducirt; und sodann, dass sie jedem Punkt $x = \xi + \tau v$ — d. h. vollständiger $x_p = \xi_p + \tau v_p$ für $p = 1, 2, \ldots n$ — den Punkt $z = \xi - \tau v$ zuordnet, so oft (wie zuvor) ξ ein übrigens beliebiger Punkt der Mannichfaltigkeit (13) ist. Wie denn die Forderung der Gleichung $\alpha^2_{\xi - \tau v} = \alpha^2_{\xi + \tau v}$ offenbar die Relation $\alpha_v\, \alpha_\xi = 0$ bedingt, und umgekehrt jene Gleichung eine Trivialität ausdrückt, wenn diese Bedingung erfüllt ist.

Die lineare Mannichfaltigkeit (13) ist mit Bezug auf die quadratische Mannichfaltigkeit (10) polar conjugirt zu der Richtung v. Die Punkte $\xi + \tau v$ und $\xi - \tau v$ liegen auf der durch ξ nach der Richtung v geführten Gerade gleichweit von dem letzteren Punkte entfernt; man mag beide *polar conjugirt* mit Bezug auf (13) nennen. Das erkannte Verhalten lässt sich alsdann in den Satz fassen:

Die lineare Transformation $z_p = \frac{x_p\, \alpha_v^2 - 2\, v_p\, \alpha_v\, \alpha_x}{\beta_v}$ *hat die Eigenschaft, für den ganzen* n*-dimensionalen Raum involutorisch zu sein; dergestalt, dass sie jeden Punkt der Mannichfaltigkeit* $\alpha_v\, \alpha_x = 0$ *sich selber und jedem anderen Raumpunkt den polar conjugirten Punkt zuordnet.*

11. Der besprochene involutorische Charakter prägt sich besonders scharf auch in dem Umstande aus, dass eine einmal wiederholte Anwendung der Transformation die identische Substitution ergibt, oder dass die Umkehrung des Gleichungssystems (12) formal durchaus mit diesem System selber übereinstimmt.

In der That hat man

$$\alpha'_v\, \alpha'_z = - \alpha'_v\, \alpha'_x,$$

und mit Hülfe dieser Relation verificirt man unschwer, dass die Auflösung der Gleichungen

$$z_p = \frac{x_p\,\alpha_\nu^2 - 2\,\nu_p\,\alpha_\nu\,\alpha_z}{\beta_\nu}$$

in dem Gleichungssystem

$$x_p = \frac{z_p\,\alpha_\nu^2 - 2\,\nu_p\,\alpha_\nu\,\alpha_z}{\beta_\nu}$$

zu Tage liegt.

12. Setzt man zur Abkürzung

(14) $$\frac{\alpha_\nu^2 - 2\,\alpha_\nu\,\alpha_i\,\nu_i}{\beta_\nu} = \gamma_{ii}, \quad \frac{-2\,\alpha_\nu\,\alpha_k\,\nu_i}{\beta_\nu^2} = \gamma_{ik},$$

so stellt sich die Substitution (12) in der Gestalt dar

(15) $$z_p = \Sigma_q\,\gamma_{pq}\,x_q. -$$

Die Coëfficienten γ erweisen sich in erster Linie als durch die Beziehung verknüpft

(16) $$\frac{\alpha_\nu\,\alpha_q}{\nu_q}\,\gamma_{qp} = \frac{\alpha_\nu\,\alpha_p}{\nu_p}\,\gamma_{pq}.$$

Ausserdem gelten für sie die kaum minder leicht erweislichen Relationen

(17) $$\Sigma_q\,\frac{\alpha_\nu\,\alpha_q}{\nu_q}\,\gamma_{qp} = \frac{\alpha_\nu\,\alpha_p}{\nu_p},$$ (18) $$\Sigma_q\,\frac{\alpha_\nu\,\alpha_q}{\nu_q}\,\gamma_{qi}\,\gamma_{qk} = 0,$$

neben denen, wegen (16), die Gleichungen

(17a) $$\Sigma_q\,\frac{\nu_q}{\beta_\nu\,\beta_q}\,\gamma_{pq}^2 = \frac{\nu_p}{\beta_\nu\,\beta_p},$$ (18a) $$\Sigma_q\,\frac{\nu_q}{\beta_\nu\,\beta_q}\,\gamma_{iq}\,\gamma_{kq} = 0$$

auftreten.

Den Gleichungssystemen (17), (17a) endlich oder einem von beiden unter erneuter Verwendung von (16), lassen sich in nochmaliger Summation die Beziehungen entnehmen

(19) $$\Sigma_p\,\Sigma_q\,\frac{\alpha_\nu\,\alpha_q}{\nu_q}\,(\nu_p\,\gamma_{qp})^2 = \alpha_\nu = \Sigma_p\,\Sigma_q\,\frac{\nu_q}{\beta_\nu\,\beta_q}\,(\alpha_\nu\,\alpha_p\,\gamma_{pq})^2;$$

(20) $$\Sigma_p\,\Sigma_q\,\frac{\alpha_\nu\,\alpha_q}{\beta_\nu\,\beta_p}\cdot\frac{\nu_p^{i+1}}{\nu_q}\,\gamma_{qp}^2 = \Sigma_p\,\nu_p^i = \Sigma_p\,\Sigma_q\,\frac{\alpha_\nu\,\alpha_p}{\beta_\nu\,\beta_q}\,\nu_p^{i-1}\,\nu_q\,\gamma_{pq}^2.$$

13. Der Substitutionsdeterminante

$$\Gamma = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \cdot & \gamma_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{n1} & \cdot & \gamma_{nn} \end{vmatrix}$$

gibt man behufs weiterer Behandlung zweckmässig die Gestalt

$$\Gamma = \begin{vmatrix} \frac{\nu_1}{\nu_1}\,{}_{11} & \frac{\nu_2}{\nu_1}\,\gamma_{12} & \cdot & \frac{\nu_n}{\nu_1}\,\gamma_{1n} \\ \frac{\nu_1}{\nu_2}\,\gamma_{21} & \frac{\nu_2}{\nu_2}\,\gamma_{22} & \cdot & \frac{\nu_n}{\nu_2}\,\gamma_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\nu_1}{\nu^n}\,\gamma_{n1} & \frac{\nu_2}{\nu_n}\,\gamma_{n2} & \cdot & \frac{\nu_n}{\nu_n}\,\gamma_{nn} \end{vmatrix}.$$

Eine Folge weniger selbstverständlicher Schritte lehrt hiernächst, dass stattfindet

(21) $$\Gamma = -1;$$

und unsere Substitution kennzeichnet sich somit als uneigentliche Transformation.

14. Unter Γ_{pq} sei die Unterdeterminante von Γ verstanden, welche dem Element γ_{pq} adjungirt ist; es sei also, um jeden Zweifel hinsichtlich des Vorzeichens auszuschliessen,

$$\Gamma_{pq} = \begin{vmatrix} \gamma_{1,1} & \cdot & \gamma_{1,q-1} & \gamma_{1,q+1} & \cdot & \gamma_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{p-1,1} & \cdot & \gamma_{p-1,q-1} & \gamma_{p-1,q+1} & \cdot & \gamma_{p-1,n} \\ \gamma_{p+1,1} & \cdot & \gamma_{p+1,q-1} & \gamma_{p+1,q+1} & \cdot & \gamma_{p+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{n,1} & \cdot & \gamma_{n,q-1} & \gamma_{n,q+1} & \cdot & \gamma_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Das Verfahren, welches die Berechnung von Γ vermittelte, findet auch bei den Unterdeterminanten Anwendung. Es ergibt sich

$$\Gamma_{ii} = -\gamma_{ii} \text{ und } \Gamma_{ik} = (-1)^{i+k-1} \cdot \gamma_{ki},$$

also zusammengefasst

(22) $$\Gamma_{pq} = (-1)^{p+q-1} \gamma_{qp};$$

natürlich, wenn man will, auch

(22 a) $$\Gamma_{pq} = (-1)^{p+q-1} \frac{\alpha_\nu \alpha_p}{\nu_p} \cdot \frac{\nu_q}{\beta_\nu \beta_q} \cdot \gamma_{pq}.$$

Diese Gleichungen thun dar, dass die Unterdeterminanten von Γ durch Beziehungen von wesentlich dem nämlichen Charakter mit einander verknüpft sind, wie die Elemente jener Determinante selbst.

b. »Schiefwinklige« Transformationen.

15. Man legt der Untersuchung statt der allgemeinen Gleichung (10) die besondere Relation

(10*) $$\Sigma_p a_p y_p^2 = \Sigma_p a_p x_p^2$$

zu Grunde, wenn man $\alpha_i \alpha_i, \alpha_i \alpha_k$ beziehlich zu a_i und Null vereinfacht; es wird dann $\alpha_\nu \alpha_p$ zu $a_p v_p$, und man gewinnt an Stelle von (12) bis (20) die folgenden Formelgruppen, die übrigens auch ohne Mühe direct würden abgeleitet werden können.

Die lineare Substitution (12) geht über in

(12*) $$z_p = \frac{x_p \Sigma a_q v_q^2 - 2 v_p \Sigma a_q v_q x_q}{\Sigma a_q v_q^2};$$

sie vermittelt auf $(n-1)$-fach unendlich viele Arten eine Transformation des Aggregats $\Sigma a_p x_p^2$ in sich, wie denn in der That identisch statthat

$$\Sigma_p a_p \left(\frac{x_p \Sigma_q a_q v_q - 2 v_p \Sigma_q a_q v_q x_q}{\Sigma_q a_q v_q^2} \right)^2 = \Sigma_p a_p x_p.$$

Man hat zu setzen

$$(14^*)\qquad \frac{\Sigma a_q v_q^2 - 2 v_i a_i v_i}{\Sigma a_q v_q^2} = c_{ii}, \quad \frac{-2 v_i a_k v_k}{\Sigma a_q v^2} = c_{ik},$$

um für (12*) die anschaulichere Form zu gewinnen

$$(15^*)\qquad z_p = \Sigma_q c_{pq} x_q .$$

Die Beziehungen (16) bis (20) vereinfachen sich zu

$$(16^*)\qquad a_q c_{qp} = a_p c_{pq}.$$

$$(17^*)\qquad \Sigma_q a_q c_{qp}^2 = a_p; \qquad (18^*)\qquad \Sigma_q a_q c_{qi} c_{qk} = 0$$

$$(17a^*)\qquad \Sigma_q \frac{1}{a_q} c_{pq}^2 = \frac{1}{a_p}; \qquad (18a^*)\qquad \Sigma_q \frac{1}{a_q} c_{iq} c_{kq} = 0.$$

$$(19^*)\qquad \Sigma\Sigma a_q (v_p c_{qp})^2 = \Sigma a_p v_p^2 = \Sigma\Sigma \frac{1}{a_q} (a_p v_p c_{pq})^2.$$

$$(20^*)\qquad \Sigma\Sigma \frac{a_q}{a_p} v_p c_{qp}^2 = \Sigma_p v_p^2 = \Sigma\Sigma \frac{a_p}{a_q} v_p^2 c_{pq}^2.$$

Die Substitutionsdeterminante

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdot & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \cdot & c_{nn} \end{vmatrix}$$

hat nach wie vor den Werth -1; ihre Unterdeterminanten C_{pq} hängen von den Elementen nach der allgemeinen Gleichung ab

$$(22^*)\qquad C_{pq} = (-1)^{p+q-1} c_{qp} = (-1)^{p+q-1} \frac{a_p}{a_q} c_{pq},$$

und sie stehen also neuerdings in ähnlichem Zusammenhang unter einander wie eben diese Elemente.

16. Der involutorische Charakter der Substitution (12) bleibt bei ihrem Uebergang in (12*) gleichfalls unzerstört; die Umkehrung der Gleichungen (12*) besteht in den Gleichungen

$$x_p = \frac{z_p \Sigma a_q v_q^2 - 2 v_p \Sigma a_q v_q z_q}{\Sigma a_q v_q^2}.$$

Die angestellten Ueberlegungen gelten für **jede** Mannichfaltigkeit von der Form (10*), d. h. sie gelten für jedes beliebig gegebene Werthsystem $a_1, a_2 \ldots a_n$. Man wird daher vielleicht die Mannichfaltigkeit

$$(13^*)\qquad \Sigma a_q v_q \xi_q = 0$$

als der Richtung v mit Bezug auf die Zahlengruppe a statt mit Bezug auf die quadratische Mannichfaltigkeit (10*) polar conjugirt bezeichnen wollen; um so lieber, als die Transformation (12*) auf den ganzen Raum Anwendung findet und deshalb ohne weiteres aus der Beziehung zu (10*) losgelöst werden kann, auch wenn sie vermöge ihrer gefunden wurde.

17. Ein anderer Umstand tritt, entsprechend der Behandlung der quadratischen Mannichfaltigkeit in der kanonischen Gleichungsform (10^*), gegenüber den bis dahin in Betracht gezogenen Specialisirungen neu in die Erscheinung.

Die linearen Mannichfaltigkeiten

$$(23) \qquad \left| \begin{array}{l} M_1 \equiv c_{11} x_1 + c_{12} x_2 + \ldots + c_{1n} x_n = 0, \\ M_2 \equiv c_{21} x_1 + c_{22} x_2 + \ldots + c_{2n} x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ M_n \equiv c_{n1} x_1 + c_{n2} x_2 + \ldots + c_{nn} x_n = 0 \end{array} \right.$$

haben nach dem Maasse ihrer Ausdehnung zu je $n - 1$ eine Gerade gemein. Dadurch dass man M_p ausschaltet und die übrigen zum Schnitt bringt, werde die Gerade g_p gewonnen; deren »Richtungswinkel« mögen mit

$$\varphi_{p1}, \varphi_{p2}, \ldots \varphi_{pn}$$

bezeichnet sein. Die Analogie mit dem, was im dreifach ausgedehnten Raum für die Richtungscosinus der drei Schnittgeraden von drei Ebenen Geltung hat, leitet dazu an, $\cos \varphi_{pq}$ vorbehaltlich eines mit q regelmässig fortschreitenden Vorzeichenwechsels proportional zu setzen mit C_{pq}. Der Sinn von g_p werde so gewählt, dass statthabe

$$(24) \qquad \cos \varphi_{pq} = \frac{(-1)^{p+q-1}}{C_p} \cdot C_{pq},$$

für

$$C_p^2 = \Sigma_q C_{pq}^2.$$

Es ist dann auch, wegen (22^*),

$$\cos \varphi_{pq} = \frac{a_p}{C_p} \cdot \frac{c_{pq}}{a_q},$$

und somit

$$\Sigma_q a_q \cos \varphi_{pq} \xi_q = \frac{a_p}{C_p} \Sigma_q c_{pq} \xi_q,$$

so dass jenes verschwindet, wenn dieses gleich Null ist. Das heisst aber:

Jede der n linearen Mannichfaltigkeiten M_p ist mit Bezug auf die Zahlengruppe a polar conjugirt zu der Schnittgerade g_p aller übrigen.

In dieser Thatsache mag ein Grund dafür gefunden werden, die Substitution (12^*) als »schiefwinklige« Transformation zu bezeichnen.

18. Mit der Specialisirung von α_x^2 zu $\Sigma a_p x_p^2$ ist man in den Kreis der anfänglichen Betrachtungen über Aggregate von Quadraten wieder eingetreten, und die angestellten Ueberlegungen finden daher auch auf sie Anwendung. So in folgendem: die linke Seite der Indentität (6) stellt einen besonderen Fall der Form $\Sigma a_p x_p^2$ dar, und sie lässt deshalb Transformationen in dem gleichen Umfange wie diese zu. Das besagt beispielsweise für

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_n = 1:$$

Jede rationale Quadratzahl von dem Aufbau $\left(\sum_1^n l_i^2 + 1\right)^2$ kann auf unendlich viele Arten als arithmetische Summe von $n+1$ rationalen Quadraten dargestellt werden.

c. Orthogonale Substitutionen.

19. Wie die Gleichungssysteme (17*) bis (18a*) ersichtlich machen, liefert die Transformation (12*) dadurch, dass angenommen wird

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_m,$$

$(n-1)$-fach unendlich viele involutorische orthogonale Substitutionen in der gemeinsamen Fassung

$$z_p = \frac{x_p \Sigma v_q^2 - 2\, v_p \Sigma v_q x_q}{\Sigma v_q^2}, \quad x_p = \frac{z_p \Sigma v_q^2 - 2\, v_p \Sigma v_q z_q}{\Sigma v_q^2}. \tag{25}$$

Diese Substitutionen, behandelt als $z_p = \Sigma_q b_{pq} x_q$, sind dadurch ausgezeichnet, dass durchgängig $b_{ki} = b_{ik}$ ist; sie werden sich mit Rücksicht hierauf — ausgenommen für $n = 2$, in welchem Falle $\frac{1}{2} n(n-1) = n-1$ — nicht aus den allgemeinen orthogonalen Substitutionen ableiten lassen, die von Herrn Cayley in Crelles Journal Bd. 32, S. 121 f. mitgetheilt worden sind.* Im übrigen nehmen sie, wie erforderlichenfalls die bei den schiefwinkligen Transformationen entwickelten Formeln durch die gedachte Specialisirung sofort ergeben, an den bekannten Eigenschaften aller orthogonalen Substitutionen Theil.**

20. Andere Beziehungen sind unseren orthogonalen Substitutionen eigenthümlich. Es genüge, das an einem Beispiel im dreidimensionalen Raume zu erläutern. Hier bestehen, mit der Maassgabe, dass

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \sigma^2$$

gesetzt werde, für die Richtungswinkel φ, ψ, χ der Gerade von der Richtung v die Gleichungen

$$\cos\varphi = \frac{v_1}{\sigma}, \quad \cos\psi = \frac{v_2}{\sigma}, \quad \cos\chi = \frac{v_3}{\sigma}.$$

Man wird also, wenn man sechs Winkel r, s, t, u, v, w durch die Vorschrift bestimmt, dass

$$\cos r = -\cos 2\varphi, \quad \cos s = -\cos 2\psi, \quad \cos t = -\cos 2\chi,$$

$$\cos u = -2\cos\psi\cos\chi, \quad \cos v = -2\cos\chi\cos\varphi, \quad \cos w = -2\cos\varphi\cos\psi$$

sei, die jener Gerade zugeordnete involutorische orthogonale Substitution in der übersichtlichen Gestalt schreiben können

* Vgl. Kronecker in den erwähnten Sitzungsberichten S. S. 607, 874, 1065.

** Bezüglich dieser Eigenschaften würde etwa der Abschnitt über lineare Substitutionen in Baltzers »Theorie und Anwendung der Determinanten« zu vergleichen sein.

$$\begin{aligned} x &= x' \cos r + y' \cos w + z' \cos v, & x' &= x \cos r + y \cos w + z \cos v, \\ y &= x' \cos w + y' \cos s + z' \cos u, & y' &= x \cos w + y \cos s + z \cos u, \\ z &= x' \cos v + y' \cos u + z' \cos t, & z' &= x \cos v + y \cos u + z \cos t. \end{aligned}$$

Im Sinne einer Coordinatenverwandlung vermitteln diese Gleichungen den Uebergang von dem rechtwinkligen Coordinatensystem der $x\,y\,z$ zu dem rechtwinkligen System der $x'\,y'\,z'$ und umgekehrt. Die neuen Axen sind dergestalt in das System der alten Axen eingelagert, dass die drei Ebenen gleichnamiger Axen — $x\,x'$, $y\,y'$, $z\,z'$ — die durch den Nullpunkt gehende Gerade von der Richtung r gemein haben, und dass für die Winkel gleichnamiger Axen — $(x\,x')$, $(y\,y')$, $(z\,z')$ — die Beziehungen gelten

$$(x\,x') = |\pi - 2\,\varphi|, \quad (y\,y') = |\pi - 2\,\psi|, \quad (z\,z') = |\pi - 2\,\chi|,$$

in denen wie üblich durch Einschaltung zwischen Verticalstriche Beschränkung auf Absolutwerthe angeordnet wird.