Resultate für den Maschinenbau

[Hauptband]

Redtenbacher, Ferdinand

Heidelberg, 1869

Erster Abschnitt. Geometrie

ERSTER ABSCHNITT.

Geometrie.

Verzeichnung von verschiedenen krummen Linien.

1.

Verzeichnung der Parabel, Fig. 1, Taf. I, *wenn der Scheitel* A, *die Richtung* A x *der Axe, und ein Punkt* M *der Linie gegeben ist.*

Man verzeichne das Rechteck M p A b, theile M b in eine beliebige Anzahl, z. B. in 4 gleiche Theile, theile auch A b in eben so viele, also ebenfalls in 4 gleiche Theile, ziehe von A aus die Linien A 1, A 2, A 3, und durch 1_1, 2_1, 3_1 Parallellinien zur Axe A x; so sind die Punkte I, II, III, in welchen sich diese Linien schneiden, einzelne Punkte der Parabel.

2.

Verzeichnung der Normale, welche einem Punkt II *der Parabel entspricht.* Fig. 1, Taf. I.

Fälle den Perpendikel II p_2, mache A a = A p_2, ziehe a II und errichte auf a II in II einen Perpendikel II q_2, so ist dies die gesuchte Normale.

Die Normallinien, welche den übrigen Punkten III, I, M entsprechen, werden gefunden, wenn man die Perpendikel III p_3, I p_1, M p fällt, $p_3\ q_3 = p_1\ q_1 = p\ q = p_2\ q_2$ macht und die Punkte q_3, q_1, q mit III, I, M verbindet.

Werden diese Normallinien verlängert, bis sich je zwei auf einander folgende schneiden, so sind die Durchschnittspunkte die Mittelpunkte von Kreisbögen A III, III II, II I, I M, aus welchen die Parabel um so genauer zusammengesetzt werden kann, je näher die Punkte A, III, II, I, M bei einander liegen.

3.

Verzeichnung einer Ellipse, deren Axen gegeben sind.

a) Genaues Verfahren. Fig. 2, Taf. I.

Es sei O der Mittelpunkt, O a die halbe grosse, O b die halbe kleine Axe. Beschreibe aus O mit den Halbmessern O b, O a und $Oc = Ob + Oa$ die concentrischen Kreise $b\beta$, $a\alpha$, $c\gamma$, ziehe einen beliebigen Radius O q p r, ziehe durch q eine Parallele zu O a, durch p eine Parallele zu O b, so schneiden sich diese Linien in einem Punkt m der Ellipse; und wenn man m mit r verbindet, so ist dies die zum Punkt m der Ellipse gehörige Normale.

Wiederholt man diese Construction, indem man mehrere Radien von O aus zieht, so erhält man zur Verzeichnung der Ellipse eine Folge von Punkten und die denselben entsprechenden Normalen.

b) Annäherungsverfahren. Fig. 3, Taf. I.

Es sei O der Mittelpunkt, $a a_1$ die grosse, $b b_1$ die kleine Axe der Ellipse.

Mache $Oc = Ob$, $Od = Od_1 = 3\frac{ac}{2}$, $Oe = Oe_1 = 4\frac{ac}{2}$, ziehe $e_1\,d\,m$, $e_1\,d_1\,m_1$, $e\,d\,n$, $e\,d_1\,n_1$, und beschreibe aus den Punkten d, d_1, e, e_1 die Kreisbögen $n\,a\,m$, $n_1\,a_1\,m_1$, $n\,b_1\,n_1$, $m\,b\,m_1$, so bilden diese zusammen eine der Ellipse nahe kommende Linie, vorausgesetzt, dass das Verhältniss zwischen der grossen und kleinen Axe nicht grösser als 2 ist. Ist dieses Verhältniss grösser als 2, so muss die genauere Methode gebraucht werden.

4.

Verzeichnung der Cycloide. Fig. 4, Taf. I.

Es sei 09_1 die Grundlinie, 049 die Hälfte des Erzeugungskreises in seiner anfänglichen Stellung. Man theile den Halbkreis in mehrere, z. B. in 9 gleiche Theile und ziehe die Sehnen 01, 02, 03, 04 . . ., trage die abgewickelte Länge eines der Bögen 01, 12, 23 . . von 0 aus eben so oftmal auf, als die Anzahl der Theile beträgt, in welche der Halbkreis getheilt wurde, und ziehe durch die Punkte 1_1, 2_1, 3_1 . . . parallele Linien zu den Sehnen 01, 02, 03 . . ., so sind die Durchschnittspunkte 1_1, II, III . . . . die Mittelpunkte von Kreisbögen $0\,\alpha$, $\alpha\,a$, $a\,b$ . . ., aus welchen die zu verzeichnende Cycloide um so genauer zusammengesetzt werden kann, in eine je grössere Anzahl Theile der Halbkreis getheilt wurde.

5.

Verzeichnung eines Bogenstückes einer Epicycloide. Fig. 5, Taf. I.

Es sei 06 das gegebene Bogenstück des Grundkreises, für welches das epicycloidische Bogenstück 06_2 verzeichnet werden soll; n das Verhältniss zwischen den Halbmessern des Grundkreises und des Erzeugungskreises.

Man theile das Bogenstück 06 in mehrere, z. B. in 6 gleiche Theile $01 = 12 = 23 = \ldots = a$, nehme ein Bogenstück von der Länge $(n + 1)\,a$, trage dasselbe von 0 aus ebenfalls 6 Mal auf, verbinde die sich ergebenden Punkte 1_1, 2_1, 3_1 .... mit den Punkten 1, 2, 3 ..., und beschreibe aus den Durchschnittspunkten 1, II, III die Kreisbögen 01_2, $1_2\,2_2$, $2_2\,3_2$ ..., so bilden diese zusammen annähernd das zu verzeichnende epicycloidische Bogenstück.

6.

Verzeichnung des Bogenstückes einer Hypocycloide. Fig. 6, Taf. I.

Es sei 05 das gegebene Bogenstück des Grundkreises, für welches das hypocycloidische Bogenstück 05_2 verzeichnet werden soll, n das Verhältniss zwischen den Halbmessern des Grundkreises und des Erzeugungskreises.

Man theile den Bogen 05 in mehrere, z. B. in 5 gleiche Theile $01 = 12 = 23 = \ldots = a$, mache die Bögen $01_1 = 1_1\,2_1 = 2_1\,3_1 = \ldots = (n-1)\,a$, ziehe die Linien $1_1\,1\mathrm{I}$, $2_1\,2\mathrm{II}$, $3_1\,3\mathrm{III}$ .... und beschreibe aus den Punkten 1, I, II, III.. die Kreisbögen 01_2, $1_2\,2_2$, $2_2\,3_2$, $3_2\,4_2$ ..., so bilden diese zusammen das zu verzeichnende hypocycloidische Bogenstück.

Flächen- und Körperberechnung.

7.

Der Flächeninhalt A M p, Fig. 1, Taf. I. *einer Parabel* ist gleich

$$\frac{2}{3}\,A\,p \times M\,p$$

8.

Der Flächeninhalt einer Ellipse

ist gleich dem Produkte aus den beiden Halbaxen in die *Ludolph*sche Zahl $\pi = 3{\cdot}142$.

9.

Simpson's Regel

zur Berechnung des Flächeninhaltes ebener Figuren. Es sei A B C D, Fig. 7, Taf. I. der zu berechnende Flächeninhalt. Man theile A D in eine gerade Anzahl n gleicher Theile $A\,1 = 12 = 23 = \ldots\ldots = e$ und messe die Ordinaten $y_0\ y_1\ y_2 \ldots\ldots y_n$; dann findet man:

$$\text{Flächeninhalt } ABCD = \frac{1}{3}\, e \left\{ y_0 + y_n + 4\,(y_1 + y_3 + y_5 + \ldots\ldots + y_{n-1}) + 2\,(y_2 + y_4 + \ldots\ldots + y_{n-2}) \right\}$$

10.

Die Oberfläche einer Kugel

von dem Halbmesser r ist gleich

$$4\,r^2\,\pi\ \ldots\ (\pi = 3{\cdot}142).$$

11.

Die Oberfläche eines Kugelabschnittes

ist gleich

$$2\,\pi\,r\,a = \pi\,(a^2 + b^2)$$

wobei

r den Halbmesser der Kugel,
a die Höhe des Abschnittes,
b den Halbmesser des Kugelschnittes

bezeichnet.

12.

Der Kubikinhalt einer Pyramide oder eines Kegels

ist gleich $\frac{1}{3}\,A\,h$, wenn A die Grundfläche, h die Höhe des Körpers bezeichnet.

13.

Der Kubikinhalt einer Kugel,

deren Halbmesser r, ist

$$\frac{4}{3}\,r^3\,\pi$$

14.

Der Kubikinhalt eines Kugelabschnittes

ist gleich

$$\frac{\pi}{6} a (3 b^2 + a^2)$$

wobei a die Höhe und b den Halbmesser des Kugelabschnittes bezeichnet.

Die Maschinenorgane in geometrischer Hinsicht.

Rollen.

15.

Benennungen.

Um die Stellung der Rollen und den Lauf des Riemens beschreiben zu können, nennen wir

a) mittlere Ebene einer Rolle: eine Ebene, welche auf der Axe einer Rolle senkrecht steht und durch die Mitte der Rollenbreite geht;

b) mittleren Schnitt: den Kreis, in welchem die mittlere Ebene die Oberfläche der Rolle schneidet;

c) Riemen-Mittel: eine auf dem Riemen gezogene von den Rändern desselben gleich weit abstehende Linie.

16.

Hauptregel für die geometrische Anordnung eines Riementriebes.

Bei der Anordnung eines Riementriebes müssen die folgenden 2 Regeln beobachtet werden: 1) muss die Mittellinie des Riemens, da wo derselbe auf eine Rolle aufläuft, in der mittleren Ebene dieser Rolle liegen; 2) sollen die Leitrollen, wenn solche anzubringen sind, so gestellt werden, dass ihre mittlere Ebene auf beiden Seiten die Mittellinie des Riemens enthält.

17.

Beispiele über Riementriebe.

Nach den in Nummer 16 ausgesprochenen Regeln sind die folgenden Riementriebe angeordnet:

Fig. 8, Taf. I. Die Axen parallel nach gleicher Richtung laufend, die mittleren Ebenen der beiden Triebrollen fallen zusammen.

Fig. 9, Taf. I. Die Axen parallel, nach entgegengesetzter Richtung laufend, die mittleren Ebenen der beiden Rollen fallen zusammen.

Fig. 10, Taf. I. Die Axen parallel, nach gleicher Richtung laufend, die mittleren Ebenen der beiden Rollen nicht zusammenfallend. l, l_1 Leitrollen.

Fig. 1, Taf. II. Rollen auf zwei sich schneidenden Axen. l, l_1 Leitrollen, deren Ort und Stellung gefunden wird wie folgt. Nehme in der Durchschnittslinie L der mittleren Ebenen der Triebrollen zwei beliebige Punkte a, a_1 an, ziehe von denselben Tangenten an die mittleren Schnitte der Triebrollen, und lege die Rollen l, l_1 so, dass die mittleren Schnitte einer jeden von einem Tangentenpaar berührt werden. Werden die Rollen l, l_1 auf diese Weise gestellt, so drücken die Riemen nach normaler Richtung gegen die Rollen und können daher von denselben nicht abgleiten.

Fig. 2, Taf. II. Zwei gegen einander geneigte sich nicht schneidende Axen. Die Durchschnittslinie L der mittleren Ebenen der Triebrollen berührt die mittleren Kreisschnitte der Rollen. Die Bewegung muss nach der Richtung der Pfeile erfolgen (vermöge Regel Nr. 16). Die kürzeste Distanz der Axen muss ungefähr 2 Mal so gross sein, als die grössere der beiden Rollen *).

Fig. 3, Taf. II. Die Axen gegen einander geneigt, sich nicht schneidend. Die Rollen an beliebigen Stellen mit den Axen verbunden. Die Stellung der Leitrollen wird wie im Falle Fig. 1 gefunden.

Fig. 4, Taf. II. Die Axen gegen einander geneigt, sich nicht schneidend. Die Rolle A fest mit a verbunden. Die Rolle B vermittelst eines *Hook*'schen Schlüssels mit b verbunden. Die mittleren Ebenen beider Rollen zusammenfallend.

---

*) Wenn x die mit Rücksicht auf den Riemenverschleiss höchstens zulässige verhältnissmässige Längendifferenz beider Ränder des ziehenden (auf die treibende Rolle auflaufenden) Riemenstücks, d. h. das höchstens zulässige Verhältniss dieser Längendifferenz zur mittleren Länge dieses Riemenstücks, ferner d den Durchmesser der treibenden Rolle, b die Breite des Riemens, α den Neigungswinkel der Axen bedeutet, so muss die kürzeste Distanz der Letzteren

$$> \sqrt{\left(\frac{b \sin \alpha}{x} - d\right) d}$$

sein. Dabei kann im Allgemeinen $x = 0{\cdot}01$ gesetzt werden. G.

Räder.

18.

Bestimmung der Grundform der Räder.

Die verzahnten Räder, welche gewöhnlich gebraucht werden, haben: wenn die Axen parallel sind, cylindrische; wenn die Axen sich schneiden, konische; wenn die Axen nicht parallel sind und sich nicht schneiden, hyperbolische Grundformen, die auf folgende Weise bestimmt werden:

a) Bei Stirnrädern, d. h. bei Rädern für parallele Axen, seien R, r die Halbmesser der Theilkreise,
d die Distanz der Axen,
$n = \frac{R}{r}$ die Uebersetzungszahl, d. h. die Zahl, welche angibt, wie oft das Rad vom Halbmesser r sich umdrehen soll, während jenes vom Halbmesser R einmal umgeht, so ist

$$R = \frac{n\,d}{n + 1}$$

$$r = \frac{d}{n + 1}$$

b) Bei Kegelrädern, d. h. wenn die Axen sich schneiden, seien Fig. 5, Tafel II. C A und C a die beiden Axen, n die Anzahl der Umdrehungen, welche die Axe C a bei einer Umdrehung der Axe C A machen soll.

Man bestimme einen Punkt b, dessen Abstände b O und b o von den Axen sich wie n : 1 verhalten, und ziehe b C. Denkt man sich nun das Dreieck O C b um C A und das Dreieck o C b um C a herumgedreht, so entstehen die zwei längs der Linie b C sich berührenden Grundkegel der Räder.

c) Für hyperbolische Räder Fig. 6, Taf. II. seien C A und C a die beiden Axen, die mit der Ebene des Papieres parallel sind. Die kürzeste Distanz der Axen geht durch C, ist auf der Ebene des Papieres senkrecht und ihre Länge sei gleich s. Die Anzahl der Umdrehungen, welche C a bei einer Umdrehung von C A machen soll, sei n.

Theile den Winkel A C a der Axen durch eine Linie C q in zwei Theile q C A $= \alpha_1$ und q c a $= \alpha_2$, so dass q A : q a $=$ sin α_1 : sin α_2 $=$ n : 1.

Mache $CD = AE = \frac{\text{tg}\,\alpha_1}{\text{tg}\,\alpha_1 + \text{tg}\,\alpha_2}\,s$, $Cd = ae = \frac{\text{tg}\,\alpha_2}{\text{tg}\,\alpha_1 + \text{tg}\,\alpha_2}\,s$

sodann $AB = AB_1 = qE$, $ab = ab_1 = qe$.

Verzeichne mit den Halbmessern AB und CD, ab und Cd die Kreise K, K_1, k, k_1. Ziehe q m parallel mit C a, q n parallel mit C A. Theile den Kreis K von n ausgehend in so viele gleiche Theile, als die Anzahl der Zähne beträgt, welche das Rad erhalten soll, und den Kreis k von m ausgehend in eine n Mal kleinere Anzahl gleicher Theile. Ziehe durch die Theilungspunkte die Tangenten T, T_1, T_2 . . . an den Kreis K_1, t, t_1, t_2 . . . an den Kreis k_1 und suche ihre Projektionen, so bestimmen diese durch ihre wechselseitigen Durchschnitte die Hyperbeln $B D B_1 D_1$, $b d b_1 d_1$, welche durch ihre Umdrehung um ihre Axen die Grundformen der beiden Räder erzeugen. Die Linie Cq gibt die Richtung an, nach welcher die Zähne in die Räder einzuschneiden sind.

Verzahnung.

19.

Anzahl der Zähne.

Zwei in einander greifende Räder erhalten gleich grosse Theilungen. Die Anzahlen der Zähne zweier in einander greifender Räder verhalten sich demnach wie die Halbmesser derselben. Die absolute Anzahl der Zähne ist in geometrischer Hinsicht willkürlich und wird durch die Kraft bestimmt, welche am Umfange der Räder wirkt.

20.

Grundbedingung für die Form der Zähne.

Die Zähne zweier in einander greifender Räder müssen so geformt sein, dass das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeit der beiden Räder in jedem Augenblicke der Bewegung denselben Werth hat. Es gibt unendlich viel Paare von Zahnformen, welche dieser wesentlichen Grundbedingung entsprechen. Die gebräuchlichsten sind folgende:

21.

Erste epicycloidische Verzahnung. Fig. 7, Taf. II.

n a m Zahn des Rades R. a n eine radiale Linie. a m ein epicycloidischer Bogen. Der Halbmesser des Grundkreises ist R, der

Halbmesser des Wälzungskreises $\frac{1}{2}$ r. n_1 a m_1 Zahn des Rades r. a n_1 eine radiale gerade Linie. a m_1 ein epicycloidischer Bogen. Der Halbmesser des Grundkreises dieser Epicycloide ist r, der Halbmesser des Erzeugungskreises $\frac{1}{2}$ R. Die epicycloidischen Bögen entsprechen der Wälzung auf einem Theilungsbogen.

22.

Zweite epicycloidische Verzahnung. Fig. 8, Taf. II

n a m Zahn des Rades R. n_1 a m_1 Zahn des Rades r. a m epicycloidischer, a n_1 hypocycloidischer Bogen. Halbmesser des Grundkreises für a m gleich R. Halbmesser des Grundkreises für a n_1 gleich r. Halbmesser der Erzeugungskreise für a m und a n_1 gleich gross oder kleiner als $\frac{1}{2}$ r, sonst willkürlich. a m_1 epicycloidischer, a n hypocycloidischer Bogen. Halbmesser des Grundkreises für a m_1 gleich r. Halbmesser des Grundkreises für a n gleich R. Halbmesser der Erzeugungskreise für a m_1 und a n gleich gross oder kleiner als $\frac{1}{2}$ R, sonst willkürlich. Jeder dieser 4 Bögen entspricht der Wälzung auf einem Theilungsbogen. Diese Anordnung ist insbesondere für starke Uebersetzungen geeignet.

23.

Zahnstange mit Getriebe. Fig. 9, Taf. II.

n a m Zahn der Zahnstange. a n gerade auf der Grundlinie der Zahnstange senkrechte Linie. a m cycloidischer Bogen. Halbmesser des Erzeugungskreises gleich $\frac{1}{2}$ r. m_1 a n_1 Zahn des Getriebes. a n_1 gerade radiale Linie. a m_1 Evolvente des Kreises r. Die Bögen a m und a m_1 entsprechen einer Theilung.

24.

Innere cycloidische Verzahnung. Fig. 10, Taf. II.

R, r die Theilkreise. n a m Zahn des Rades R. n_1 a m_1 Zahn des Rades r. a m, a n_1 hypocycloidische Bögen, Halbmesser der Grundkreise R und r, Halbmesser der Erzeugungskreise, für beide gleich gross, kleiner als $\frac{1}{2}$ r, sonst willkürlich. a m_1, a n epicycloidische Bögen, Halbmesser der Grundkreise r, R, Halbmesser der Erzeugungskreise für beide gleich gross, sonst beliebig.

25.

Verzahnung mit Kreisbögen.

Man erhält auch brauchbare Zahnformen, wenn man die äusseren Theile der Zähne nach passenden Kreisbögen abrundet und die inneren Theile geradlinig und radial macht. Die passenden Abrundungshalbmesser für die äusseren Theile der Zähne findet man vermittelst folgender Formeln:

$$\left(\frac{\varrho}{r}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)}\, t$$

$$\left(\frac{\varrho}{R}\right) = \frac{2n+1}{2(n+1)}\, t$$

Dabei bezeichnen:

R, r die Halbmesser der Theilkreise beider Räder,

$n = \frac{R}{r}$ die Uebersetzungszahl, d. h. die Zahl, welche angibt, wie oftmal das kleinere Rad bei einer Umdrehung des grösseren Rades umgehen soll,

t die für beide Räder gleich grosse Zahntheilung,

$\left(\frac{\varrho}{r}\right), \left(\frac{\varrho}{R}\right)$ die Abrundungshalbmesser für die Zähne der Räder r und R.

Die Resultate, welche diese Formeln liefern, sind in folgender Tabelle enthalten.

n	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	2	4	6	∞
$\frac{\left(\frac{\varrho}{R}\right)}{t}$	0·75	0·78	0·79	0·80	0·83	0·90	0·93	1
$\frac{\left(\frac{\varrho}{r}\right)}{t}$	0·75	0·72	0·71	0·70	0·67	0·60	0·57	0·5

$n = \infty$ entspricht der Zahnstange mit Getriebe. — Es verdient bemerkt zu werden, dass

$$\left(\frac{\varrho}{r}\right) + \left(\frac{\varrho}{R}\right) = \frac{3}{2}\, t$$

Die Verzeichnung der Zähne vermittelst dieser Abrundungshalbmesser erklärt Fig. 1, Taf. III. R, r die Theilkreise der Räder. R_1, r_1 zwei Kreise, deren Halbmesser halb so gross sind, als jene von R und r. $\widehat{aM} = \widehat{aN} = \widehat{am} = \widehat{an} = t$. $\overline{MO} = \overline{NO} = \binom{\varrho}{R}$, $\overline{mo} = \overline{no} = \binom{\varrho}{r}$. Bogen $\widehat{MNP}$ aus O, Bogen $\widehat{mnp}$ aus o beschrieben. CP Tangente an $\widehat{MNP}$, cp Tangente an $\widehat{mnp}$.

Wenn sowohl der äussere als auch der innere Theil der Zähne nach Kreisbögen abgerundet werden soll, so findet man die passenden Abrundungshalbmesser nach folgenden Formeln:

Benennung des Bogens. Fig. 8, Taf. II.	*Abrundungshalbmesser.*
a m	$\frac{R + r_1}{R + 2r_1}\ t$
a n	$\frac{R - R_1}{R - 2R_1}\ t$
a m_1	$\frac{r + R_1}{r + 2R_1}\ t$
a n_1	$\frac{r - r_1}{r - 2r_1}\ t$

In diesen Formeln bedeuten:

R, r die Halbmesser der Theilkreise der beiden Räder,

t die Zahntheilung,

R_1, r_1 die Halbmesser zweier Hilfskreise, die an die Bedingung geknüpft sind, dass R_1 kleiner als $\frac{1}{2}$ R und r_1 kleiner als $\frac{1}{2}$ r sein müssen, im Uebrigen aber willkürlich genommen werden können.

26.

Aeussere Evolventen-Verzahnung. Fig. 2, Taf. III.

R, r die Theilkreise der Räder, und zwar $R \gtreqless r$. a b gleich einer Zahntheilung. b o eine gerade radiale Linie. g a f senkrecht auf b o. O g senkrecht auf g a f oder parallel zu b o. R_1, r_1 zwei mit den Halbmessern O g und o f beschriebene Kreise. f h Evolvente, die durch Aufwicklung von g f auf R_1 entsteht. a i = a f. i k Evolvente, die durch Aufwicklung von i f auf r_1 entsteht. Die Evolventenbögen f h und i k sind die gekrümmten Theile der Zähne. Die geraden radialen Theile $h\,h_1$, $k\,k_1$ müssen so weit gegen die Mittelpunkte O, o fortgesetzt werden, dass die äusseren krummlinigen Theile hinreichend Spielraum finden.

Zähne, welche auf die so eben angedeutete Weise construirt werden, können im Ganzen durch zwei Theilungen auf einander wirken, und zwar durch eine Theilung vor, und durch eine Theilung nach der Centrallinie O o. Will man, dass die Zähne um mehr oder weniger als eine Theilung vor und nach der Centrallinie auf einander einwirken sollen, so müssen die Längen a b und a i gerade so lang gemacht werden, als die Wege, durch welche die Einwirkung statt finden soll. Wird z. B. a b gleich $1^1/_2$ und a i gleich $1^2/_3$ Theilung gemacht, so erhält man eine Verzahnung, die durch $1^1/_2 + 1^2/_3$ Theilungen wirkt.

27.

Innere Evolventen-Verzahnung. Fig. 3, Taf. III.

Wenn je zwei Zähne durch zwei Theilungen auf einander einwirken sollen, verfährt man wie folgt. Verzeichne die Theilkreise R und r, und am Mittelpunkt o des Getriebes einen Theilungswinkel a o b, ziehe b o, fälle von a aus den Perpendikel a f und verlängere denselben nach beiden Seiten, ziehe O g parallel mit o b und beschreibe mit den Halbmessern o f und O g die Kreise r_1 und R_1. Nun mache man a c = a f und verzeichne die Evolventen c d und c e, die durch Aufwicklung von f c und g c auf r_1 und R_1 entstehen, so sind c d und c e die krummlinigen Theile der Zähne. Für den freien Durchgang der Zähne wird an c d noch ein gerader radialer Theil d d_1, und an e c eine krummlinige Fortsetzung c c_1 angebracht. Sollen die Zähne durch einen Weg s vor, und durch einen Weg s_1 nach der Centrallinie auf einander wirken, so muss c a = s und a f = s_1 gemacht, im Uebrigen aber das gleiche Verfahren befolgt werden.

28.

Eigenschaften der Evolventen-Verzahnung.

Die Evolventen-Verzahnung hat folgende praktisch-wichtige Eigenschaften:

1) Alle mit Evolventenzähnen versehene Räder können, wenn sie nur gleiche Theilung haben, einander richtig bewegen.
2) Die Entfernung der Axen der Räder kann, unbeschadet des richtigen Eingriffs, vermindert oder vermehrt werden, die

Dauer des richtigen Eingriffs wird jedoch dadurch geändert.

3) Evolventenzähne verursachen die geringste Reibung.
4) Evolventenzähne verändern am wenigsten ihre Form durch Abnutzung.
5) Räder mit Evolventenzähnen können auch zur Bewegung von Axen, die sich nicht schneiden und einen Winkel bilden, gebraucht werden.
6) Evolventenzähne können am leichtesten durch Maschinen richtig geschnitten werden.
7) Nachtheilige Eigenschaften sind keine bekannt.

Vermöge dieser Eigenschaften sollten die Evolventenzähne allgemein eingeführt werden.

29.

Allgemeine Verzahnung. Fig. 4, Taf. III.

Wenn der Zahn von einem der beiden Räder beliebig angenommen wird, kann die entsprechende Form des Zahnes des anderen Rades auf folgende Art gefunden werden. Es seien R, r die Theilkreise, a n b ein beliebiger krummliniger Einschnitt, welcher die Form des Zahnes von r sein soll. Um die entsprechende Form des Zahnes von R zu erhalten, nehme man in a b einen beliebigen Punkt n an, ziehe die Normale n m, mache $\widehat{a\,m_1} = \widehat{a\,m}$, ziehe durch m_1 eine gerade Linie, welche den Kreis R unter dem gleichen Winkel schneidet, unter welchem r von n m geschnitten wird, und mache endlich $m_1\,n_1 = m\,n$, so ist n_1 ein Punkt der gesuchten Zahnform. Dieses Verfahren auf mehrere Punkte der Kurve a b angewendet, gibt eine Reihe von Punkten der zu verzeichnenden Zahnkurve. Wie man zu verfahren hat, wenn $a\,n_1$ gegeben und a n gesucht wird, bedarf keiner Erklärung.

30.

Verzahnung der konischen Räder. Fig. 5, Taf. II.

Es seien C A und C a die Axen, C b e, C b f die Grundkegel, C b ihre gemeinschaftliche Berührungslinie. Errichtet man in b auf b C eine Senkrechte S b s, zieht S e und s f und denkt sich die Dreiecke e S b und b s f um C A und C a herum gedreht, so entstehen zwei neue Kegelflächen, und die Linien, in welchen die richtig geformten Zahnflächen geschnitten werden, stimmen annähernd mit den richtigen Formen der Zähne zweier Stirnräder überein, deren Halbmesser gleich S b und s b sind. Wenn man die Zähne nach Kreisbögen abrunden, demnach das in Nr. 25 angegebene Verfahren anwenden will, muss in den dort aufgestellten Formeln

$$n = \frac{Sb}{sb} = \frac{i + \cos\alpha}{i \cos\alpha + 1}\, i$$

gesetzt werden. Hier bedeutet:

$$i = \frac{bO}{bo} \text{ die Uebersetzungszahl,}$$

$$\alpha = \text{Winkel A C a.}$$

Stehen die Axen auf einander senkrecht, so ist $\alpha = 90^0$, und dann wird:

$$n = i^2.$$

31.

Die Schraube ohne Ende. Fig. 5, 6, Taf. III.

Bei einer Umdrehung der Schraube legt ein Punkt im Theilkreis des Rades einen Weg zurück, der gleich ist der Höhe eines Schraubenganges. Die Anzahl der Theilungen, um welche das Rad bei einer Umdrehung der Schraube fortrückt, ist demnach gleich der Anzahl der Schraubengänge Bei einer eingängigen Schraube rückt das Rad um eine Theilung weiter, wenn die Schraube einmal um ihre Axe gedreht wird. Die Uebersetzungszahl ist gleich der Anzahl der Zähne des Rades, dividirt durch die Anzahl der Schraubengänge. Die Stärke der Zähne wird nach der zu übertragenden Kraft bestimmt. Die Form der Zähne des Rades und der Gewinde der Schraube erklären Fig. 5 und 6. Fig. 5 ist ein Schnitt mit einer auf der Axe des Rades senkrecht stehenden und durch die Axe der Schraube gehenden Ebene. Die Schnittlinien m n p, $m_1\, n_1\, p_1$ sind wie bei einer Zahnstange, die durch ein Getriebe bewegt wird, zu verzeichnen. Die Schraube wird sowohl für die Verzeichnung als auch für die Ausführung am einfachsten, wenn man den krummen Theil $\widehat{nm}$ weglässt, in welchem Falle jedoch die Linie $m_1\, n_1$ für mehr als eine Theilung construirt werden muss. Wenn die Anordnung zur Uebertragung einer grösseren Kraft dient, wird das Rad mit den Zähnen gegossen. Bei Schrauben ohne Ende, die zu genauen Führungen dienen, werden die Zähne in den metallenen Radkörper eingeschnitten, und die wahren Zahnformen sind die Einhüllungsflächen, welche die Schraubengewinde durch die relative Bewegung gegen das Rad beschreiben.

Gerad-Führungen.

32.

Balancier mit Gegenlenker. Fig. 1, Taf. IV.

Wenn der Balancier und das Verbindungsstück gegeben sind, kann man den Gegenlenker auf folgende Art durch Construction finden. — Verzeichne den Balancier in der höchsten, mittleren und tiefsten Stellung, ziehe $a_1\,a_2$, halbire a c und ziehe durch m eine auf a C senkrechte Linie y x, so ist diese die Mittellinie der Kolbenstange. Nun zeichne man das Verbindungsstück in der höchsten $a_1\ b_1\ c_1$, mittleren a b c und tiefsten Stellung $a_2\ b_2\ c_2$ und zwar so, dass b_1, b, b_2 in x y liegen. Sucht man endlich den Mittelpunkt o des Kreises, der durch die Punkte c_1, c, c_2 geht, so hat man den Drehungspunkt des Gegenlenkers, und $o\,c_1 = o\,c = o\,c_2$ ist die Länge desselben.

Setzt man $a\,C = a$, $a\,b = b$, $b\,c = c$, $o\,c = r$, $\widehat{a_1\,C\,a} = \alpha$, so findet man die Länge des Gegenlenkers durch folgende Formel:

$$r = \frac{a}{2}\left[\frac{b}{c}\,(1 + \cos\alpha) + \frac{c}{b}\,(1 - \cos\alpha)\right]$$

Wenn r und a gegeben sind und $\frac{b}{c}$ gesucht werden soll, hat man:

$$\frac{b}{c} = \frac{1}{1 + \cos\alpha}\left[\frac{r}{a} + \sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^2 - \sin^2\alpha}\right]$$

Ist der Winkel α nicht grösser, als ungefähr 30^0, so hat man auch annähernd:

$$\frac{b}{c} = \frac{r}{a}$$

33.

Das Watt'sche Parallelogramm für Landmaschinen. Fig. 2, Taf. IV.

Wenn der Balancier C b und die Abmessungen des Parallelogramms a b c d gegeben sind, findet man den Gegenlenker o d durch Construction, wie folgt.

Verzeichne das Parallelogramm in der höchsten, mittleren und tiefsten Stellung, und zwar so, dass die Punkte c_1, c, c_2 in die Vertikallinie x y fallen, welche durch den Halbirungspunkt m von b n geht, und suche den Mittelpunkt o des Kreises, der durch die Punkte d_1, d, d_2 gezogen werden kann; dann ist o der Drehungspunkt und $o\,d_1 = o\,d = o\,d_2$ die Länge des Gegenlenkers.

Setzt man $C\,b = a$, $C\,a = b$, $o\,d = r$, $\widehat{b_1\,C\,b} = \alpha$, so hat man zur Berechnung des Gegenlenkers die Formel:

$$r = \frac{b}{2}\left[\frac{b}{a-b}(1 + \cos\alpha) + \frac{a-b}{b}(1 - \cos\alpha)\right]$$

Wenn a und r gegeben sind und b zu suchen ist, hat man annähernd:

$$r = \frac{b^2}{a-b} \text{ und } b = -\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + a\,r}$$

Wenn a und $b + r = e$ gegeben und b, so wie r zu suchen sind, hat man annähernd:

$$b = \frac{a\,e}{a+e}, \quad r = \frac{e^2}{a+e}$$

Nebst dem Punkt c_1 wird auch jeder andere Punkt, z. B. f und g der Linie c_1 C geradlinig geführt, wenn man f und g durch Verbindungsstücke h i und a_1 d_1, die zu c_1 b_1 parallel sind, mit dem Parallelogramm in Zusammenhang bringt. Hierdurch ist also ein Mittel geboten, eine beliebige Anzahl von Kolbenstangen geradlinig zu führen.

34.

Das Watt'sche Parallelogramm für Schiffsmaschinen. Fig. 3, Taf. IV.

Ist der Balancier C b und das Parallelogramm gegeben, so findet man den Gegenlenker o d wie folgt. Verzeichne das Parallelogramm in der höchsten, mittleren und tiefsten Stellung, und zwar so, dass die Punkte e_1, e, e_2 (die drei Stellungen der Traverse) in die durch den Halbirungspunkt m von b n gehende Vertikallinie (Axe der Kolbenstange) fallen. Sucht man sodann den Mittelpunkt o des Kreises, der durch die drei Punkte d_1, d, d_2 gezogen werden kann, so ist o der Drehungspunkt und o d die Länge des Gegenlenkers.

Nennt man: $Cb = a$, $Ca = b$, $bc = c$, $be = d$, $od = r$, $\widehat{b_1 C b} = \alpha$, so hat man zur Berechnung der Länge des Gegenlenkers die Formel:

$$r = \frac{b}{2}\left[\frac{b}{\frac{c}{d}a - b}(1 + \cos\alpha) + \frac{\frac{c}{d}a - b}{b}(1 - \cos\alpha)\right]$$

Annähernd ist auch:

$$r = \frac{b^2}{\frac{c}{d}a - b}$$

Wenn $r, a, \frac{c}{d}$ gegeben und b zu suchen wäre, hätte man annähernd

$$b = -\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{c}{d}ar}$$

Wenn $b + r = e$, a, $\frac{c}{d}$ gegeben und b sowie r zu suchen wäre, hätte man annähernd:

$$b = \frac{\frac{c}{d}ae}{e + \frac{c}{d}a}, \quad r = \frac{e^2}{e + \frac{c}{d}a}$$

35.

Balancier ohne Drehungsaxe. Fig. 4, Taf. VI.

Cc_1 eine um C drehbare Stütze. $c_1 a_1$ der Balancier, in welchem bei a_1 die geradlinig auf- und niedergehende Kolbenstange und bei b_1 ein Gegenlenker, der sich um o dreht, eingehängt ist. Um den Gegenlenker durch Construction zu finden, zeichne man die Anordnung in der höchsten, mittleren und tiefsten Stellung und bestimme den Mittelpunkt o des Kreises, der durch die drei Punkte b_1, b, b_2 geht; dann ist o der Einhängepunkt und b o die Länge des Gegenlenkers.

Setzt man $c_1 a_1 = a$, $c_1 b_1 = b$, $o b_1 = r$, $\widehat{a_1 c_1 o} = \alpha$, so hat man zur Berechnung der Länge des Gegenlenkers die Formel:

$$r = \frac{b}{2}\left[\frac{b}{a - b}(1 + \cos\alpha) + \frac{a - b}{b}(1 - \cos\alpha)\right]$$

Oder annähernd:

$$r = \frac{b^2}{a - b}$$

Ist $b + r = e$ und a gegeben, so findet man annähernd:

$$b = \frac{a\,e}{a + e},\; r = \frac{e^2}{a + e}$$

36.

Anmerkung.

Die Vorrichtungen Fig. 1, 2, 3, 4 bringen keine mathematisch genaue Geradführung hervor, der Fehler ist jedoch, wenn der Ablenkungswinkel α nicht mehr als 30^0 beträgt, von keinem merklichen Nachtheil.