

**Badische Landesbibliothek Karlsruhe**

**Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe**

**Resultate für den Maschinenbau**

[Hauptband]

**Redtenbacher, Ferdinand**

**Heidelberg, 1869**

Zweiter Abschnitt. Festigkeit der Materialien

[urn:nbn:de:bsz:31-289815](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-289815)

## ZWEITER ABSCHNITT.

**Festigkeit der Materialien.**

(In diesem Abschnitt sind alle Abmessungen in Centimetern ausgedrückt.)

37.

*Absolute Festigkeit.*

Wir nehmen als Maass der absoluten Festigkeit eines Materials die Kraft in Kilogrammen, welche im Stande ist, einen Stab von einem Quadrat-Centimeter Querschnitt zu zerreißen.

Nennt man:

- $\mathfrak{A}$  die absolute Festigkeit des Materials, aus welchem ein Stab von gleichem Querschnitt besteht,
- $a$  den Querschnitt des Stabes,
- $K$  die Kraft in Kilogrammen, welche das Abreißen des Stabes zu bewirken vermag,

so ist:

$$K = \mathfrak{A} a, a = \frac{K}{\mathfrak{A}}, \mathfrak{A} = \frac{K}{a}$$

Die Werthe von  $\mathfrak{A}$  für die in der Praxis vorzugsweise angewendeten Materialien sind in der Tabelle Nr. 57 angegeben.

38.

*Berechnung der Elastizitätsmomente verschiedener Querschnittsformen.*  
Taf. V.

Das Elastizitätsmoment eines Querschnittes (d. h. die Summe der statischen Momente aller Spannungen und Pressungen, die in einem Querschnitt eines Stabes in Folge einer Biegung desselben

2.

entstanden sind) wird gefunden, wenn man die auf 1 Quadrat-Centimeter bezogene Spannung der am stärksten ausgedehnten Faser mit einem gewissen von den Querschnittsdimensionen abhängigen Ausdruck multipliziert.

Nennt man:

- M das Elastizitätsmoment eines Querschnittes in dem so eben angegebenen Sinn,  
 $\mathfrak{B}$  die auf einen Quadrat-Centimeter bezogene grösste Spannung, welche in dem Querschnitt vorkommt,  
 E den erwähnten von den Querschnittsdimensionen des Stabes abhängigen Ausdruck,  
 z die Entfernung der am stärksten gespannten Faser von der (durch den Schwerpunkt des Querschnittes gehenden) neutralen Faser (d. h. von derjenigen Faser, in welcher weder Ausdehnung noch Zusammenpressung stattfindet),

so ist:

$$M = \mathfrak{B} E z$$

Die Werthe von E und z für die verschiedenen Querschnittsformen, welche in der Anwendung gebraucht werden, sind auf Tafel V. zusammengestellt. Dabei ist angenommen, dass oben Ausdehnung, unten Zusammendrückung stattfindet.

39.

*Festigkeit stabförmiger Körper gegen das Abbrechen.*

In den folgenden Formeln bedeutet:

- $\mathfrak{B}$  die auf 1 Quadrat-Centimeter bezogene grösste Spannung, welche in dem Stab vorkommt,  
 $\mathfrak{B}E$  das Elastizitätsmoment, welches dem Querschnitt entspricht, in welchem die grösste Spannung stattfindet, wobei für E derjenige von den auf Tafel V. zusammengestellten Ausdrücken zu setzen ist, welcher der Querschnittsform des Stabes entspricht,  
 p das Gewicht des Stabes in Kilogrammen.

Es ist

- a) wenn der Stab an dem einen Ende fest gehalten und am andern Ende belastet ist:

$$\text{Fig. 5, Taf. IV. } \mathfrak{B} E = P l + \frac{1}{2} p l$$

- b) wenn der Stab mit beiden Enden aufliegt und in der Mitte belastet ist:

$$\text{Fig. 6, Taf. IV. } \mathfrak{B} E = P l + \frac{1}{4} p l$$

c) wenn die Last  $2P$  um  $c$  und  $c_1$  von den Unterstützungspunkten entfernt ist:

$$\text{Fig. 7, Taf. IV. } \mathfrak{B}E = \frac{c c_1}{l} \left( P + \frac{1}{4} p \right)^*$$

d) wenn in einer Entfernung  $c$  von jedem Unterstützungspunkte eine Last  $P$  wirkt:

$$\text{Fig. 8, Taf. IV. } \mathfrak{B}E = P c + \frac{p l}{4}$$

e) wenn eine Last  $2P$  auf eine Länge  $2e$  auf dem Stab gleichförmig vertheilt ist, und der Schwerpunkt der Last um  $c$  und  $c_1$  von den beiden Unterstützungspunkten entfernt ist:

$$\text{Fig. 9, Taf. IV. } \mathfrak{B}E = P \left( \frac{c c_1}{l} - \frac{e}{2} \right) + \frac{p}{4} \frac{c c_1}{l} **)$$

Will man vermittelst dieser Formeln die Last berechnen, bei welcher ein stabförmiger Körper abbricht, so muss in denselben

\*) Diese Gleichung entspricht der Voraussetzung, dass die grösste Spannung in dem Querschnitte stattfindet, in welchem die Last  $2P$  angreift. Es ist dies dann der Fall, wenn  $\frac{2P}{p} \geq \frac{l-c}{c}$  ist, unter  $c$  den kleineren der beiden Abstände  $c$  und  $c_1$  verstanden. G.

\*\*) Diese Gleichung ist eine Näherungsformel, entsprechend der Voraussetzung, dass die grösste Spannung in dem Querschnitte stattfindet, in welchem der Schwerpunkt der Last  $2P$  liegt. Streng genommen liegt dieser der grössten Spannung entsprechende Querschnitt, unter  $c$  den kleineren der beiden Abstände  $c$  und  $c_1$  verstanden, in der Entfernung

$$x = \frac{(2P+p)(l-c)}{2Pl+pe} e$$

von dem Schwerpunkte der Last gegen den um  $c_1$  davon entfernten Unterstützungspunkt hin, vorausgesetzt, dass er überhaupt noch in der belasteten Strecke  $2e$  des Stabes liegt, was die Erfüllung der Bedingung

$$\frac{2P}{p} \geq \frac{l-c-e}{c}$$

erfordert. In diesem Falle ist streng genommen zu dem im Text angeführten Ausdrücke von  $\mathfrak{B}E$  noch das Glied

$$\frac{(2P+p)^2(l-c)^2}{2Pl+pe} \frac{e}{4l}$$

hinzuzufügen. Mit  $p=0$  wird dann z. B.

$$\mathfrak{B}E = P \frac{c c_1}{l} \left( 1 - \frac{e}{2l} \right).$$

G.

für  $\mathfrak{B}$  der Brechungs-Coeffizient gesetzt werden, welcher dem Materiale entspricht, aus welchem der Stab besteht. Will man hingegen die Querschnittsdimensionen berechnen, welche ein stabförmiger Körper erhalten muss, um mit Sicherheit eine gegebene Last tragen zu können, so muss man in jenen Formeln für  $\mathfrak{B}$ , je nach Umständen, den fünften, zehnten oder sogar nur den zwanzigsten Theil von dem Brechungs-Coeffizienten in Rechnung bringen.

Für Maschinenconstructions darf in der Regel nur der zehnte Theil dieses Coeffizienten genommen werden. Die Brechungs-Coeffizienten für die verschiedenen Materialien sind in der Tabelle Nr. 57 in der mit  $\mathfrak{B}$  überschriebenen Vertikalcolumnne zusammengestellt.

40.

*Festigkeit der Körper gegen das Zerdrücken*

Wenn die Dimension eines Körpers nach der Richtung des Druckes klein ist im Vergleich mit den darauf senkrechten Abmessungen, so ist die Kraft, welche das Zerdrücken des Körpers bewirkt, unabhängig von der Länge und proportional dem Querschnitt.

Die Festigkeits-Coeffizienten findet man in Nr. 58.

41.

*Rückwirkende Festigkeit langer stabförmiger Körper. Fig. 10, Taf. IV.*

Nennt man:

l die Länge des Stabes,

P diejenige Belastung, bei welcher der Stab eine bleibende Biegung annimmt,

k die auf die Biegungslinie des Stabes senkrechte Dimension seines Querschnittes,

$\varepsilon$  den Modulus der Elastizität des Materials, aus welchem der Stab besteht (Tabelle Nr. 57),

E denjenigen von den auf Tafel V. zusammengestellten Ausdrücken, welcher der Querschnittsform des Stabes entspricht,

$\pi = 3.142$  die *Ludolph'sche* Zahl,

so ist für einen Stab, der sich in allen seinen Theilen frei biegen kann und nach seiner Länge gedrückt wird:

a) für jede Querschnittsform, bei welcher der Schwerpunkt in der Mitte der Dimension k liegt:

$$P = \frac{\varepsilon}{2} \pi^2 E \frac{k}{l^2}$$

b) für einen cylindrischen Stab von dem Durchmesser  $d$ :

$$P = \frac{\varepsilon}{16} \pi^2 \left(\frac{d}{1}\right)^2 \left(\frac{d^2 \pi}{4}\right)$$

c) für einen hohlen cylindrischen Stab,  $d$  der äussere,  $d_1$  der innere Durchmesser:

$$P = \frac{\varepsilon}{16} \pi^2 \frac{d^2 + d_1^2}{1^2} (d^2 - d_1^2) \frac{\pi}{4} = \frac{\varepsilon}{64} \pi^3 \frac{d^4 - d_1^4}{1^2}$$

d) für einen Stab mit rechtecklichem Querschnitt:

$$F = \frac{\varepsilon}{12} \pi^2 \frac{b h^3}{1^2}$$

wobei  $h$  die kleinere,  $b$  die grössere Querschnitts-Dimension des Stabes bezeichnet.

Bei den Maschinen sind die auf rückwirkende Festigkeit in Anspruch genommenen Theile so stark gemacht, dass erst bei einer Last, die 10, 20, 50 Mal grösser ist, als diejenige, welcher sie wirklich zu widerstehen haben, eine bleibende Biegung eintreten würde. Wenn man also mit den so eben aufgestellten Formeln mit der Praxis übereinstimmende Dimensionen erhalten will, so muss in denselben für  $P$  eine Last in Rechnung gebracht werden, die 10, 20, 50 Mal grösser ist, als diejenige, welcher der Körper wirklich ausgesetzt ist.

42.

*Festigkeit stabförmiger Körper gegen das Verwinden.*

Nennt man:

$P$  die Kraft in Kilogrammen, welche das Verwinden bewirkt,  
 $R$  in Centimetern die Länge des Hebelarmes, an welchem  $P$  wirkt,  
 $T$  einen von der Natur des Materials, aus welchem der Stab besteht, abhängigen Coefficienten, durch welchen die an der Oberfläche des verwundenen Stabes stattfindende grösste Spannung der Fasern gemessen wird, so ist:

a) für cylindrische Stäbe vom Durchmesser  $d$ :

$$P R = T \frac{\pi}{16} d^3$$

b) für einen hohlen Cylinder,  $d$  der äussere,  $d_1$  der innere Durchmesser:

$$P R = T \frac{\pi}{16} \frac{d^4 - d_1^4}{d}$$

c) für einen Stab, dessen Querschnitt ein Rechteck mit den Seiten  $b$  und  $h$ :

$$P R = \frac{T}{6} b h \sqrt{b^2 + h^2}$$

d) für einen Stab, dessen Querschnitt ein Quadrat,  $b$  die Seite:

$$P R = T \frac{b^3}{3 \sqrt{2}}$$

e) für einen Stab von irgend einem Querschnitt:

$$P R = \frac{T}{a} \Sigma f x^2 *)$$

wobei  $\Sigma f x^2$  das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf eine Axe bedeutet, die durch den Schwerpunkt des Querschnittes geht und auf dessen Ebene senkrecht steht, wobei ferner  $a$  den Abstand des vom Schwerpunkt des Querschnittes entferntesten Punktes des Umfanges bedeutet.

Will man mit diesen Formeln das statische Moment berechnen, welches erforderlich ist, um einen Stab abzuwinden, so muss für  $T$  der dem Materiale entsprechende Werth der Tabelle Nr. 57 in Rechnung gebracht werden. Will man dagegen vermittelst obiger Formeln die Dimensionen von Axen oder Wellen so bestimmen, dass sie mit Sicherheit einem gegebenen Torsionsmoment zu widerstehen vermögen, so darf man für  $T$  nur den zehnten, zwanzigsten oder dreissigsten Theil der Coefficienten in Rechnung bringen, welche die Tabelle Nr. 57 enthält.

43.

*Dicke cylindrischer und kugelförmiger Gefässwände.*

Es sei:

$D$  der innere Durchmesser in Centimetern eines cylindrischen oder kugelförmigen Gefässes,

\*) Diese allgemeine Näherungsformel entspricht der Voraussetzung, dass die in den verschiedenen Punkten des Querschnitts hervorgerufenen inneren Kräfte (Schubkräfte) rechtwinkelig gegen die Verbindungslinien dieser Punkte mit dem Schwerpunkte des Querschnitts gerichtet seien. Eine genauere Untersuchung lehrt, dass diese Voraussetzung nur für die unter a) und b) genannten Querschnittsformen zutrifft; für den rechteckigen Querschnitt ergibt sie insbesondere:

$$P R = \frac{2}{9} T b^2 h, \text{ falls } b \leq h;$$

also für den quadratischen Querschnitt:

$$P R = \frac{2}{9} T b^3.$$

G.

- $\delta$  die Wanddicke desselben in Centimetern,  
 $p_0$  die Pressung der Flüssigkeit im Innern des Gefäßes auf einen Quadrat-Centimeter,  
 $p_1$  die Pressung des äusseren Mediums gegen einen Quadrat-Centimeter der äusseren Fläche des Gefäßes,  
 $\mathfrak{A}$  die auf einen Quadrat-Centimeter bezogene Spannung, welche an der innern Fläche des Gefäßes eintreten darf,  
 so hat man zur Bestimmung der Wanddicke folgende Regeln: \*)

a) für cylindrische Gefässe:

$$1) \text{ genau } \quad \delta = \frac{D}{2} \left[ \sqrt{\frac{\mathfrak{A} + p_0}{\mathfrak{A} + 2p_1 - p_0}} - 1 \right]$$

$$2) \text{ annähernd } \quad \delta = \frac{D}{2} \left( \frac{p_0 - p_1}{\mathfrak{A} + 2p_1 - p_0} \right)$$

b) für kugelförmige Gefässe:

$$1) \text{ genau } \quad \delta = \frac{D}{2} \left[ \sqrt[3]{\frac{2(\mathfrak{A} + p_0)}{2\mathfrak{A} + 3p_1 - p_0}} - 1 \right]$$

$$2) \text{ annähernd } \quad \delta = \frac{D}{2} \left( \frac{p_0 - p_1}{2\mathfrak{A} + 3p_1 - p_0} \right)$$

Um eine Metalldicke so zu bestimmen, dass ein Gefäss mit Sicherheit einem innern Druck zu widerstehen vermag, muss man

\*) Wenn mit der Spannung oder Pressung, welche in einem gewissen Punkte nach einer gewissen Richtung stattfindet, nach derselben Richtung die Ausdehnung resp. Zusammendrückung =  $\alpha$  verbunden ist, so wird dadurch zugleich nach irgend einer dazu senkrechten Richtung die Zusammendrückung resp. Ausdehnung =  $\frac{1}{m} \alpha$  bedingt, wo  $m = 3$  bis  $4$  ist. Die im Text angeführten Formeln entsprechen der Voraussetzung  $m = \infty$ . Mit endlichen Werthen von  $m$  ist dagegen, wenn  $p_1 = \text{Null}$  gesetzt wird,

a) für cylindrische Gefässe:

$$\delta = \frac{D}{2} \left[ \sqrt{\frac{m\mathfrak{A} + (m-1)p_0}{m\mathfrak{A} - (m+1)p_0}} - 1 \right]$$

b) für kugelförmige Gefässe:

$$\delta = \frac{D}{2} \left[ \sqrt[3]{\frac{2m\mathfrak{A} + 2(m-2)p_0}{2m\mathfrak{A} - (m+1)p_0}} - 1 \right]$$

Uebrigens setzen alle diese Formeln für cylindrische Gefässe voraus, dass unter der Einwirkung des inneren Ueberdrucks in allen Querschnitten eine gleiche Deformation, sowie auch dass nach der Richtung der Axe keine Spannung stattfindet, was streng genommen nur bei Röhren zutreffen kann, die an beiden Enden offen sind.

G.



in diesen Formeln einen aliquoten Theil von dem Coefficienten der absoluten Festigkeit des Materials in Rechnung bringen.

44.

*Ausdehnung und Zusammendrückung von Stäben.*

Nennt man:

- l die natürliche Länge eines Stabes,
  - a den Querschnitt desselben,
  - P die ausdehnende oder zusammendrückende Kraft in Kilogrammen,
  - e die durch P hervorgebrachte Verlängerung oder Verkürzung des Stabes,
  - $\epsilon$  den Modulus der Elastizität des Materials, aus welchem der Stab besteht (Tabelle Nr. 57), d. h. die Kraft, welche nothwendig wäre, um einen Stab von 1 Quadrat-Centimeter Querschnitt noch einmal so lang zu machen, als er ursprünglich im natürlichen Zustand ist,
- so ist, wenigstens für nicht zu starke Ausdehnungen oder Zusammenpressungen:

$$e = \frac{P}{a} \frac{l}{\epsilon}, \quad \frac{P}{a} = \epsilon \frac{e}{l}$$

**Biegung stabförmiger Körper.**

45.

*Biegung eines Stabes, der an dem einen Ende gehalten und am andern Ende belastet ist. Fig. 11, Taf. IV.*

Es sei:

- P die Belastung am freien Ende des Stabes,
- l die ganze Länge des Stabes,
- f die Senkung des freien Endes,
- $\alpha$  der Winkel, den die an das Ende des Stabes gezogene Tangente mit der ursprünglichen Richtung desselben bildet,
- $\epsilon$  der Modulus der Elastizität des Materials, aus welchem der Stab besteht (Tabelle Nr. 57),
- E derjenige von den auf Tafel V. zusammengestellten Ausdrücken, welcher der Querschnittsform des Stabes entspricht,
- $x = Cn$ ,  $y = mn$  die Coordinaten irgend eines Punktes der durch die Belastung krumm gewordenen neutralen Faser,

z die Entfernung der neutralen Faser von der am stärksten ausgedehnten Faser.

Dies vorausgesetzt, ist, wenn das Gewicht des Stabes vernachlässigt wird:

$$y = \frac{P}{2 \varepsilon E z} (l^2 x - \frac{1}{3} x^3)$$

$$f = \frac{1}{3} \frac{P l^3}{\varepsilon E z}$$

$$\text{tang } \alpha = \frac{P l^2}{2 \varepsilon E z} = \frac{3}{2} \frac{f}{l}$$

46.

*Biegung eines auf zwei Stützen liegenden in der Mitte belasteten Stabes.*  
Fig. 12, Taf. IV.

Es sei:

2l die ganze Länge des Stabes,

2P die Belastung,

$\varepsilon, E, z$  wie im vorhergehenden Fall,

f = CD die Senkung der neutralen Faser in der Mitte,

Bn = x, mn = y die Coordinaten eines beliebigen Punktes der gebogenen neutralen Faser,

$\alpha$  der Winkel, den die zu A und B gezogenen Tangenten gegen A B bilden.

Dies vorausgesetzt, ist:

$$y = \frac{P}{2 \varepsilon E z} (l^2 x - \frac{1}{3} x^3)$$

$$f = \frac{1}{3} \frac{P l^3}{\varepsilon E z}$$

$$\text{tang } \alpha = \frac{P l^2}{2 \varepsilon E z} = \frac{3}{2} \frac{f}{l}$$

47.

*Biegung eines Stabes, der auf zwei Stützpunkte gelegt und durch eine Kraft 2P belastet ist, deren Angriffspunkt von den Stützpunkten um c und c<sub>1</sub> entfernt ist.* Fig. 13, Taf. IV.

Es sei:

2P die Last,

2l die Entfernung der Stützpunkte,

c, c<sub>1</sub> die Entfernung der Last von den Stützpunkten,

$\varepsilon, E, z$  wie in Nr. 45,

$A n = x, m n = y$  Coordinaten eines Punktes  $m$  zwischen  $A$  und  $C$ ,

$B n_1 = x_1, m_1 n_1 = y_1$  Coordinaten eines Punktes  $m_1$  zwischen  $B$  und  $C$ ,

$f = DC$  die Senkung der neutralen Faser bei  $C$ ,

$\alpha, \alpha_1$  die Neigungen der neutralen Faser bei  $A$  und  $B$  gegen  $AB$ .

Wenn das eigene Gewicht des Stabes nicht berücksichtigt wird, hat man:

$$y = \frac{P}{\epsilon E Z} \frac{c_1}{6I} \left[ c (2c_1 + c) x - x^3 \right]$$

$$y_1 = \frac{P}{\epsilon E Z} \frac{c}{6I} \left[ c_1 (2c + c_1) x_1 - x_1^3 \right]$$

$$f = \frac{P}{\epsilon E Z} \frac{c^2 c_1^2}{3I}$$

$$\text{tang } \alpha = \frac{P}{\epsilon E Z} \frac{c c_1 (2c_1 + c)}{6I}$$

$$\text{tang } \alpha_1 = \frac{P}{\epsilon E Z} \frac{c c_1 (2c + c_1)}{6I}$$

Wenn  $c > c_1$  ist, wird die Tangente an die Kurve parallel mit  $AB$  für

$$x = \sqrt{\frac{1}{3} c (2c_1 + c)}$$

und die entsprechende Senkung ist:

$$y = \frac{P}{\epsilon E Z} \frac{c_1}{I} \frac{1}{9\sqrt{3}} \left[ c (2c_1 + c) \right]^{\frac{3}{2}}$$

48.

*Biegung eines Stabes unter folgenden Umständen.* Fig. 14, Taf. IV.

Das Ende  $A$  frei und mit  $P$  belastet. Das Ende  $B$  befestiget. Auf der ganzen Länge eine Last  $P_1$  gleichförmig vertheilt.

Bezeichnungen wie in Nr. 45,  $An = x, mn = y$ .

$$y = \frac{1}{\epsilon E Z} \left[ \frac{1}{2} \left( P + \frac{1}{3} P_1 \right) l^2 x - \frac{1}{6} P x^3 - \frac{1}{24} P_1 \frac{x^4}{I} \right]$$

$$f = \frac{1}{3} \frac{(P + \frac{3}{8} P_1) l^3}{\epsilon E z}$$

$$\text{tang } \alpha = \frac{(P + \frac{1}{3} P_1) l^2}{2 \epsilon E z}$$

49.

*Biegung eines Stabes unter folgenden Umständen. Fig. 15, Taf. IV.*

Der Stab liege bei A und B auf Stützpunkten, in der Mitte hänge eine Last  $2P$ , und auf seiner ganzen Länge sei eine Last  $2P_1$  gleichförmig vertheilt.

Bezeichnungen wie in Nr. 46,  $An = x$ ,  $mn = y$ .

$$y = \frac{1}{2 \epsilon E z} \left[ \left( P + \frac{2}{3} P_1 \right) l^2 x - \frac{1}{3} (P + P_1) x^3 + \frac{1}{12} P_1 \frac{x^4}{l} \right]$$

$$f = \frac{l^3}{2 \epsilon E z} \left( \frac{2}{3} P + \frac{5}{12} P_1 \right)$$

$$\text{tang } \alpha = \frac{l^2}{2 \epsilon E z} \left( P + \frac{2}{3} P_1 \right)$$

50.

*Berechnung des Torsionswinkels stabförmiger Körper.*

Nennt man:

$M$  das statische Moment der Kraft, durch welche ein Stab gedreht wird (die Kraft in Kilogrammen, den Hebelarm, an welchem sie wirkt, in Centimetern ausgedrückt),

$l$  die Länge des Stabes in Centimetern,

$\theta$  den in Graden ausgedrückten Torsionswinkel,

$G$  das statische Kraft-Moment, welches einen cylindrischen Stab von 1 Quadrat-Centimeter Querschnitt und von 1 Centimeter Länge um  $360^\circ$  zu drehen vermag,

so ist:

a) für cylindrische Stäbe (Durchmesser =  $d$ )

$$\theta = 32 \frac{M}{G} l \frac{180}{d^4 \pi^2}$$

b) für einen quadratischen Stab (a Seite des Quadrats)

$$\theta = 6 \frac{M}{G} l \frac{180}{a^4 \pi}$$

c) für einen parallelepipedischen Stab (a, b Seiten des Querschnittes)

$$\theta = 3 \frac{M}{G} l \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3} \frac{180}{\pi}$$

Die Werthe von G sind im Allgemeinen gleich  $0.4 \varepsilon$  und befinden sich in der Tabelle Nr. 57 zusammengestellt.

### Körperformen von gleicher Festigkeit.

51.

#### *Körper von gleicher absoluter Festigkeit.*

Kurze Stäbe, deren Gewicht im Vergleich zu der sie ausdehnenden Kraft nicht gross ist, erhalten nach ihrer ganzen Ausdehnung gleiche Festigkeit gegen das Abreissen, wenn 1) alle Querschnitte gleiche Grösse haben, 2) wenn die aufeinander folgenden Querschnitte sowohl hinsichtlich ihrer Form als auch hinsichtlich ihrer Stellung stetig in einander übergehen oder vollkommen übereinstimmen. Sehr lange Stäbe, deren Gewicht im Vergleich zu der sie dehnenden Kraft bedeutend gross ist, erhalten in allen Querschnitten gleiche Festigkeit, wenn sie nach folgender Regel geformt werden.

Nennt man Fig. 16, Taf. IV:

P die an den Stab gehängte Last,

$\gamma$  das Gewicht von 1 Cubik-Centimeter des Materials, aus welchem der Stab besteht,

$\mathfrak{A}$  die Spannung per 1 Quadrat-Centimeter, welche in der ganzen Ausdehnung des Stabes herrschen soll,

e = 2.718 die Basis der natürlichen Logarithmen,

$\Omega$  den Querschnitt des Stabes in einer Höhe x oberhalb seines unteren Endes,

so hat man zur Bestimmung der Form des Stabes die Gleichung:

$$\Omega = \frac{P}{\mathfrak{A}} e^{\frac{\gamma}{\mathfrak{A}} x}$$

## 52.

*Körper von gleicher Festigkeit gegen das Abbrechen.*

Bei den folgenden Körperformen von gleicher Festigkeit gegen das Abbrechen wird das eine Ende befestigt, das andere Ende frei und belastet angenommen. Das Gewicht des Körpers wird vernachlässigt.

Fig. 1, Taf. VI. Breite des Körpers überall gleich  $b$ . Höhe des Körpers an der Befestigungsstelle  $BC = h$ . Zur Bestimmung von  $h$  hat man die Gleichung:

$$P l = \frac{3}{6} b h^2$$

Die Linie  $CmA$  ist eine quadratische Parabel, die nach dem in Nr. 1 angegebenen Verfahren verzeichnet werden kann, wenn einmal die Dimensionen bekannt sind.

Fig. 2, Tafel VI. Breite des Körpers überall gleich  $b$ . Zur Bestimmung der Höhe  $BB_1 = h$  hat man die Gleichung:

$$P l = \frac{3}{6} b h^2$$

Die krumme Linie  $BA B_1$  ist eine quadratische Parabel, die nach dem in Nr. 1 angegebenen Verfahren verzeichnet werden kann.

Fig. 3 und Fig. 4, Tafel VI. sind zwei Körper, die annähernd eine gleiche Festigkeit darbieten. Die Breite ist bei jedem derselben überall gleich  $b$ . Zur Bestimmung von  $b$  oder  $BB_1 = h$  hat man die Gleichung:

$$P l = \frac{3}{6} b h^2$$

Für den Querschnitt am freien Ende ist zu nehmen:

$$AA_1 = \frac{1}{2} h$$

$$\text{Breite} = b$$

Fig. 5, Taf. VI. Alle Querschnitte sind geometrisch-ähnliche Rechtecke. Zur Bestimmung der Form des Körpers hat man:

$$P l = \frac{3}{6} b h^2, y = h \sqrt[3]{\frac{x}{l}}, z = b \sqrt[3]{\frac{x}{l}}$$

Die Linien  $BA B_1$  und  $DA D_1$  sind kubische Parabeln.

Fig. 6, Taf. VI. ist eine Annäherungsform an den vorhergehenden Körper. Zur Bestimmung von  $DD_1 = b$  oder  $BB_1 = h$  hat man die Gleichung:

$$P l = \frac{3}{6} b h^2$$

Die Querschnittsdimensionen des freien Endes sind:

$$A A_1 = \frac{2}{3} h, \quad E E_1 = \frac{2}{3} b$$

Fig. 7, Tafel VI. ist ein Rotationskörper von gleicher Festigkeit. Zur Bestimmung des Durchmessers  $B B_1 = d$  hat man die Gleichung:

$$P l = \frac{\pi}{32} \mathfrak{B} d^3$$

Die Linie  $B A B_1$ , durch deren Umdrehung die Rotationsfläche entsteht, ist eine kubische Parabel, und es ist:

$$y = d \sqrt[3]{\frac{x}{l}}$$

Fig. 8, Taf. VI. ist ein abgestumpfter Kegel, welcher eine Annäherung an die vorhergehende Form bildet, wenn man nimmt:

$$A A_1 = \frac{2}{3} B B_1.$$

53.

#### *Körper von gleicher rückwirkender Festigkeit*

Fig. 17, Tafel IV. werden auf folgende Art erhalten: Man bestimme nach Nr. 41 den mittleren Querschnitt des Körpers. Ist  $h$  irgend eine Dimension desselben, so findet man die analoge Dimension  $z$  in einem beliebigen Querschnitt, welcher von dem Ende des Stabes um  $x$  entfernt ist, durch folgenden Ausdruck:

$$\frac{x}{l} = \frac{2}{\pi} \left[ \text{Arc. sin } \frac{z}{h} - \frac{z}{h} \sqrt{1 - \left(\frac{z}{h}\right)^2} \right]$$

Annähernd erhält man Körperformen von gleicher rückwirkender Festigkeit, wenn man an den Enden Querschnitte annimmt, die mit dem mittleren geometrisch ähnlich, aber im Verhältniss 7 : 10 linear kleiner sind, und sodann die zusammengehörigen Punkte der drei Querschnitte durch schwach gekrümmte Linien verbindet \*).

\*) Bei der Ableitung obiger Beziehung zwischen  $x$  und  $z$ , derzufolge für  $x = 0$  auch  $z = 0$  wäre, ist nur auf diejenigen Spannungen und Pressungen Rücksicht genommen worden, welche durch die Biegung des Stabes bedingt werden. Eine andere Untersuchung (Grashof, Festigkeitslehre, Nr. 152), welche auch die von der Biegung unabhängige Pressung berücksichtigt, ergibt das der Aufgabe entsprechende Verjüngungsverhältniss als eine Function der verhältnissmässigen Länge des Stabes.

54.

Vergleichung zwischen verschiedenen Querschnittsformen. Taf. V.

Ein runder und ein viereckiger Querschnitt haben gleiche relative Festigkeit, wenn:

$$\frac{h}{d} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{32} 6 \left(\frac{h}{b}\right)}$$

Für

$$\frac{h}{b} = \frac{1}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{4}{5} \quad 1 \quad \frac{5}{4} \quad \frac{3}{2} \quad 2 \quad \frac{5}{2} \quad 3$$

wird

$$\frac{h}{d} = 0.581 \quad 0.618 \quad 0.665 \quad 0.732 \quad 0.778 \quad 0.838 \quad 0.903 \quad 0.960 \quad 1.056 \quad 1.138 \quad 1.209$$

h die mit der biegenden Kraft parallele Dimension des Querschnittes.

Ein runder und ein elliptischer Querschnitt haben gleiche relative Festigkeit, wenn:

$$\frac{h}{d} = \sqrt[3]{\frac{h}{b}}$$

$$\text{Für } \frac{h}{b} = \frac{1}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{4}{5} \quad 1 \quad \frac{5}{4} \quad \frac{3}{2} \quad 2 \quad \frac{5}{2} \quad 3$$

$$\text{wird } \frac{h}{d} = 0.693 \quad 0.737 \quad 0.794 \quad 0.874 \quad 0.928 \quad 1 \quad 1.077 \quad 1.145 \quad 1.260 \quad 1.357 \quad 1.442$$

h die mit der biegenden Kraft parallele Axe der Ellipse.

Ein runder und ein viereckiger Querschnitt haben bei verhältnissmässig grosser Länge der Stäbe gleiche rückwirkende Festigkeit, wenn:

$$\frac{h}{d} = \sqrt[4]{\frac{\pi}{32} 6 \left(\frac{h}{b}\right)}$$

$$\text{Für } \frac{h}{b} = \frac{1}{5} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad 1$$

$$\text{wird } \frac{h}{d} = 0.586 \quad 0.619 \quad 0.666 \quad 0.737 \quad 0.792 \quad 0.815 \quad 0.876$$

h die kleinere von den Dimensionen des Rechtecks.

Wenn insbesondere bei kreisförmigen Querschnitten

d den Durchmesser in der Mitte,

d<sub>1</sub> den Durchmesser an den Enden bedeutet,

so ist zu nehmen:

$$\frac{d_1}{d} = 0,88 \quad 0,77 \quad 0,65 \quad 0,55 \quad 0,47$$

$$\text{für } \frac{2l}{d} = 10 \quad 15 \quad 20 \quad 25 \quad 30 \quad \text{G.}$$



Ein runder und ein elliptischer Querschnitt haben bei verhältnissmässig grosser Länge der Stäbe gleiche rückwirkende Festigkeit, wenn

$$\frac{h}{d} = \sqrt[4]{\frac{h}{b}}$$

$$\text{Für } \frac{h}{b} = \frac{1}{5} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad 1$$

$$\text{wird } \frac{h}{d} = 0.669 \quad 0.707 \quad 0.760 \quad 0.841 \quad 0.904 \quad 0.931 \quad 1$$

h die kleinere Axe des elliptischen Querschnittes.

Ein runder und ein quadratischer Querschnitt\*) haben einerlei Torsions-Festigkeit, wenn:

$$d = b \sqrt[3]{\frac{16}{3 \pi \sqrt{2}}} = 1.063 b, \quad b = 0.941 d.$$

55.

*Wirkungsgrössen, welche zur Ausdehnung, Zusammenpressung, Biegung und Drehung von stabförmigen Körpern nothwendig sind.*

a. Ausdehnung oder Zusammenpressung.

Es sei:

V das Volumen des Stabes in Kubik-Centimetern,

l die Länge des Stabes in Centimetern,

Ω der Querschnitt des Stabes in Quadrat-Centimetern,

ε der Modulus der Elastizität des Materials, aus welchem der Stab besteht (Tabelle Nr. 57),

λ die Ausdehnung oder Zusammenpressung (Verlängerung oder Verkürzung) des Stabes in Centimetern,

ℳ die Spannung per 1 Quadrat-Centimeter, welche in der ganzen Ausdehnung des Stabes eintritt, wenn derselbe um λ gedehnt worden ist,

W die Wirkungsgrösse in Kilogr.-Centimetern, welche dieser Ausdehnung entspricht, so ist:

$$\left. \begin{aligned} W &= \frac{\Omega \varepsilon \lambda^2}{2 l} \\ \text{oder auch } W &= \frac{1}{2} \frac{\mathcal{M}^2}{\varepsilon} V \end{aligned} \right\} \text{Kilogramm-Centimeter.}$$

\*) Wenn man die Torsions-Festigkeit des quadratischen Querschnitts nach der in der Anmerkung zu Nr. 42 angeführten Formel berechnet, ist:

$$d = b \sqrt[3]{\frac{32}{9 \pi}} = 1.042 b, \quad b = 0.960 d.$$

G.

Setzt man in den letzten dieser Ausdrücke für  $\mathfrak{A}$  den Coefficienten für die absolute Festigkeit des Materials, aus welchem der Stab besteht, so erhält man die Wirkungsgrösse, welche erforderlich ist, um den Stab bis zum Abreissen auszudehnen. Diese Wirkungsgrösse ist proportional: 1) dem Volumen des Stabes, 2) dem Quadrat der absoluten Festigkeit und 3) umgekehrt proportional dem Modulus der Elastizität.

Die Widerstandsfähigkeit der Materialien gegen Wirkungsgrössen muss nach dem Quotienten  $\frac{\mathfrak{A}^2}{\varepsilon}$  beurtheilt werden. Die Werthe desselben sind in Tabelle Nr. 57 enthalten.

b. Biegung der Stäbe.

Nennt man:

E denjenigen von den auf Taf. V. zusammengestellten Ausdrücken, welcher der Querschnittsform des Stabes entspricht,

z den Abstand der neutralen Faser von der am stärksten ausgedehnten Faser,

l die ganze Länge des Stabes,

$\mathfrak{B}$  die auf 1 Quadrat-Centimeter bezogene stärkste Spannung, welche in dem Stabe vorkommt,

$\varepsilon$  den Modulus der Elastizität des Materials, aus welchem der Stab besteht,

V das Volumen des Stabes,

W die Wirkungsgrösse in Kilogramm-Centimetern, welche erforderlich ist, um den Stab so stark zu biegen, dass die auf 1 Quadrat-Centimeter bezogene stärkste Spannung gleich  $\mathfrak{B}$  wird,

so ist:

$$W = \frac{1}{6} \frac{\mathfrak{B}^2}{\varepsilon} \frac{El}{z}$$

und dieser Ausdruck gilt sowohl für den Fall, wenn der Stab an dem einen Ende befestigt ist und die biegende Kraft auf das andere freie Ende einwirkt, als auch dann, wenn der Stab auf zwei Unterstützungspunkten liegt und die biegende Kraft an irgend einem dazwischen liegenden Punkt wirksam ist.

Für die einfacheren Querschnittsformen wird  $\frac{El}{z}$  dem Volumen des Stabes proportional und man findet

a) für einen Stab mit rechteckigem Querschnitt:

$$W = \frac{1}{18} \frac{\mathfrak{B}^2}{\varepsilon} V$$

3.

b) für einen massiven cylindrischen Stab :

$$W = \frac{1}{24} \frac{\mathfrak{B}^2}{\varepsilon} V$$

c) für einen elliptischen Stab :

$$W = \frac{1}{24} \frac{\mathfrak{B}^2}{\varepsilon} V$$

d) für einen dreikantigen Stab in dem Falle Taf. V, Nr. 5:

$$W = \frac{1}{12} \frac{\mathfrak{B}^2}{\varepsilon} V$$

Die Werthe von  $\frac{\mathfrak{B}^2}{\varepsilon}$ , welche dem Bruch durch Biegung entsprechen, sind in der Tabelle 57 zusammengestellt.

c. Drehung der Stäbe.

Nennt man:

- V das Volumen eines quadratischen oder runden Stabes,  
 G den Modulus der Elastizität für Drehung und für das Material,  
 aus welchem der Stab besteht (Tabelle Nr. 57),  
 T die auf 1 Quadrat-Centimeter bezogene grösste Spannung, welche  
 an der Oberfläche des Stabes in Folge einer Verwindung des-  
 selben eintritt,  
 W die in Kilogramm-Centimetern ausgedrückte Wirkungsgrösse,  
 welche erforderlich ist, um den Stab so stark zu verwinden, bis  
 die Spannung T eintritt, so ist
- a) für cylindrische Stäbe :

$$W = \frac{1}{4} \frac{T^2}{G} V$$

b) für quadratische Stäbe:

$$W = \frac{1}{6} \frac{T^2}{G} V$$

Die Werthe von  $\frac{T^2}{G}$ , welche dem Reissen der Fasern an der Oberfläche entsprechen, sind in der Tabelle Nr. 57 enthalten.

56.

*Bemerkung.*

Aus den in vorhergehender Nummer zusammengestellten Resultaten ersieht man, dass die Widerstandsfähigkeit der Körper gegen

Wirkungsgrößen, also auch gegen die Einwirkung von lebendigen Kräften, bei allen einfacheren Körperformen dem Volumen proportional ist, dass es also nur auf dieses Letztere und nicht auf die einzelnen Dimensionen ankommt. Zwei Stäbe z. B., die aus einerlei Material bestehen und gleich grosse Volumen haben, gewähren bei gleicher Querschnittsform einerlei Widerstandsfähigkeit gegen die Einwirkung von lebendigen Kräften, wie auch sonst die Dimensionen der Stäbe beschaffen sein mögen. Genau ist jedoch dieses Gesetz (welches für den Bau der Maschinen, die lebendigen Kräften zu widerstehen haben, von bedeutender Wichtigkeit ist) nur dann, wenn die Formänderungen der Körper nicht zu rapid erfolgen, so dass die Einwirkung der lebendigen Kraft Zeit findet, sich über den ganzen Körper zu verbreiten.

## 57.

*Coeffizienten für die Festigkeit und Elastizität der Materialien.*

Die folgende Tabelle enthält die Coeffizienten für die Festigkeit und Elastizität derjenigen Materialien, welche im Maschinenbau vorzugsweise verwendet werden.

Columnne  $\mathfrak{A}$  Coeffizienten für die absolute Festigkeit per 1 Quadrat-Centimeter.

Columnne  $\mathfrak{B}$  Brechungs-Coeffizienten per 1 Quadrat-Centimeter.

Columnne T Coeffizienten für den Bruch durch Abwinden.

Columnne  $\varepsilon$  Modulus der Elastizität der Materialien zur Berechnung der Ausdehnung, Zusammenpressung und Biegung der Körper.

Columnne G Modulus der Elastizität der Materialien zur Berechnung der Torsion von Stäben.

Columnne  $\frac{\mathfrak{A}^2}{\varepsilon}$  Coeffizienten zur Berechnung der Wirkungsgrößen, welche zum Abreissen der Körper erforderlich sind.

Columnne  $\frac{\mathfrak{B}^2}{\varepsilon}$  Coeffizienten zur Berechnung der Wirkungsgrößen, welche zum Abbrechen der Körper erforderlich sind.

Columnne  $\frac{T^2}{G}$  Coeffizienten zur Berechnung der Wirkungsgrößen, welche zum Abwinden von Stäben erforderlich sind.

Die Coeffizienten sind sämtlich die mittleren Werthe zahlreicher Versuchsergebnisse über die Festigkeit der Materialien.

## Zu Nr. 57.

Zusammenstellung der Coeffizienten für die Festigkeit und Elastizität der Materialien.

Material.	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B}$	T	$\varepsilon$	G	$\frac{\mathfrak{A}^2}{\varepsilon}$	$\frac{\mathfrak{B}^2}{\varepsilon}$	$\frac{T^2}{G}$
Eichenholz . .	720	700	280	120000	48000	4.3	4.1	1.6
Eschenholz . .	1195	900	478	112000	44800	12.8	7.2	5.1
Tannenholz . .	854	600	240	100000	40000	7.3	3.6	1.44
Buchenholz . .	803	720	321	93000	37200	6.9	5.6	2.8
Schmiedeeisen (dünn) . . . .	4350	7000	7000	2500000	1000000	7.6	19.6	49
Schmiedeeisen, dickere Stäbe	3300	4000	4500	1500000	600000	7.3	10.7	33.7
Eisendraht . .	7000	—	—	1800000	720000	27.2	—	—
Gusseisen . .	1000 1300	3000	3000	1000000	400000	1.0 1.7	9.0	22.5
Gussstahl . . .	10000	16000	10000	2000000	960000	50	128	104
Stahl, mittlere Qualität . . . .	7500	—	7500	3000000	1200000	18.7	—	46.9
Stahl, ordinäre Qualität . . . .	3600	—	3600	2000000	800000	6.5	—	16.2
Kanonenmetall	2600	—	2300	700000	360000	9.7	—	14.7
Kupfer, gehäm- mert . . . . .	2500	—	—	1310000	—	4.8	—	—
Kupfer, gegos- sen . . . . .	1300	—	2000	—	—	—	—	—
Messing . . . .	1300	2270	2100	645000	258000	2.6	8.0	17.1
Zinn . . . . .	333	—	658	320000	—	0.35	—	—
Blei . . . . .	128	—	458	540000	—	0.03	—	—
Zink . . . . .	199	—	—	—	—	—	—	—
Glas . . . . .	248	—	—	9000	—	6.8	—	—
Kalbleder . .	129	—	—	391	—	43	—	—
Gegerbtes Schafleder . .	110	—	—	381	—	32	—	—
Weisses Ross- leder . . . . .	272	—	—	748	—	99	—	—
Dünnes Ross- leder . . . . .	218	—	—	476	—	100	—	—
Corduan Ross- leder . . . . .	114	—	—	252	—	52	—	—
Kuhleder . . .	271	—	—	683	—	108	—	—
Hanfseile . . .	510	—	—	—	—	—	—	—

58.

*Elastizitätsgrenze.*

Elastizitätsgrenze nennt man den Zustand der stärksten Ausdehnung oder Zusammendrückung eines Körpers, welche noch verschwindet, wenn die ausdehnenden oder zusammendrückenden Kräfte beseitigt und der Körper sich selbst überlassen wird. Innerhalb dieser Elastizitätsgrenze ist der Modulus der Elastizität nahe konstant.

Nennt man:

$\mathfrak{R}$  die absolute Festigkeit,

$\mathfrak{R}$  die rückwirkende Festigkeit,

$\mathfrak{R}_1$  die auf einen Quadrat-Centimeter bezogene Spannungskraft an der Elastizitätsgrenze der Ausdehnung,

$\mathfrak{R}_1$  die auf einen Quadrat-Centimeter bezogene Zusammendrückungskraft an der Elastizitätsgrenze,

$a_1$  die lineare Ausdehnung eines Stabes an der Elastizitätsgrenze,

$r_1$  die lineare Zusammendrückung eines Stabes an der Elastizitätsgrenze,

so hat man der Erfahrung zufolge annähernd nachstehende Resultate:

Material.	$\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}}$	$\frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{R}}$	$\frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{R}}$	$a_1$	$r_1$
Schmiedeseisen . . . . .	$\frac{4}{5}$	0.4	0.4	$\frac{1}{1250}$	$\frac{1}{1250}$
Eisenblech . . . . .	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{1222}$	$\frac{1}{1222}$
Eisendraht . . . . .	$\frac{4}{5}$	0.4	0.4	$\frac{1}{843}$	$\frac{1}{843}$
Gusseisen . . . . .	5.5	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{1562}$	$\frac{1}{521}$
Tannenholz . . . . .	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{666}$
Fichtenholz . . . . .	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{536}$	$\frac{1}{714}$
Kiefernholz . . . . .	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{444}$	$\frac{1}{592}$
Lärchenholz . . . . .	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{533}$
Eichenholz . . . . .	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{469}$	$\frac{1}{563}$