Theorie der Elasticität und Festigkeit

Grashof, Franz

Berlin, 1878

B. Der Deformationszustand in einem Körperpunkte

urn:nbn:de:bsz:31-289800

Geraden halbiren, die vom Punkte P aus parallel mit der y-Axe und der z-Axe gezogen werden. Die Spannungsellipse ist in diesem Falle ein Kreis, während die Richtungscurve der Spannungen aus zwei gleichseitigen Hyperbeln besteht. —

Wenn die auf beliebige rechtwinklige Axen der x, y, z bezogenen Spannungen σ_x, σ_y, σ_z, τ_x, τ_y, τ_z ausser der Gleichung (20) auch der Gleichung

$$\sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_y - \tau_x^2 - \tau_y^2 - \tau_z^2 = 0 \quad . \quad (22)$$

entsprechen, so sind zwei Hauptspannungen = Null, etwa σ_2 und $\sigma_3 = 0$, während nach Gleichung (21) dann

$$\sigma_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

ist. In diesem Falle, der insbesondere dann stattfindet, wenn die Spannungscomponenten σ_x, σ_y, σ_z, τ_x, τ_y, τ_z alle = Null sind ausser einer Normalspannung, die dann die Hauptspannung σ_1 ist, folgt aus den Gleichungen (13): $\cos\mu = \cos\nu = 0$, also $\cos\lambda = \pm 1$; die Richtungslinie jeder Spannung p liegt also in der Hauptspannungsrichtung σ_1. Für jede Fläche, deren Normale den Winkel α mit der Richtung von σ_1 bildet, ist:

$$p = \pm \sigma_1 \cos\alpha, \qquad \sigma = \sigma_1 \cos^2\alpha, \qquad \tau = \pm \frac{1}{2} \sigma_1 \sin 2\alpha \quad (24),$$

also τ am grössten $= \pm \frac{1}{2} \sigma_1$ in allen Ebenen, die unter 45^0 gegen die Richtung von σ_1 geneigt sind.

B. Der Deformationszustand in einem Körperpunkte.

10. — Es sei wieder P irgend ein materieller Punkt eines Körpers, PP' irgend eine von P aus gezogene Richtung, unter den Winkeln α, β, γ geneigt gegen die im Körper fixirten rechtwinkligen Axen der x, y, z. Ist dann Q ein dem Punkte P unendlich nahe gelegener materieller Körperpunkt in PP', ds die Länge der Strecke PQ im ursprünglichen Zustande des Körpers (d. h. vor seiner Deformation in Folge der Einwirkung äusserer Kräfte) und Δds die mit der Deformation verbundene Längenänderung der Strecke PQ, so heisst der Quotient

$$\varepsilon = \frac{\Delta ds}{ds}$$

die Dehnung (Ausdehnung) im Punkte P nach der Richtung PP'; sie ist positiv oder negativ, absolut genommen eine Ausdehnung im engeren Sinne oder eine Zusammenziehung, jenachdem sie einer Verlängerung oder Verkürzung der Strecke PQ entspricht, und wird hier immer als ein sehr kleiner Bruch vorausgesetzt.

Durch die Dehnungen ε, die im Punkte P nach allen Richtungen stattfinden, ist offenbar die Deformation jedes diesen Punkt enthaltenden Körperelementes, dessen sämmtliche Dimensionen unendlich klein sind, d. h. der Deformationszustand im Punkte P des Körpers bestimmt, analoger Weise wie die Spannungen p im Punkte P aller durch ihn hindurch gehenden Ebenen den Spannungszustand in diesem Punkte bestimmen. Ebenso aber wie letzterer schon durch 3 von einander unabhängige Grössen vollständig charakterisirt wird, indem die ihn unmittelbar bestimmenden 6 Spannungen σ_x, σ_y, σ_z, τ_x, τ_y, τ_z durch die 3 Gleichungen (2) verbunden sind, so auch der Deformationszustand, und zwar lassen sich solche 3 Grössen hier unmittelbar erkennen in den Aenderungen ξ, η, ζ, denen die ursprünglichen Coordinaten x, y, z der materiellen Punkte in Folge der Deformation des Körpers unterworfen sind, indem dadurch die Dehnung ε in dem beliebigen Punkte P nach der beliebigen Richtung PP' (α, β, γ) ausgedrückt werden kann. Sind nämlich

$$x + dx, \qquad y + dy, \qquad z + dz$$

die ursprünglichen Coordinaten des oben mit Q bezeichneten materiellen Punktes, so sind ihre Aenderungen bei der Deformation des Körpers:

$$\xi_1 = \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy + \frac{\partial \xi}{\partial z} dz$$

$$\eta_1 = \eta + \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy + \frac{\partial \eta}{\partial z} dz$$

$$\zeta_1 = \zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx + \frac{\partial \zeta}{\partial y} dy + \frac{\partial \zeta}{\partial z} dz$$

und indem nun die Projectionen der Strecke PQ auf die Coordinatenaxen, die ursprünglich $= dx$, dy, dz waren, sich beziehungsweise um $\xi_1 - \xi$, $\eta_1 - \eta$, $\zeta_1 - \zeta$ geändert haben, während die Länge dieser Strecke selbst von ds in $ds\,(1 + \varepsilon)$ überging, ist

$$ds^2 (1+\varepsilon)^2 = (dx + \xi_1 - \xi)^2 + (dy + \eta_1 - \eta)^2 + (dz + \zeta_1 - \zeta)^2.$$

Daraus folgt mit Rücksicht auf die Gleichung

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

bei Vernachlässigung kleiner Grössen zweiter Ordnung:

$$\varepsilon = \frac{\xi_1 - \xi}{ds}\frac{dx}{ds} + \frac{\eta_1 - \eta}{ds}\frac{dy}{ds} + \frac{\zeta_1 - \zeta}{ds}\frac{dz}{ds}$$

und daraus durch Einsetzung der Ausdrücke von ξ_1, η_1, ζ_1 sowie mit

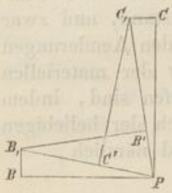
$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma$$

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}\cos^2\alpha + \frac{\partial \eta}{\partial y}\cos^2\beta + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\cos^2\gamma + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)\cos\beta\cos\gamma$$
$$+ \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right)\cos\gamma\cos\alpha + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\cos\alpha\cos\beta \quad . \quad (25).$$

11. — Nach Gleichung (25) ist ε beziehungsweise $= \frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y}, \frac{\partial \zeta}{\partial z}$, wenn $\alpha = 0$, $\beta = 0$ oder $\gamma = 0$ ist; diese partiellen Differentialquotienten von ξ nach x, von η nach y und von ζ nach z sind also die Dehnungen im Punkte P nach den Richtungen der Coordinatenaxen, die mit ε_x, ε_y, ε_z bezeichnet seien.

Was die Coefficienten der Cosinus-Producte in derselben Gleichung betrifft, so seien im ursprünglichen Zustande des Körpers von P aus die unendlich kleinen Geraden $PA = dx$ parallel der x-Axe, $PB = dy$ parallel der y-Axe, $PC = dz$ parallel der z-Axe gezogen und A, B, C als materielle Punkte wie P verstanden. Mit der Deformation ist dann (Fig. 2) eine Verschiebung von C gegen P im Sinne der y-Axe:

Fig. 2.



$$CC_1 = \frac{\partial \eta}{\partial z} dz$$

und eine Verschiebung von B gegen P im Sinne der z-Axe:

$$BB_1 = \frac{\partial \zeta}{\partial y} dy$$

verbunden, also eine Veränderung des ursprünglich rechten Winkels BPC um die kleine Winkelsumme:

$$CPC_1 + BPB_1 = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}.$$

Das ist der Coefficient von $\cos\beta \cos\gamma$ in Gleichung (25), der mit γ_x bezeichnet sei, ebenso wie der Coefficient von $\cos\gamma \cos\alpha$ mit γ_y, der von $\cos\alpha \cos\beta$ mit γ_z; jenachdem die dadurch ausgedrückten kleinen Aenderungen der Winkel BPC, CPA, APB Verkleinerungen oder Vergrösserungen derselben entsprechen, sind γ_x, γ_y, γ_z positiv oder negativ.

Diese Grössen γ_x, γ_y, γ_z sind ebenso den Schubspannungen τ_x, τ_y, τ_z analog wie die Dehnungen ε_x, ε_y, ε_z den Normalspannungen σ_x, σ_y, σ_z. Sind nämlich (Fig. 2) B' und C' die Projectionen von B_1 und C_1 beziehungsweise auf PC_1 und PB_1, so heisse

$$\frac{PB'}{PB_1} = \gamma_{yz}, \quad \frac{PC'}{PC_1} = \gamma_{zy}$$

ersteres Verhältniss die Schiebung im Punkte P der zur y-Axe senkrechten Ebene (CPA) im Sinne der z-Axe, letzteres die Schiebung im Punkte P der zur z-Axe senkrechten Ebene (APB) im Sinne der y-Axe; beide sind einander gleich und zwar, sofern sie sehr klein sind, bei Vernachlässigung kleiner Grössen zweiter Ordnung

$$= \frac{\pi}{2} - \text{Winkel } B_1 P C_1 = \gamma_x,$$

analog wie nach Gleichung (1) die Schubspannungen τ_{yz} und τ_{zy} einander gleich gefunden wurden, so dass beide kürzer mit τ_x bezeichnet werden konnten. Ueberhaupt können nun γ_x, γ_y, γ_z als die S c h i e b u n g e n oder G l e i t u n g e n bezeichnet werden, die in dem betreffenden Punkte beziehungsweise in den zur y- und z-Axe senkrechten Ebenen im Sinne der z- resp. y-Axe, in den zur z- und zur x-Axe senkrechten Ebenen im Sinne der x- resp. z-Axe, und in den zur x- und zur y-Axe senkrechten Ebenen im Sinne der y- resp. x-Axe stattfinden. Mit den erklärten Bezeichnungen:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial \xi}{\partial x}; \quad \gamma_x = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial \eta}{\partial y}; \quad \gamma_y = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial \zeta}{\partial z}; \quad \gamma_z = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

erhält Gleichung (25) die Form:

$$\varepsilon = \varepsilon_x \cos^2\alpha + \varepsilon_y \cos^2\beta + \varepsilon_z \cos^2\gamma + \gamma_x \cos\beta\cos\gamma + \gamma_y \cos\gamma\cos\alpha + \gamma_z \cos\alpha\cos\beta \quad . \quad (27).$$

12. — Denkt man sich im ursprünglichen Zustande des Körpers vom Punkte P als Eckpunkt aus ein unendlich kleines parallelepipedisches Massenelement abgegrenzt, dessen Kanten $PA = dx$, $PB = dy$, $PC = dz$ den Axen der x, y, z parallel sind (Fig. 1, Nr. 2), so geht dasselbe bei der Deformation des Körpers in ein etwas schiefwinkliges Parallelepipedum über, dessen Kantenlängen $= dx(1+\varepsilon_x)$, $dy(1+\varepsilon_y)$, $dz(1+\varepsilon_z)$ und dessen Winkel an diesen dreierlei Kanten beziehungsweise um γ_x, γ_y, γ_z von rechten Winkeln verschieden sind, so dass z. B. die Winkel an den Kanten PA und $P'A' = \frac{\pi}{2} - \gamma_x$, an den Kanten BC' und $B'C = \frac{\pi}{2} + \gamma_x$ werden u. s. f. Diese Art der Deformation des Körperelementes, wobei es nach wie vor parallelepipedisch bleibt, charakterisirt also den Deformationszustand im Punkte P bei Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung; bei Berücksichtigung der letzteren könnten die gegenüber liegenden Begrenzungsflächen des Körperelementes ausserdem gegenseitige Neigungen und Verdrehungen erfahren und in krumme Flächen übergehen.

Noch anschaulicher kann der Deformationszustand im Punkte P dargestellt werden durch die Deformation eines Massenelementes, das im ursprünglichen Zustande des Körpers von einer um P als Mittelpunkt mit einem unendlich kleinen Halbmesser ds beschriebenen Kugelfläche begrenzt wird. Sind PA, PB, PC die mit den Axen der x, y, z parallelen Halbmesser dieser Kugel und dx, dy, dz die ursprünglichen Coordinaten des Punktes Q der Kugelfläche in Beziehung auf PA, PB, PC als Axen, so sind (A, B, C, Q als materielle Punkte wie P verstanden)

$$dx_1 = dx(1+\varepsilon_x), \quad dy_1 = dy(1+\varepsilon_y), \quad dz_1 = dz(1+\varepsilon_z)$$

die durch die Deformation veränderten Coordinaten des Punktes Q in Beziehung auf die veränderten Halbmesser PA, PB, PC als (im Allgemeinen jetzt etwas schiefwinklige) Axen. Aus der Gleichung

$$\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} + \frac{dz^2}{ds^2} = 1$$

folgt dann als Gleichung des geänderten Ortes der Punkte Q, d. h. als Gleichung der deformirten Kugelfläche in Beziehung auf die neuen Axen PA, PB, PC:

$$\left(\frac{dx_1}{ds(1+\varepsilon_x)}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{ds(1+\varepsilon_y)}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{ds(1+\varepsilon_z)}\right)^2 = 1 \quad (28),$$

d. i. die Gleichung eines Ellipsoids in Bezug auf die conjugirten Halbmesser $= ds(1+\varepsilon_x)$, $ds(1+\varepsilon_y)$, $ds(1+\varepsilon_z)$ als Axen. Da die Axrichtungen der x, y, z beliebige zu einander senkrechte Richtungen sind, so folgt also, dass ein unendlich kleines kugelförmiges Körperelement durch die Deformation in ein Ellipsoid übergeht, dessen je drei conjugirte Durchmesser ursprünglich zu einander senkrecht waren; es heisse das Deformationsellipsoid.

13. Der Ausdruck (27) von ε hat in Beziehung auf α, β, γ dieselbe Form wie der Ausdruck (6) von σ, aus dem er durch Substitution von ε für σ und von $\frac{1}{2}\gamma$ für τ erhalten werden kann. Er gestattet deshalb auch ähnliche Folgerungen wie jener; insbesondere ergiebt sich durch eine Betrachtung, die der in Nr. 5 angestellten ganz analog ist, dass es in jedem Punkte des Körpers 3 zu einander senkrechte Richtungen giebt, für welche, wenn sie als Axen der x, y, z genommen werden, die Schiebungen γ_x, γ_y, γ_z = Null sind, so dass also ein unendlich kleines parallelepipedisches Körperelement, dessen Kanten diese Richtungen haben, auch bei der Deformation rechtwinklig bleibt. Die Dehnungen nach diesen Richtungen heissen die Hauptdehnungen für den betreffenden Punkt und seien mit

$$\varepsilon_1 \qquad \varepsilon_2 \qquad \varepsilon_3$$

bezeichnet. Die conjugirten Durchmesser des Deformationsellipsoids, mit denen sie nach Nr. 12 zusammenfallen, sind rechtwinklig gegen einander, also die Hauptaxen desselben, woraus weiter folgt, dass unter den Hauptdehnungen sich die grösste und die kleinste Dehnung (algebraisch verstanden) befindet, die in dem betreffenden Punkte nach irgend einer Richtung stattfindet.

Dieser Umstand, demzufolge eine Hauptdehnung als ein Maximal- oder Minimalwerth von ε charakterisirt werden kann, somit als eine Dehnung, die unverändert bleibt, wenn die Richtung unendlich wenig geändert wird, dient zur Bestimmung von ε_1, ε_2, ε_3 nach Grösse und Richtung vermittels der auf beliebig gewählte rechtwinklige Axen der x, y, z bezogenen Dehnungen ε_x, ε_y, ε_z und Schiebungen γ_x, γ_y, γ_z. Setzt man nämlich in Gleichung (27)

$$\varepsilon\,(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) \text{ für } \varepsilon$$

und differenzirt die Gleichung nach einander in Beziehung auf $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, so wird, wenn man dabei die Dehnung ε als eine Constante behandelt, dieselbe eben dadurch als eine Hauptdehnung charakterisirt, für welche so die folgenden Gleichungen erhalten werden:

$$\left.\begin{aligned} 2\,(\varepsilon_x - \varepsilon)\cos\alpha + \gamma_z\cos\beta + \gamma_y\cos\gamma = 0 \\ \gamma_z\cos\alpha + 2\,(\varepsilon_y - \varepsilon)\cos\beta + \gamma_x\cos\gamma = 0 \\ \gamma_y\cos\alpha + \gamma_x\cos\beta + 2\,(\varepsilon_z - \varepsilon)\cos\gamma = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (29).$$

Sie unterscheiden sich von den Gleichungen (7) zur Bestimmung der Hauptspannungen ebenso wie sich Gleichung (27) von Gleichung (6) unterscheidet, nämlich nur dadurch, dass ε an die Stelle von σ und $\frac{1}{2}\gamma$ an die Stelle von τ getreten ist; durch dieselben Substitutionen erhält man deshalb auch aus Gleichung (8) die folgende cubische Gleichung in ε:

$$\begin{aligned} 4\,(\varepsilon_x - \varepsilon)(\varepsilon_y - \varepsilon)(\varepsilon_z - \varepsilon) - (\varepsilon_x - \varepsilon)\,\gamma_x^2 - (\varepsilon_y - \varepsilon)\,\gamma_y^2 \\ - (\varepsilon_z - \varepsilon)\,\gamma_z^2 + \gamma_x\gamma_y\gamma_z = 0 \quad . \quad (30), \end{aligned}$$

deren Wurzeln $= \varepsilon_1$, ε_2, ε_3 sind, sowie auch den dortigen entsprechende Ausdrücke von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. —

Bei Benutzung der Hauptdehnungsrichtungen als Axrichtungen der x, y, z geht Gleichung (27) über in:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \cos^2\alpha + \varepsilon_2 \cos^2\beta + \varepsilon_3 \cos^2\gamma \quad . \quad . \quad . \quad (31),$$

und es folgt daraus, analog den Folgerungen aus den Gleichungen (14) und (15) in Nr. 7 bezüglich auf p^2 und σ, dass in jedem Punkte die Summe der Dehnungen nach je drei zu einander senkrechten Richtungen gleich gross ist. Zugleich hat hier diese unveränderliche Summe eine bemerkenswerthe Bedeutung. Da nämlich das Volumen des parallelepipedischen Körperelementes $dx\,dy\,dz$ nur durch die Aenderungen der Entfernungen, nicht durch die gegenseitigen Verschiebungen seiner parallelen Seitenflächen sich ändert, so ist das geänderte Volumen bei Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung:

$$dx(1+\varepsilon_x)\,dy(1+\varepsilon_y)\,dz(1+\varepsilon_z) = dx\,dy\,dz(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z),$$

und hat also die Summe

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

die Bedeutung der verhältnissmässigen Volumenänderung, des Volumenausdehnungscoefficienten, in dem betreffenden Punkte.

Analog der Entwickelung in Nr. 8 lässt sich endlich nachweisen, dass die Schiebung ein Maximum wird in den 6 Ebenen, die durch die Richtungslinien der Hauptdehnungen gehen und die Winkel der je zwei anderen dieser Richtungslinien halbiren, sowie dass diese paarweise gleichen Hauptschiebungen die Werthe haben:

$$\gamma_1 = \pm\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\cancel{2}}, \quad \gamma_2 = \pm\frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{\cancel{2}}, \quad \gamma_3 = \pm\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\cancel{2}} \qquad (33)$$

und rechtwinklig beziehungsweise gegen ε_1, ε_2, ε_3 gerichtet sind.

C. Beziehungen zwischen dem Spannungs- und dem Deformationszustande in einem Körperpunkte.

14. — Es sei wieder P ein materieller Punkt des Körpers, von welchem aus die Gerade PP' unter den Richtungswinkeln α, β, γ gegen die im Körper fixirten Axen der x, y, z gezogen ist; dm sei ein bei P' in der Entfernung $PP' = r$ von P befindliches Massenelement, dessen sämmtliche Dimensionen unendlich klein sind. Im Zustande der Belastung und entsprechenden Deformation des Körpers, wobei die Dehnung im Punkte P nach der Richtung $PP' = \varepsilon$ sei, übt das Massenelement dm auf ein im Punkte P zu PP' senkrechtes unendlich kleines Flächenelement pro Flächeneinheit desselben nach der Richtung PP' eine gewisse Kraft aus, die proportional dm und ausserdem von r, α, β, γ und ε abhängig, also $= F(r, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)\,dm$ zu setzen ist. Sofern es sich hier aber nur um denjenigen Theil der fraglichen Kraft handelt, der durch die Deformation bedingt wird, also mit $\varepsilon = 0$ verschwindet, und ferner gemäss der Erfahrung, dass jede in gewisser Weise linear gemessene Deformation eines Körpers den belastenden Kräften und somit den ihnen entsprechenden betreffenden Spannungen um so genauer proportional gesetzt werden kann,