Die Bildung der Erdalkaliperoxyde

Engler, Carl

Heidelberg, 1910

Die Prinzipien der Mechanik für eine oder mehrere von den räumlichen Koordinaten und der Zeit abhängige Variable I.

urn:nbn:de:bsz:31-289891

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Jahrgang 1910. 30. Abhandlung.

Die Prinzipien der Mechanik für eine oder mehrere von den räumlichen Koordinaten und der Zeit abhängige Variable. I.

Von

Leo Koenigsberger
in Heidelberg

Eingegangen am 7. November 1910

Heidelberg 1910
Carl Winter's Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 516.

Nachdem ich in meiner Arbeit[1]) „Die Prinzipien der Mechanik für mehrere unabhängige Variable" die Grundzüge für eine Ausdehnung der Sätze der Mechanik, die ich früher für kinetische Potentiale beliebiger Ordnung von mehreren Parametern und der Zeit als einzigen unabhängigen Variabeln entwickelt habe, auf eine beliebige Anzahl unabhängiger Variabeln entworfen, will ich hier zunächst den Fall näher erörtern, in welchem eine physikalische Größe durch eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit vier voneinander unabhängigen Variabeln bestimmt wird — Probleme, die analog in der Mechanik wägbarer Materie die Bewegung von Massenpunkten durch die Differentialgleichung

$$\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'} = 0$$

charakterisieren, wenn H ein kinetisches Potential erster Ordnung, t die Zeit und p einen Parameter bedeutet.

Sei p eine von den Raumkoordinaten x, y, z und der Zeit t abhängige Variable, H eine in einem bestimmten Gebiete der vier unabhängigen Variabeln nebst ihren ersten partiellen Ableitungen endliche und stetige Funktion, die wir als kinetisches Potential erster Ordnung bezeichnen wollen, und genüge ferner p der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1)\quad \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{d}{dx}\frac{\partial H}{\partial p_1} - \frac{d}{dy}\frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{d}{dz}\frac{\partial H}{\partial p_3} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_4} = 0,$$

worin

$$p_1 = \frac{\partial p}{\partial x},\ p_2 = \frac{\partial p}{\partial y},\ p_3 = \frac{\partial p}{\partial z},\ p_4 = \frac{\partial p}{\partial t}$$

ist, so soll die in den zweiten, von p nach x, y, z, t genommenen partiellen Differentialquotienten lineare Differentialgleichung die erweiterte Lagrange'sche Differentialgleichung genannt werden,

[1]) *Journal für reine und angewandte Mathematik*, Band 124.

welche bekanntlich im allgemeinen auch durch das erweiterte HAMILTON'sche Prinzip

$$\delta \int\int\int\int H\, dx\, dy\, dz\, dt = 0$$

dargestellt werden kann, wenn die Integrale sich über ein bestimmtes x, y, z, t-Gebiet erstrecken, an dessen Grenzen die Variationen von p verschwinden.

Um zunächst die Fälle des kinetischen Potentials H auszuscheiden, für welche die Differentialgleichung (1) eine identische ist, bemerke man, daß, wenn

$$\frac{\partial p_\alpha}{\partial x} = p_{\alpha 1}, \ \frac{\partial p_\alpha}{\partial y} = p_{\alpha 2}, \ \frac{\partial p_\alpha}{\partial z} = p_{\alpha 3}, \ \frac{\partial p_\alpha}{\partial t} = p_{\alpha 4}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = H_0, \ \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = H_\alpha, \ \frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial p} = H_{\alpha 0}, \ \frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} = H_{\alpha\beta}$$

gesetzt wird, die Gleichung (1) wegen der geforderten Identität die Bedingungen

$$H_{\alpha\beta} = 0$$

liefert, und somit H in p_1, p_2, p_3, p_4 linear von der Form sein wird

$$(2) \quad H = \sum_\alpha h_\alpha (x, y, z, t, p)\, p_\alpha + h(x, y, z, t, p).$$

Setzt man nun

$$(3) \quad \int h_\alpha\, dp = \omega_\alpha,$$

so wird, weil

$$(4) \quad \frac{d\omega_\alpha}{dx} = \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial p} p_1, \ \frac{\partial}{\partial p}\frac{d\omega_\alpha}{dx} = \frac{\partial^2 \omega_\alpha}{\partial x \partial p} + \frac{\partial^2 \omega_\alpha}{\partial p^2} p_1,$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial p_1}\left(\frac{d\omega_\alpha}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\frac{\partial \omega_\alpha}{\partial p} = \frac{\partial^2 \omega_\alpha}{\partial p \partial x} + \frac{\partial^2 \omega_\alpha}{\partial p^2} p_1,$$

$$\frac{\partial}{\partial p_2}\left(\frac{d\omega_\alpha}{dx}\right) = \frac{\partial}{\partial p_3}\left(\frac{d\omega_\alpha}{dx}\right) = \frac{\partial}{\partial p_4}\left(\frac{d\omega_\alpha}{dx}\right) = 0$$

ist, wie unmittelbar zu sehen, $\frac{d\omega_\alpha}{dx}$ der LAGRANGE'schen Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{d\omega_\alpha}{dx}\right)-\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial p_1}\left(\frac{d\omega_\alpha}{dx}\right)-\frac{d}{dy}\frac{\partial}{\partial p_2}\left(\frac{d\omega_\alpha}{dx}\right)-\frac{d}{dz}\frac{\partial}{\partial p_3}\left(\frac{d\omega_\alpha}{dx}\right)$$
$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial p_4}\left(\frac{d\omega_\alpha}{dx}\right)=0$$

identisch genügen, und ebenso

$$\frac{d\omega_\alpha}{dy},\ \frac{d\omega_\alpha}{dz},\ \frac{d\omega_\alpha}{dt},$$

und daher auch

$$(5)\quad H-\frac{d\omega_1}{dx}-\frac{d\omega_2}{dy}-\frac{d\omega_3}{dz}-\frac{d\omega_4}{dt}=\omega$$

diese Differentialgleichung identisch befriedigen. Da aber ω vermöge der durch die Gleichungen (2), (3), (4) gegebenen Beziehungen nur von x, y, z, t und p abhängt, und die zu ω gehörige LAGRANGE'sche Gleichung infolgedessen in $\frac{\partial\omega}{\partial p}=0$ übergeht, so wird ω von p unabhängig sein und mit einem der nach x, y, z, t genommenen Differentialquotienten der Funktionen ω_α vereinigt werden können, so daß sich als notwendige Bedingung dafür, daß H der LAGRANGE'schen Differentialgleichung identisch genügt, die Form für dasselbe ergibt

$$(6)\quad H=\frac{d\omega_1}{dx}+\frac{d\omega_2}{dy}+\frac{d\omega_3}{dz}+\frac{d\omega_4}{dt},$$

worin ω_α beliebige Funktionen von x, y, z, t und p sind. Daß dies aber auch die hinreichende Bedingung für das identische Verschwinden der LAGRANGE'schen Gleichung ist, geht unmittelbar aus dem oben bezüglich der Funktionen ω_α bemerkten hervor.

Man kann aber diese Bedingung auch unmittelbar an die durch (2) gegebene Form von H knüpfen, wenn man h durch die Gleichung beschränkt

$$(7)\quad \frac{\partial h}{\partial p}=\frac{\partial h_1}{\partial x}+\frac{\partial h_2}{\partial y}+\frac{\partial h_3}{\partial z}+\frac{\partial h_4}{\partial t};$$

ist nämlich H von der Form (6), und setzt man

$$h_\alpha=\frac{\partial\omega_\alpha}{\partial p},$$

so wird sich wegen

$$\frac{d\omega_1}{dx} = \frac{\partial\omega_1}{\partial x} + \frac{\partial\omega_1}{\partial p} p_1, \ldots\ldots\ldots$$

für H die Form (2) ergeben, wenn

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial x} + \frac{\partial\omega_2}{\partial y} + \frac{\partial\omega_3}{\partial z} + \frac{\partial\omega_4}{\partial t} = h$$

gesetzt wird, und es würde umgekehrt, wenn H die Form (2) hat, und

$$\omega_\alpha = \int h_\alpha \, dp$$

gesetzt wird, für H der Ausdruck

$$H = \frac{d\omega_1}{dx} + \frac{d\omega_2}{dy} + \frac{d\omega_3}{dz} + \frac{d\omega_4}{dt} - \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x} + \frac{\partial\omega_2}{\partial y} + \frac{\partial\omega_3}{\partial z} + \frac{\partial\omega_4}{\partial t}\right) + h$$

folgen, worin, wenn h mit h_1, h_2, h_3, h_4 durch die Gleichung (6) verknüpft ist,

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(h - \frac{\partial\omega_1}{\partial x} - \frac{\partial\omega_2}{\partial y} - \frac{\partial\omega_3}{\partial z} - \frac{\partial\omega_4}{\partial t}\right) = \frac{\partial h}{\partial p} - \frac{\partial h_1}{\partial x} - \frac{\partial h_2}{\partial y} - \frac{\partial h_3}{\partial z} - \frac{\partial h_4}{\partial t} = 0,$$

also

$$h - \frac{\partial\omega_1}{\partial x} - \frac{\partial\omega_2}{\partial y} - \frac{\partial\omega_3}{\partial z} - \frac{\partial\omega_4}{\partial t}$$

von p unabhängig ist.

Sehen wir nunmehr von dem identischen Verschwinden der LAGRANGE'schen Differentialgleichung ab, so soll, bevor wir die ersten Integrale derselben untersuchen, welche in Analogie zur Mechanik wägbarer Massen als Prinzipien der so erweiterten Mechanik angesehen werden können, zunächst die Frage erörtert werden, welche partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit einer abhängigen und vier unabhängigen Variabeln sich auf die Form der erweiterten LAGRANGE'schen Differentialgleichung bringen lassen, oder für welche partiellen Differentialgleichungen

$$(8) \quad f(x, y, z, t, p, p_\alpha, p_{\alpha\alpha}, p_{\alpha\beta}) = 0$$

ein kinetisches Potential erster Ordnung H existiert, so daß

$$(9) \quad f = \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{d}{dx}\frac{\partial H}{\partial p_1} - \frac{d}{dy}\frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{d}{dz}\frac{\partial H}{\partial p_3} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_4}$$

$$= H_0 - \frac{dH_1}{dx} - \frac{dH_2}{dy} - \frac{dH_3}{dz} - \frac{dH_4}{dt}$$

ist, wenn H eine von x, y, z, t, der abhängigen Variabeln p und deren partiellen Differentialquotienten erster Ordnung abhängige Funktion bedeutet.

Zur Aufstellung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz eines kinetischen Potentials erster Ordnung werde zunächst bemerkt, daß f in den zweiten partiellen Differentialquotienten linear sein muß. Ferner folgen aus (9) leicht die Bedingungen

$$2\frac{\partial f}{\partial p_1} - 2\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p_{11}} - \frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial p_{12}} - \frac{d}{dz}\frac{\partial f}{\partial p_{13}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial p_{14}} = 0$$

und die analogen, oder, wenn

$$(10)\qquad f = \sum_\alpha F_{\alpha\alpha}\, p_{\alpha\alpha} + 2\sum_{\alpha,\beta} F_{\alpha\beta}\, p_{\alpha\beta} + F$$

gesetzt wird, worin $F_{\alpha\alpha}$, $F_{\alpha\beta}$ und F Funktionen von x, y, z, t und p sowie den ersten partiellen Differentialquotienten von p sind, durch Gleichsetzen der Koeffizienten von $p_{\alpha\alpha}$ und $p_{\alpha\beta}$ die notwendigen Bedingungen

$$(11)\qquad \frac{\partial F_{\alpha\alpha}}{\partial p_\beta} = \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial p_\alpha}\quad (\alpha \neq \beta)$$

$$(12)\qquad \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial p_\gamma} = \frac{\partial F_{\alpha\gamma}}{\partial p_\beta} = \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial p_\alpha}\quad (\alpha \neq \beta \neq \gamma)$$

und

$$(13)\qquad \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} = \frac{\partial F_{\alpha 1}}{\partial x} + \frac{\partial F_{\alpha 1}}{\partial p}\, p_1 + \frac{\partial F_{\alpha 2}}{\partial y} + \frac{\partial F_{\alpha 2}}{\partial p}\, p_2$$
$$+ \frac{\partial F_{\alpha 3}}{\partial z} + \frac{\partial F_{\alpha 3}}{\partial p}\, p_3 + \frac{\partial F_{\alpha 4}}{\partial t} + \frac{\partial F_{\alpha 4}}{\partial p}\, p_4,$$

worin die Integrabilitätsbedingungen der Gleichungen (13) für F durch die Gleichungen (11) und (12) erfüllt sind.

Umgekehrt ist aber auch unmittelbar ersichtlich, daß die Bedingungen (11), (12), (13) auch die hinreichenden dafür sind, daß sich mittels (10) eine Funktion f ergibt, welche ein kinetisches Potential besitzt, oder daß eine Funktion H von x, y, z, t und p sowie den ersten partiellen Differentialquotienten von p existiert, für welche die Gleichung (9) identisch erfüllt wird.

So würde sich die partielle Differentialgleichung

$$\sum_\alpha f_{\alpha\alpha}(x, y, z, t, p, p_\alpha)\, p_{\alpha\alpha} + \sum_{\alpha_1 \beta} f_{\alpha\beta}(x, y, z, t, p)\, p_{\alpha\beta}$$

$$+ F(x, y, z, t, p, p_1, p_2, p_3, p_4) = 0,$$

in welcher $f_{\alpha\alpha}$, $f_{\alpha\beta}$ willkürliche Funktionen der eingeschlossenen Argumente bedeuten, und F nach den Gleichungen (13) durch diese Funktionen bis auf eine willkürliche Funktion von x, y, z, t, p bestimmt ist, in die Form der LAGRANGE'schen Differentialgleichung (1) bringen lassen, also z. B. die partielle Differentialgleichung

$$f_1(p_1)\, p_{11} + f_2(p_2)\, p_{22} + f_3(p_3)\, p_{33} + f_4(p_4)\, p_{44} + f(p) = 0$$

für das kinetische Potential

$$H = -\int^{(2)} f_1(p_1)\, dp_1 - \int^{(2)} f_2(p_2)\, dp_2 - \int^{(2)} f_3(p_3)\, dp_3 - \int^{(2)} f_4(p_4)\, dp_4 + \int f(p)\, dp.$$

Aber es gehören zu jeder Funktion f, welche den angegebenen Bedingungen unterliegt, unendlich viele kinetische Potentiale; denn bestimmt man eine Funktion

$$K = \frac{d\omega_1}{dx} + \frac{d\omega_2}{dy} + \frac{d\omega_3}{dz} + \frac{d\omega_4}{dt} + \omega,$$

worin ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 beliebige Funktionen von x, y, z, t, p, p_1, p_2, p_3, p_4, und ω eine willkürliche Funktion von x, y, z, t ist, so wird, wie oben gezeigt worden, K der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial K}{\partial p} - \frac{d}{dx}\frac{\partial K}{\partial p_1} - \frac{d}{dy}\frac{\partial K}{\partial p_2} - \frac{d}{dz}\frac{\partial K}{\partial p_3} - \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial p_4} = 0$$

identisch genügen, und daher, wenn

$$H - K = H_1$$

gesetzt wird, auch

$$f = \frac{\partial H_1}{\partial p} - \frac{d}{dx}\frac{\partial H_1}{\partial p_1} - \frac{d}{dy}\frac{\partial H_1}{\partial p_2} - \frac{d}{dz}\frac{\partial H_1}{\partial p_3} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H_1}{\partial p_4}$$

sein, somit f außer H auch das kinetische Potential H_1 besitzen.

Indem ich nun zur Untersuchung der ersten Integrale der LAGRANGE'schen Differentialgleichung übergehe, mag zunächst bemerkt werden, daß im Falle wägbarer Massen für ein von einem Parameter p und dessen nach einer unabhängigen Variabeln t genommenen Ableitung abhängiges kinetisches Potential H die LAGRANGE'sche Differentialgleichung durch

$$\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'} = 0$$

dargestellt, und die Gleichung

$$H - p\frac{\partial H}{\partial p'} = h,$$

worin h eine willkürliche Konstante bedeutet, als das Prinzip von der Erhaltung der lebendigen Kraft oder das Energieprinzip bezeichnet wird; das letztere ist das allgemeine Integral erster Ordnung der LAGRANGE'schen Gleichung, oder alle Funktionen p von t, welche letzterer genügen, befriedigen das Energieprinzip und umgekehrt.

Wir wollen nun die Frage aufwerfen, welches die Beziehung zwischen den Integralen der LAGRANGE'schen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung (1) und der als Energieprinzip zu definierenden partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(14)\quad H - p_1\frac{\partial H}{\partial p_1} - p_2\frac{\partial H}{\partial p_2} - p_3\frac{\partial H}{\partial p_3} - p_4\frac{\partial H}{\partial p_4} = \varphi(x, y, z, t)$$

besteht, wenn H ein von den unabhängigen Variabeln freies kinetisches Potential erster Ordnung eines Parameters p, und φ eine noch näher zu bestimmende Funktion der vier unabhängigen Variabeln ist.

Substituiert man in $H(p, p_1, p_2, p_3, p_4)$, welches eine beliebige endliche und stetige Funktion der Argumente sein soll,

$$(15)\quad p = q,\ p_1 = \alpha q',\ p_2 = \beta q',\ p_3 = \gamma q',\ p_4 = q',$$

worin q als eine von einer unabhängigen Variabeln u abhängige Funktion gedacht wird, und α, β, γ beliebige Konstanten bedeuten, und setzt man

$$(16)\quad H(q, \alpha q', \beta q', \gamma q', q') = (H),$$

so werden der obigen Bemerkung zufolge die LAGRANGE'sche Gleichung

$$(17)\quad \frac{\partial (H)}{\partial q} - \frac{d}{du}\frac{\partial (H)}{\partial q'} = 0$$

und das Energieprinzip

$$(18)\quad (H) - q\,\frac{\partial (H)}{\partial q'} = h,$$

worin h eine willkürliche Konstante ist, in der Beziehung zueinander stehen, daß alle Integrale der einen Gleichung auch zugleich Integrale der andern sind. Sei nun ein Integral der Differentialgleichung (17)

$$q = f(u, \alpha, \beta, \gamma)$$

und setzt man

$$(19)\quad u = \alpha x + \beta y + \gamma z + t,$$

so ist leicht zu sehen, daß

$$(20)\quad p = f(\alpha x + \beta y + \gamma z + t, \alpha, \beta, \gamma)$$

ein Integral der Gleichung (1) ist, oder daß, wenn in diese Gleichung der Wert von p aus (20) und somit

$$p_1 = \alpha f',\ p_2 = \beta f',\ p_3 = \gamma f',\ p_4 = f',\ p_{11} = \alpha^2 f'',\ p_{12} = \alpha\beta f'', \ldots$$

gesetzt wird, dieselbe identisch befriedigt wird. Es folgt nämlich aus den Beziehungen

$$\frac{\partial (H)}{\partial q} = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)$$

$$\frac{\partial (H)}{\partial q'} = \alpha\left(\frac{\partial H}{\partial p_1}\right) + \beta\left(\frac{\partial H}{\partial p_2}\right) + \gamma\left(\frac{\partial H}{\partial p_3}\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial p_4}\right)$$

$$\frac{\partial^2 (H)}{\partial q'^2} = \alpha^2\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_1^2}\right) + \beta^2\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_2^2}\right) + \ldots + 2\alpha\beta\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_1\,\partial p_2}\right) + \ldots$$

$$\frac{\partial^2 (H)}{\partial q\,\partial q'} = \alpha\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p\,\partial p_1}\right) + \beta\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p\,\partial p_2}\right) + \gamma\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p\,\partial p_3}\right) + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p\,\partial p_4}\right),$$

in denen die Klammern die Werte der eingeschlossenen Ausdrücke für die oben angegebene Substitution bedeuten, und der Gleichung

$$\frac{d}{du}\,\frac{\partial (H)}{\partial q'} = \frac{\partial^2 (H)}{\partial q\,\partial q'}\,q' + \frac{\partial^2 (H)}{\partial q'^2}\,q'',$$

daß die Gleichung (17) in

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) - q'\left[\alpha\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p\,\partial p_1}\right) + \beta\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p\,\partial p_2}\right) + \ldots\right]$$

$$-q''\left[\alpha^2\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_1^2}\right)+\beta^2\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_2^2}\right)+\ldots+2\alpha\beta\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_1\,\partial p_2}\right)+\ldots\right]=0$$

oder

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)-(p_1)\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p\,\partial p_1}\right)-(p_2)\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p\,\partial p_2}\right)-\ldots.$$

$$-(p_{11})\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_1^2}\right)-(p_{22})\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_2^2}\right)-\ldots-2(p_{12})\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_1\,\partial p_2}\right)-\ldots=0$$

übergeht, welche in die Form gesetzt werden kann

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}-\frac{d}{dx}\frac{\partial H}{\partial p_1}-\frac{d}{dy}\frac{\partial H}{\partial p_2}-\frac{d}{dz}\frac{\partial H}{\partial p_3}-\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_4}\right)=0,$$

und somit aussagt, daß die LAGRANGE'sche Gleichung (1) durch den Wert (20) von p befriedigt wird. Ebenso werden die Integrale der Differentialgleichung (18) Integrale des Energieprinzips (14) sein, wenn φ (x, y, z, t) eine Konstante und für u der Wert aus (19) substituiert wird.

Aus der Äquivalenz der Gleichungen (17) und (18) folgt somit, daß die LAGRANGE'sche Differentialgleichung (1) und das Energieprinzip (14) für ein konstantes φ unendlich viele gemeinsame Integrale besitzen.

Da aber (H) die unabhängige Variable u selbst nicht enthält, so wird das allgemeine Integral der totalen Differentialgleichung (18) die Form haben

$$q = f(u + c, \alpha, \beta, \gamma, h),$$

worin c eine willkürliche Konstante bedeutet, und zugleich das allgemeine Integral von (17) sein. Wir finden somit, daß für jedes kinetische Potential erster Ordnung diese unendlich vielen Integrale der LAGRANGE'schen Differentialgleichung (1), welche ein Energieprinzip in Gestalt der partiellen Differentialgleichung (14) für ein konstantes φ besitzen, sich in die Form setzen lassen

$$p = f(\alpha x + \beta y + \gamma z + t + c, \alpha, \beta, \gamma, h),$$

worin α, β, γ, c willkürliche Konstanten bedeuten.

So wird für das kinetische Potential

$$H = p^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2$$

die LAGRANGE'sche Gleichung in

$$p - p_{11} - p_{22} - p_{33} - p_{44} = 0,$$

das Energieprinzip in

$$p^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - p_4^2 = h$$

übergehen, während

$$(H) = q^2 + (1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, q'^2$$

wird, und für dieses Potential die Energiegleichung

$$q^2 - (1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, q'^2 = h$$

das allgemeine Integral

$$q = \frac{1}{2} e^{\frac{u+c}{\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}} + \frac{h}{2} e^{-\frac{u+c}{\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}}$$

besitzt. Setzt man nun

$$p = \frac{1}{2} e^{\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z + t + c}{\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}} + \frac{h}{2} e^{-\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z + t + c}{\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}},$$

so überzeugt man sich leicht, daß alle in dieser Form enthaltenen Integrale auch den beiden partiellen Differentialgleichungen, der von LAGRANGE und der Energiegleichung, genügen. Da dieses Integral mit den vier willkürlichen Konstanten α, β, γ, c das vollständige Integral des Energieprinzips darstellt, so kann man aus diesem das allgemeine Integral mit einer willkürlichen Funktion von drei Variabelnverbindungen herleiten, indem man

$$c = \omega(\alpha, \beta, \gamma)$$

setzt, worin ω eine willkürliche Funktion bedeutet und, wenn man den für p gefundenen Ausdruck mit F bezeichnet, die Größen α, β, γ als Funktionen der Variabeln aus den Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial c}\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \beta} + \frac{\partial F}{\partial c}\frac{\partial \omega}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \gamma} + \frac{\partial F}{\partial c}\frac{\partial \omega}{\partial \gamma} = 0$$

bestimmt.

Daß aber die in dem vollständigen Integrale der für ein konstantes φ genommenen Energiegleichung nicht enthaltenen Integrale im allgemeinen ohne beschränkende Bedingungen für das kinetische Potential H der LAGRANGE'schen Gleichung nicht genügen werden, oder daß im allgemeinen nicht noch andere Integrale der LAGRANGE'schen Differentialgleichung dem Energieprinzip unterliegen, mag der Kürze halber an einem einfachen Beispiel mit zwei unabhängigen Variabeln, x und t, gezeigt werden. Für das kinetische Potential

$$H = p^2 + p_1^2 + p_2^2$$

wird das vollständige Integral des zugehörigen Energieprinzips durch

$$p = \frac{1}{2} e^{\frac{\alpha x + t + c}{\sqrt{1 + \alpha^2}}} + \frac{h}{2} e^{-\frac{\alpha x + t + c}{\sqrt{1 + \alpha^2}}}$$

dargestellt sein, und es werden zugleich alle diese Integrale der zugehörigen LAGRANGE'schen Differentialgleichung Genüge leisten. Aus dem vollständigen Integrale wird sich, wenn $c = \omega(\alpha)$ gesetzt wird, das allgemeine Integral durch Elimination von α aus der obigen Gleichung für p und

$$x - \alpha t - \alpha \omega(\alpha) + (1 + \alpha^2)\, \omega'(\alpha) = 0$$

ergeben. Setzt man z. B. $\omega(\alpha) = \alpha$, so liefert diese Elimination das Integral

$$p = \frac{1}{2} e^{\sqrt{(x+1)^2 + t^2}} + \frac{h}{2} e^{-\sqrt{(x+1)^2 + t^2}},$$

welches nicht in dem vollständigen enthalten ist; man verifiziert nun unmittelbar, daß es ein Integral der Energiegleichung ist, sieht aber ebenso leicht, daß es die LAGRANGE'sche Differentialgleichung nicht befriedigt.

Es bleibt somit nur noch die Frage nach den Bedingungen zu beantworten, denen das kinetische Potential erster Ordnung H genügen muß, wenn sämtliche Integrale des Energieprinzips (14) für eine noch näher zu bestimmende Form der Funktion φ der LAGRANGE'schen Differentialgleichung genügen sollen, und daher, wenn φ eine willkürliche Funktion gewisser Variabelnverbindungen sein kann, auch sämtliche Integrale der LAGRANGE'schen Gleichung dem Energieprinzip unterliegen werden.

Um von dem Energieprinzip (14) zur LAGRANGE'schen Gleichung (1) überzugehen, leite man zunächst durch Differentiation der Energiegleichung nach x, y, z, t mit Benutzung der oben definierten Bezeichnungen H_α, $H_{\alpha\beta}$ die nachfolgenden für alle Integrale des Energieprinzips gültigen Beziehungen her

$$\begin{aligned}H_0 p_\alpha - p_1 (H_{10} p_\alpha + H_{11} p_{1\alpha} + H_{12} p_{2\alpha} + H_{13} p_{3\alpha} + H_{14} p_{4\alpha})\\ - p_2 (H_{20} p_\alpha + H_{21} p_{1\alpha} + H_{22} p_{2\alpha} + H_{23} p_{3\alpha} + H_{24} p_{4\alpha})\\ - p_3 (H_{30} p_\alpha + H_{31} p_{1\alpha} + H_{32} p_{2\alpha} + H_{33} p_{3\alpha} + H_{34} p_{4\alpha})\\ - p_4 (H_{40} p_\alpha + H_{41} p_{1\alpha} + H_{42} p_{2\alpha} + H_{43} p_{3\alpha} + H_{44} p_{4\alpha}) = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_\alpha},\end{aligned} \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

worin ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 durch x, y, z, t zu ersetzen sind.

Addiert man diese mit den Multiplikatoren

$$\sqrt{H_{11}},\ \sqrt{H_{22}},\ \sqrt{H_{33}},\ \sqrt{H_{44}}$$

versehenen Gleichungen und vergleicht die so erhaltene Beziehung mit der durch

$$(21)\quad p_1 \sqrt{H_{11}} + p_2 \sqrt{H_{22}} + p_3 \sqrt{H_{33}} + p_4 \sqrt{H_{44}}$$

multiplizierten LAGRANGE'schen Gleichung (1), so erhält man durch Identifizierung unter der Voraussetzung, daß der Ausdruck (21) weder identisch noch durch die Integrale der Energiegleichung (14*) verschwindet, die Bedingungsgleichungen

$$(22)\quad H_{\alpha\beta}^2 = H_{\alpha\alpha} \cdot H_{\beta\beta}$$

und

$$(23)\quad \sqrt{H_{11}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sqrt{H_{22}} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \sqrt{H_{33}} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \sqrt{H_{44}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0;$$

die letztere Bedingung kann, da φ nur von x, y, z, t, H dagegen nur von p, p_1, p_2 und nicht von den unabhängigen Variabeln abhängen sollte, einerseits erfüllt werden, wenn φ eine Konstante ist, andererseits muß, wenn dies nicht der Fall sein soll, und derselben für jedes der Bedingung (22) unterworfene kinetische Potential genügt werden soll,

$$(24)\quad H_{\alpha\alpha} = H_{\beta\beta} = H_{\alpha\beta}$$

sein, in welchem Falle dann die Funktion φ die Form annimmt

$$(25)\quad \varphi = \omega(x - t,\ y - t,\ z - t),$$

worin ω eine willkürliche Funktion bedeutet, während die Gleichungen (24) für das kinetische Potential die Form

$$\begin{aligned}(26)\quad H = \Omega(p, p_1 + p_2 + p_3 + p_4) + \psi_1(p)\, p_1 + \psi_2(p)\, p_2\\ + \psi_3(p)\, p_3 + \psi_4(p)\, p_4 + \psi(p)\end{aligned}$$

liefern, worin die Funktionen Ω, ψ_α, ψ keiner weiteren Bedingung unterworfen sind.

Wir finden somit als notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß sämtliche Integrale der Differentialgleichung der Energie (14) auch Integrale der Lagrange'schen Gleichung (1) sind, die, daß

I. wenn die rechte Seite des Energieprinzips eine Konstante ist, das kinetische Potential erster Ordnung den Gleichungen (22) genügt, und der Ausdruck

$$\sum p_\alpha \sqrt{H_{\alpha\alpha}}$$

weder identisch noch durch die Integrale des Energieprinzips verschwindet,

II. wenn die rechte Seite des Energieprinzips variabel sein soll, diese die Form (25) besitzt, das kinetische Potential durch einen Ausdruck von der Gestalt (26) bestimmt und die Bedingung erfüllt ist, daß der Ausdruck

$$\sum p_\alpha$$

nicht durch die Integrale des Energieprinzips verschwindet; in diesem Falle werden auch umgekehrt sämtliche Integrale der Lagrange'schen Gleichung dem Energieprinzip genügen.

Nimmt man zu I. gehörig der Mechanik wägbarer Massen analog für H eine homogene Funktion zweiten Grades der Größen p_1, p_2, p_3, p_4 von der Form

$$H = \sum f_{\alpha\alpha}(p)\, p_\alpha^2 + 2 \sum f_{\alpha\beta}(p)\, p_\alpha\, p_\beta + f(p),$$

so gehen die Bedingungsgleichungen (22) in

$$f_{\alpha\beta}^2(p) = f_{\alpha\alpha}(p)\, f_{\beta\beta}(p)$$

über, so daß das kinetische Potential die Form annimmt

$$H = \left(\sum p_\alpha \sqrt{f_{\alpha\alpha}(p)}\right)^2 + f(p),$$

und daher das Energieprinzip lautet

$$-\left(\sum p_\alpha \sqrt{f_{\alpha\alpha}(p)}\right)^2 + f(p) = h;$$

die Integrale dieses werden also sämtlich der Lagrange'schen Gleichung

$$\sum p_\alpha \sqrt{f_{\alpha\alpha}(p)} \sum p_\alpha \frac{f_{\alpha\alpha}'(p)}{\sqrt{f_{\alpha\alpha}(p)}} + f'(p) - 2\frac{d}{dx}\left(\sqrt{f_{11}(p)} \sum p_\alpha \sqrt{f_{\alpha\alpha}(p)}\right)$$

$$-2\frac{d}{dy}\left(\sqrt{f_{22}(p)} \sum p_\alpha \sqrt{f_{\alpha\alpha}(p)}\right) - 2\frac{d}{dz}\left(\sqrt{f_{33}(p)} \sum p_\alpha \sqrt{f_{\alpha\alpha}(p)}\right)$$

$$-2\frac{d}{dt}\left(\sqrt{f_{44}(p)} \sum p_\alpha \sqrt{f_{\alpha\alpha}(p)}\right) = 0$$

Genüge leisten, da der Ausdruck

$$\sum p_\alpha \sqrt{f_{\alpha\alpha}(p)}$$

durch die Integrale des Energieprinzips nicht verschwindet.

Um für den Fall II. noch direkt zu verifizieren, daß auch umgekehrt sämtliche Integrale der LAGRANGE'schen Gleichung (1) ein Energieprinzip mit einer willkürlichen Funktion von der Form (25) besitzen, setze man in (26)

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = P,$$

so daß die Gleichung der Energie in

$$P\frac{\partial \Omega(p, P)}{\partial P} - \Omega(p, P) - \psi(p) = \omega(x - t, y - t, z - t),$$

die LAGRANGE'sche Gleichung in

$$\frac{\partial\Omega(p,P)}{\partial p} + \psi'(p) - \frac{\partial^2\Omega(p,P)}{\partial p\,\partial P} - \frac{\partial^2\Omega(p,P)}{\partial P^2}\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dP}{dy} + \frac{dP}{dz} + \frac{dP}{dt}\right) = 0$$

übergehen.

Man sieht zunächst wieder unmittelbar, daß aus dem Energieprinzip durch Differentiation nach x, y, z, t, durch Addition der so entstehenden Gleichungen und Division mit P, welches für die Integrale der Energiegleichung nicht verschwinden kann, sich die LAGRANGE'sche Gleichung ergibt.

Umgekehrt folgt aber auch aus

$$d\Omega = \frac{\partial\Omega}{\partial p}dp + \frac{\partial\Omega}{\partial P}dP$$

vermöge der LAGRANGE'schen Gleichung

$$d\Omega = dp\left[\frac{\partial^2\Omega}{\partial p\,\partial P}P + \frac{\partial^2\Omega}{\partial P^2}\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dP}{dy} + \frac{dP}{dz} + \frac{dP}{dt}\right) - \psi'(p)\right] + \frac{\partial\Omega}{\partial P}dP$$

$$= dp\left[\frac{\partial^2\Omega}{\partial P^2}\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dP}{dy} + \frac{dP}{dz} + \frac{dP}{dt}\right) - \psi'(p)\right] + d\left(P\frac{\partial\Omega}{\partial P}\right) - P\frac{\partial^2\Omega}{\partial P^2}dP$$

oder

$$d\left\{\Omega - P\frac{\partial\Omega}{\partial P} + \psi(p)\right\} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial P^2}\left[\left(\frac{dP}{dx}+\frac{dP}{dy}+\frac{dP}{dz}+\frac{dP}{dt}\right)dp - PdP\right],$$

und da die rechte Seite dieser Gleichung für die Integrale der LAGRANGE'schen Differentialgleichung ein vollständiges Differential von der Form $d\omega(x-t, y-t, z-t)$ ist, durch Integration das Energieprinzip.

Sei z. B. wieder für zwei unabhängige Variable x und t

$$\Omega(p, P) = p + P^2, \; \psi(p) = 0,$$

so wird das allgemeine Integral des Energieprinzips

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial t} = \sqrt{p + \omega(x-t)}$$

durch

$$p = \frac{1}{4}\left(x + \omega_1(x-t)\right)^2 - \omega(x-t)$$

dargestellt sein, wenn ω_1 wiederum eine willkürliche Funktion bedeutet. Ferner geht die LAGRANGE'sche Gleichung in

$$\frac{\partial(p_1+p_2)}{\partial x} + \frac{\partial(p_1+p_2)}{\partial t} = \frac{1}{2}$$

über, woraus

$$p_1 + p_2 = \psi(x-t) + \frac{x}{2}$$

und hieraus

$$p = \frac{x^2}{4} + x\,\psi(x-t) + \psi_1(x-t)$$

folgt; es fallen daher die Integrale der LAGRANGE'schen Gleichung mit denen des Energieprinzips zusammen, wenn

$$\psi = \frac{1}{2}\omega_1, \quad \psi_1 = \frac{1}{4}\omega_1^2 - \omega$$

gesetzt wird.

Um nunmehr weitere Sätze zu erhalten, welche den anderen Prinzipien der Mechanik wägbarer Massen analog sind, werden mindestens zwei, von den vier unabhängigen Variabeln x, y, z, t abhängige Parameter p_1 und p_2 einzuführen sein.

C. F. Wintersche Buchdruckerei.