

**Badische Landesbibliothek Karlsruhe**

**Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe**

**Die elektrischen Gleichstromleitungen mit Rücksicht auf  
ihre Elastizität**

**Teichmüller, Joachim**

**Stuttgart, 1898**

I. Theorie der offenen Leitungen

[urn:nbn:de:bsz:31-289940](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-289940)

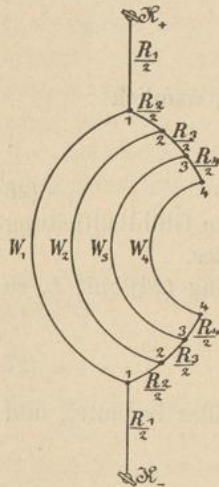
## Die elastischen Gleichstromleitungen.

### I. Theorie der offenen Leitungen.

#### Grundlagen.

47. Unter elastischen Leitungen sollen nach § 26 Leitungen verstanden werden, die so bemessen sind, dass das Funktionieren keines, auch nicht des empfindlichsten der an sie angeschlossenen Stromempfänger merklich beeinträchtigt wird, wie auch die Zahl der Stromempfänger (innerhalb der überhaupt möglichen Grenzen) geändert werden mag. Nach § 44 kann für Anlagen, bei denen Elastizität von den Leitungen verlangt wird, nur die Parallelschaltung der Stromempfänger in Betracht kommen.

Fig. 29.



Diese Schaltung setzt im allgemeinen, nämlich immer, wenn die Leitungswiderstände mit in Rücksicht gezogen werden, die gemischte Schaltung von Widerständen voraus.

48. Die Stromverteilung bei der gemischten Schaltung der Widerstände, allgemein behandelt. Ein komplizierterer Fall der gemischten Schaltung der Widerstände ist der in Fig. 29 abgebildete: Von den beiden Hauptklemmen aus führt je ein Widerstand  $\frac{1}{2} R_1$  zu den Punkten 1, von denen aus sich zwei Widerstände verzweigen, nämlich auf der einen Seite der einfache Wider-

stand  $W_1$ , der beide Punkte 1 miteinander verbindet, auf der andern die Widerstände  $\frac{1}{2} R_2$ , die zu den Punkten 2 führen. Von diesen Punkten aus findet eine ganz gleiche Verzweigung statt, wie vorhin bei den Punkten 1; auf der rechten Seite kommt man also zu den Punkten 3, und so setzt sich die Verzweigung beliebig weit fort: Jeder Punkt ist durch einen Widerstand  $\frac{1}{2} R$  mit dem vorhergehenden Verzweigungspunkte verbunden und bildet selbst den Ausgangspunkt einer neuen parallelen Verzweigung.

Um die Stromverteilung in diesem Falle zu ermitteln, ist derselbe Weg einzuschlagen, der schon früher mit Vorteil benutzt

worden ist: Es ist für jede Parallelschaltung der äquivalente Widerstand aufzusuchen, dieser zum vorgeschalteten Widerstande  $R$  zu addieren und so fortzufahren, bis der der Gesamtschaltung äquivalente Widerstand gefunden ist, der als Divisor des Dividenden  $E$ , nämlich der Klemmenspannung zwischen  $K_+$  und  $K_-$ , den Gesamtstrom ergibt. Ist dieser bekannt, so können leicht die einzelnen Ströme bestimmt werden.

Wir beginnen mit der Verzweigung zwischen den Punkten 3. Die äquivalente Leitungsfähigkeit ist

$$= \frac{1}{W_3} + \frac{1}{R_4 + W_4}.$$

der äquivalente Widerstand also der reciproke Wert hiervon, nämlich

$$= \frac{1}{\frac{1}{W_3} + \frac{1}{R_4 + W_4}},$$

Ist dieser Widerstand an Stelle der Parallelschaltung von  $W_3$  mit  $R_4 + W_4$  gesetzt, so kann man nach genau demselben Verfahren die Parallelschaltung zwischen den Punkten 2 durch einen äquivalenten Widerstand ersetzen. Es ist zunächst die äquivalente Leitungsfähigkeit zwischen diesen Punkten

$$= \frac{1}{W_2} + \frac{1}{R_3 + \frac{1}{\frac{1}{W_3} + \frac{1}{R_4 + W_4}}}$$

also der äquivalente Widerstand der reciproke Wert hiervon, und es ergibt sich schliesslich als der der Gesamtschaltung äquivalente Widerstand der Kettenbruch

$$R_g = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{W_1} + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{\frac{1}{W_2} + \frac{1}{R_3 + \frac{1}{\frac{1}{W_3} + \frac{1}{R_4 + W_4}}}}}} \dots \dots \dots (1a)$$

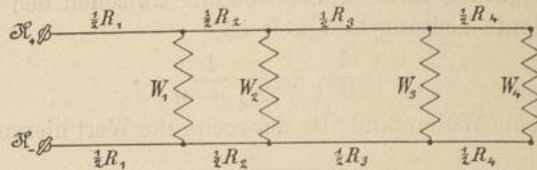
Der in  $R_1$  fliessende Gesamtstrom ist also

$$J_{R_1} = \frac{E}{R_g}; \dots \dots \dots (1b)$$

dieser teilt sich in den Punkten 1 proportional der Leitungsfähigkeit  $\frac{1}{W_1}$  und der oben ermittelten äquivalenten Leitungsfähigkeit der rechtsliegenden Verzweigung. So wird man fortschreitend die einzelnen Ströme in allen Widerständen ermitteln können.

**49. Die räumliche Effektverteilung bei Parallelschaltung der Stromempfänger. Der einfache Leitungsstrang.** Der behandelte Fall hat nun eine grosse praktische Bedeutung, denn sobald man — wie es durch die Bezeichnungen der einzelnen Widerstände von vornherein angedeutet war — die  $R$  zu Leitungs-, die  $W$  zu Nutz-  
widerständen werden lässt, so erhält man den in Fig. 30 dar-

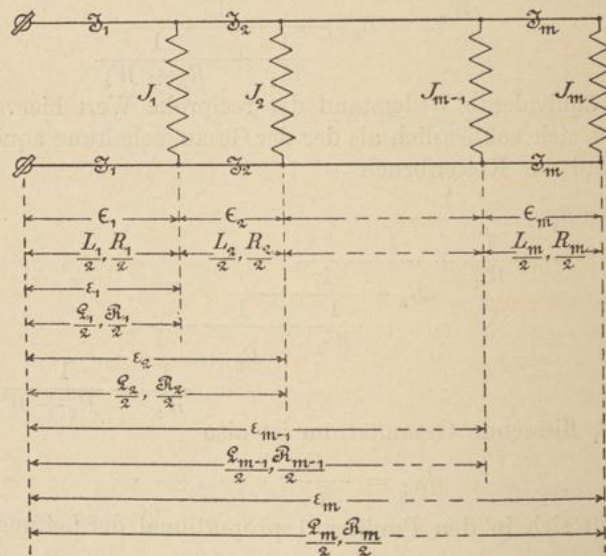
Fig. 30.



gestellten einfachen Leitungsstrang mit parallel geschalteten Stromempfängern, die aber räumlich auf eine gewisse Strecke verteilt sind, während in dem in § 36 zuerst behandelten Falle alle Stromempfänger von denselben Punkten abgezweigt waren.

Für die späteren Betrachtungen sollen folgende Bezeichnungen eingeführt werden: Der in einem Stromempfänger fließende, von

Fig. 31.



der Leitung abgezweigte oder Abzweigstrom (Belastungsstrom) werde mit  $J$  bezeichnet, der in einem Leitungsstück fließende Strom — ein Leitungsstrom — dagegen mit  $J$ . Ferner soll unterschieden

werden, ob der Widerstand und die Längen der Leitungen zwischen je zwei Anschlussstellen von Stromempfängern oder von den Hauptklemmen  $K_+$  und  $K_-$  aus bis zu einer Anschlussstelle gemessen sind; im ersteren Falle soll das Zeichen  $R$ , im zweiten das Zeichen  $\mathfrak{R}$  angewendet werden. In analoger Weise sollen die Spannungsverluste  $\epsilon$  und  $\varepsilon$  unterschieden werden;  $\epsilon$  gilt für die Verluste von Abzweigstelle zu Abzweigstelle,  $\varepsilon$  für die von den Hauptklemmen aus gemessenen Verluste. Ausserdem soll bis auf weiteres durchweg angenommen werden, dass je zwei zusammengehörige Widerstände  $R$  oder  $\mathfrak{R}$  einander nach Grösse und Querschnitt gleich seien, d. h. also, dass auf den positiven und den negativen Teil der Leitung in allen Fällen ein gleicher Widerstand von gleichem Querschnitt falle. Die Bezeichnungen sind in Fig. 31 zusammengestellt. Es ergeben sich hieraus die Beziehungen

$$\begin{array}{l}
 \mathfrak{J}_1 = \sum_1^m J_\nu \\
 \mathfrak{J}_2 = \sum_2^m J_\nu \\
 \dots \dots \dots \\
 \mathfrak{J}_m = J_m
 \end{array}
 \quad \left| \quad \begin{array}{l}
 \mathfrak{R}_1 = R_1 \\
 \mathfrak{R}_2 = \sum_2^m R_\nu \\
 \dots \dots \dots \\
 \mathfrak{R}_m = \sum_1^m R_\nu
 \end{array} \right. \dots \dots (2)$$

ebenso

$$\begin{array}{l}
 \mathfrak{L}_1 = L_1 \\
 \mathfrak{L}_2 = \sum_2^m L_\nu \\
 \dots \dots \dots \\
 \mathfrak{L}_m = \sum_1^m L_\nu
 \end{array}
 \quad \left| \quad \begin{array}{l}
 \varepsilon_1 = \epsilon_1 \\
 \varepsilon_2 = \sum_2^m \epsilon_\nu \\
 \dots \dots \dots \\
 \varepsilon_m = \sum_1^m \epsilon_\nu
 \end{array} \right. \dots \dots (2)$$

**50. Die Spannungsverteilung bei räumlich verteilten parallel geschalteten Stromempfängern.** Die Spannungsverteilung ist nach Feststellung der Stromverteilung sehr einfach zu ermitteln: Von der Gesamtklemmenspannung hat man das Produkt  $\mathfrak{J}_1 R_1$  abzuziehen und man erhält die Nutzs Spannung  $E_1$  am Nutzwiderstande  $W_1$ ; diese vermindert um  $\mathfrak{J}_2 R_2$  liefert  $E_2$  u. s. f. Es herrscht also an den Klemmen aller Stromempfänger offenbar eine andere Nutzs Spannung; die Nutzs Spannung nimmt ab, je weiter man sich von den Hauptklemmen entfernt, und ist an den Klemmen des äussersten Stromempfängers am geringsten. Nennt man wie früher die Differenz zwischen der Nutzs Spannung und der Gesamtspannung (entsprechend dem Widerstande  $\mathfrak{R}$ ) oder zwischen zwei Nutzs Spannungen (entsprechend dem Widerstande  $R$ ) den Spannungsverlust,

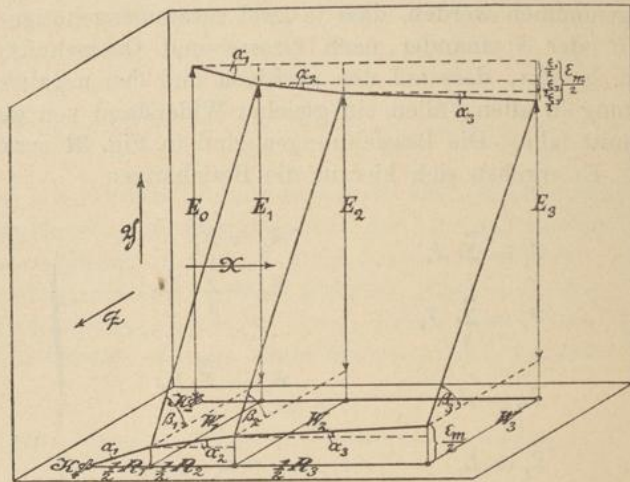
so ergeben sich die in Fig. 31 eingeschriebenen Beziehungen zwischen  $\epsilon$  und  $\epsilon_m$ , von denen die letzte, nämlich

$$\epsilon_m = \Sigma \epsilon = \Sigma \mathfrak{B} R \dots \dots \dots (3)$$

besonders hervorgehoben werden soll.

Zu einer anschaulichen Darstellung der Spannungsverteilung gelangt man durch die folgende räumliche Figur (Fig. 32): Die

Fig. 32.



Nutzwiderstände  $W$  seien in der Richtung der  $Z$ -Achse, die Leitungswiderstände  $R$  in der Richtung der  $X$ -Achse aufgetragen, so dass das ganze Bild der Leitungs- und Nutzwiderstände, im Widerstandsmassstabe gezeichnet, in der (horizontalen)  $X$ - $Z$ -Ebene liegt. Die Spannungsdifferenzen, die von der Hauptklemme  $K_+$  an gemessen sind, sind in der Richtung der  $Y$ -Achse aufgetragen. Sie steigen in  $K_+$  von Null aus, zunächst den Spannungsverlusten entsprechend, unter den Neigungen  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  bis zum Betrage  $\frac{\epsilon_m}{2}$  an, erheben sich über dem Nutzwiderstände  $W_3$  unter der Neigung  $\beta_3$  bis zum Werte  $E_3 + \frac{\epsilon_m}{2}$  und steigen schliesslich über der Linie des negativen Leitungswiderstandes bis zum Maximalwerte  $E_0$ , der über der Klemme  $K_-$  erreicht ist. Die Kurven der Spannungsdifferenzen über den Widerständen  $W_1$  und  $W_2$  ergeben sich dann von selbst. Die Nutzwiderstände  $W$  sind zunächst einander gleich angenommen. Die perspektivische Verkürzung in der Figur ist als sehr stark anzusehen, so dass die Strecken  $W$  sehr gross

und die Winkel  $\alpha$  jedenfalls grösser werden als die Winkel  $\beta$  mit demselben Index. Denn es ist

$$\operatorname{tg} \alpha_{\nu} = \frac{\frac{\epsilon_{\nu}}{2}}{\frac{R}{2}} = \mathfrak{J}_{\nu}$$

und

$$\operatorname{tg} \beta_{\nu} = \frac{E_{\nu}}{W_{\nu}} = J_{\nu};$$

und da im allgemeinen

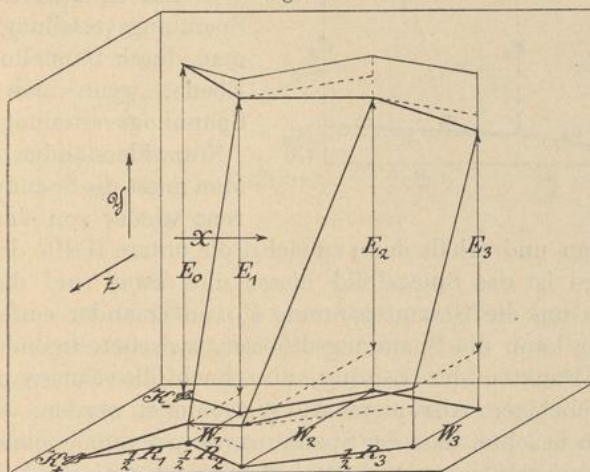
$$\mathfrak{J}_{\nu} > J_{\nu},$$

so muss

$$\alpha_{\nu} > \beta_{\nu}$$

sein. Nur für  $\nu = m$  tritt Gleichheit der Ströme und Winkel ein.

Fig. 33.



Ausserdem muss sein

$$\alpha_{\nu} > \alpha_{\nu+1}$$

da die Leitungsströme mit wachsendem  $\nu$  abnehmen müssen, und zwar ist

$$\operatorname{tg} \alpha_{\nu} = \sum_{\nu+1}^m \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta_{\nu}.$$

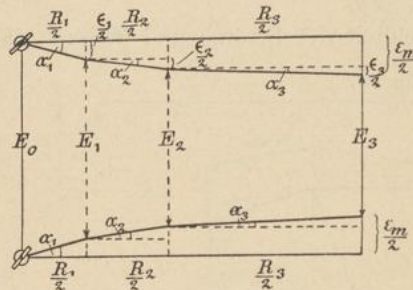
Unter der gemachten Voraussetzung gleicher Widerstände  $W$  ist ferner

$$\beta_{\nu} > \beta_{\nu+1},$$

eine Folgerung, die auch in der Figur deutlich zum Ausdruck kommt. Die Summierung der Spannungsverluste ist in der Figur rechts oben angedeutet.

Für ungleiche Widerstände ändert sich das Bild in das der Fig. 33. Man thut hierbei gut, darauf zu verzichten, dass die Leitungswiderstände in den Abscissen gemessen werden sollen, sondern trägt besser, wie es in der Figur geschehen ist, die Widerstände in ihren wahren Längen  $R$  in die  $X$ - $Z$ -Ebene ein. Andernfalls würde erst die Projektion dieser Längen auf die  $X$ -Achse die Widerstände darstellen, wodurch die Darstellung an Anschaulichkeit verlieren würde. Die oben gegebenen Beziehungen zwischen den Winkeln bleiben auch hier gültig bis auf die letzte. Die Winkel  $\beta$  sind jetzt nicht nur von der Grösse der zugehörigen Ordinaten,

Fig. 34.



sondern wesentlich auch von der Länge der die Widerstände  $W$  darstellenden Strecken abhängig.

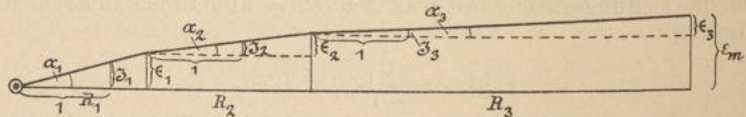
Ein einfacheres Bild der Spannungsverteilung erhält man durch Darstellung in der Ebene, wenn man von der Spannungsverteilung in den Nutzwiderständen absieht.

Man misst die Spannungsdifferenz wieder von einer Haupt-

klemme an und erhält dann zunächst die untere Hälfte der Fig. 34. Die obere ist das Spiegelbild dieser und zwar sind die Hauptklemmen um die Gesamtspannung  $E_0$  von einander entfernt. Aus der Figur kann die Spannungsdifferenz zwischen irgend zwei beliebigen Punkten der Leitung, also auch die Nutzspannung an jedem beliebigen Abzweigpunkte entnommen werden.

Man beachte, dass der Spannungsverlust immer einen Verlust an Spannungsdifferenz bedeutet, dem in der einen Leitung ein Zuwachs an absoluter Spannung entsprechen kann.

Fig. 35.

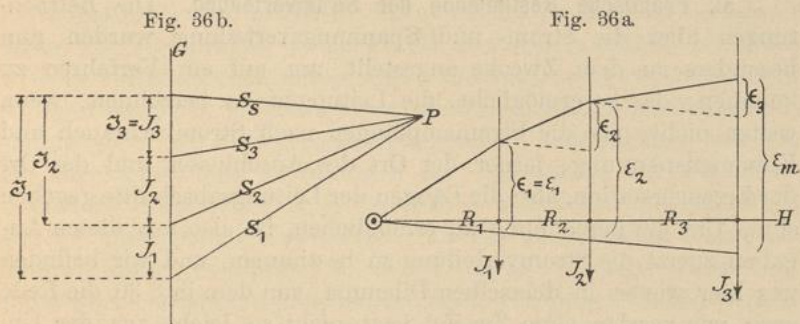


Noch einfacher endlich wird die Darstellung in der Kurve des Spannungsverlustes allein, die von den Nutzspannungen direkt gar nichts aussagt, aus der dieselben aber entnommen werden können, wenn die Gesamtspannung bekannt ist. Mit dieser Kurve lässt sich — wenn sie auch die Verhältnisse weniger vollkommen



und anschaulich wiedergibt — am bequemsten operieren, und sie wird deshalb auch am meisten angewendet. Die Kurve ist in Fig. 35 in demselben Massstabe wie Fig. 34 dargestellt; es sind jedesmal die zusammengehörigen Widerstandshälften addiert, die Winkel aber sind natürlich dieselben geblieben, so dass die Ordinaten den ganzen Spannungsverlust in der Hin- und Rückleitung zusammengenommen ergeben.

Die Addition der beiden Hälften der Leitungswiderstände soll von jetzt ab immer ausgeführt werden, wenn es nicht unbedingt anders nötig ist. Eine Leitung ist also künftig immer durch eine Gerade dargestellt, auch wenn sie aus zwei Teilen, Hin- und Rückleitung, besteht. Die Stromrichtungen, von denen die Rede ist, sind als die des Stromes in der positiven Leitung zu verstehen.



Die in den Abständen  $R = 1$  von den Abzweigpunkten an errichteten Ordinaten, begrenzt durch die Kurve des Spannungsverlustes, geben ein Mass für die Grösse der Leitungsströme an. Dies führt zu einer bequemen graphischen Konstruktion der Kurve des Spannungsverlustes, wenn die Abzweigströme gegeben sind:

Man trage die Leitungswiderstände auf einer horizontalen Geraden  $H$  ab (vergl. Fig. 36a) und errichte in denjenigen Punkten dieser Geraden, die den Abzweigpunkten der Ströme  $J$  entsprechen, Senkrechte. In einer besonderen Figur (36b) trage man auf einer senkrechten Geraden  $G$  in einem bestimmten Massstabe die Ströme  $J$  der Reihe nach ab und ziehe von den Endpunkten dieser Ströme Strahlen  $S$  zu einem Pole  $P$ , der sich im Abstände  $R = 1$  von  $G$  befindet. Parallel zu diesen Strahlen ziehe man, in der Hauptfigur (36a), im Zuführungspunkte  $\odot$  beginnend, eine gebrochene Linie, deren einzelne Abschnitte durch die früher gezogenen Senkrechten begrenzt werden; zu dem letzten Strahle  $S_n$  ist wieder eine Gerade parallel durch den Zuführungspunkt zu ziehen. Die senkrecht zu  $H$  gemessenen Abstände dieser Geraden von der gebrochenen Linie geben ein Mass

für den Spannungsverlust an dem betreffenden Punkte der Leitung. Der Beweis hierfür ergibt sich leicht aus der Aehnlichkeit je zweier Dreiecke in der Hauptfigur (36a) mit Dreiecken der Hilfsfigur (36b), aus denen Beziehungen von der Form

$$\epsilon : R = \mathfrak{J} : 1$$

folgen.

Zeichnet man die Figur so, dass  $S_s$  senkrecht auf  $G$  steht, so erhält man die Kurve des Spannungsverlustes unmittelbar in der in Fig. 35 gezeichneten Gestalt.

Auch in dieser Konstruktion, welche grosse Aehnlichkeit hat mit der Konstruktion der Seilpolygone in der graphischen Statik, zeigt sich die Verwandtschaft der Strommomente mit den statischen Momenten.

**51. Praktische Bestimmung der Stromverteilung.** Die Betrachtungen über die Strom- und Spannungsverteilung wurden nun besonders zu dem Zwecke angestellt, um auf ein Verfahren zu kommen, das es ermöglicht, die Leitungen zu berechnen, wenn weiter nichts als die Stromempfänger nach Stromverbrauch und Klemmenspannung, ferner der Ort des Anschlusses und der Ort der Erzeugerstation, also die Längen der Leitungsabschnitte gegeben sind. Um die Berechnung zu ermöglichen, ist also aus diesen Angaben zuerst die Stromverteilung zu bestimmen, und wir befinden uns hier wieder in demselben Dilemma, von dem in § 30 die Rede war; wir werden ohne Zweifel jetzt nicht so leicht aus der Unsicherheit herauskommen, wie in dem Falle der einfachen Effektübertragung.

In diesem Falle (vergl. § 43) war die den Leiter durchfliessende Stromstärke als Summe aller Nutzströme eine gegebene Grösse, wir kamen deshalb zu einer Gleichung, in der als einzige Unbekannte der Widerstand der Leitung  $R$  stehen blieb. Wollten wir aber für den Fall der räumlichen Effektverteilung nach einer ähnlichen Gleichung suchen, so müssten wir auf die Gleichung (1b) in § 48 zurückgehen, deren rechte Seite den in Gleichung (1a) angegebenen Kettenbruch  $R_g$  enthält. In diesem Kettenbruche stehen aber so viel Unbekannte als der Leitungswiderstand  $R$  Teile  $R_1, R_2$  u. s. f. enthält. Es ist also unmöglich die Stromverteilung exakt zu bestimmen, bevor etwas über die Leitungswiderstände ausgesagt ist. Würde man dies etwa in der Weise thun, dass man über die Verhältnisse dieser Widerstände Abmachungen trafe, vielleicht durch die Festsetzung, dass die Widerstände proportional der Länge der Leitungsabschnitte sein sollen, also

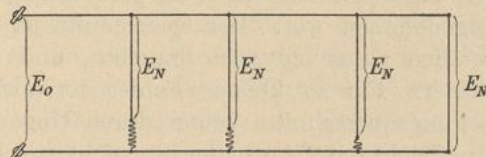
$$R_1 : R_2 : R_3 \cdots = L_1 : L_2 : L_3 : \cdots$$

so würde immer noch mit dem umständlichen Kettenbruche zu rechnen sein, was auf jeden Fall vermieden werden muss. Wir müssen also nach einem anderen Auswege suchen.

Die Thatsache, dass die Spannungsdifferenzen an den Klemmen der Stromempfänger im jetzt vorliegenden Falle zweifellos verschieden sein müssen, könnte zu dem Verfahren verleiten, die zu benutzenden Stromempfänger der Grösse ihrer normalen Nutzspannung ( $E_1, E_2, E_3$  u. s. f.) nach zu ordnen und diese Reihenfolge für die Verwendung bei der Installation vorzuschreiben. Durch die Differenzen  $E_0 - E_1, E_1 - E_2, E_2 - E_3$  u. s. f. sind die Spannungsverluste gegeben und damit alles bekannt, was zur Berechnung der Leitung erforderlich ist, denn nach diesen Festsetzungen werden zweifellos die normalen Ströme in den Stromempfängern fliessen, und die Leitungsströme sind gegeben. Ein solches kompliziertes Verfahren lassen die Verhältnisse in der Praxis aber schon deshalb nicht zu, weil es nicht durchzuführen wäre, die Installationen weitläufiger Anlagen so genau zu überwachen, dass thatsächlich die Nutzwiderstände stets an den projektierten Stellen eingeschaltet würden. Es liegt ausserdem im Interesse der Fabrikation der Stromverbraucher — wie schon oben bemerkt — möglichst alle, jedenfalls alle für eine Anlage verwendeten, für ein und dieselbe Nutzspannung zu bauen; es soll also  $E_1 = E_2 = E_3 = \dots$  sein. Dieser Umstand würde, wenn das angedeutete Verfahren eingeschlagen werden sollte, unendlich grosse Querschnitte für die zwischen der ersten und letzten Stromabzweigung liegenden Leitungen verlangen, und nur die Leitung von den Hauptklemmen bis zur ersten Abzweigung würde zu berechnen sein, die Aufgabe wäre auf den Fall der einfachen Effektübertragung zurückgeführt.

Praktisch ausführbar würde folgendes Verfahren sein: Man nimmt Stromverbraucher von einer für alle gleichen, bestimmten Nutzspannung  $E_N$ , deren Stromverbrauch bekannt ist, an und legt diesen Stromverbrauch und die daraus zu entnehmenden Leitungsströme der Berechnung zu Grunde. Wird dann die Gesamtspannung so gewählt, dass die Klemmenspannung an der letzten Abzweigstelle gleich der Nutzspannung der Stromempfänger ist, so wird an allen anderen Stromempfängern zunächst eine höhere Klemmenspannung herrschen, die aber durch Vorschaltungen von

Fig. 37.

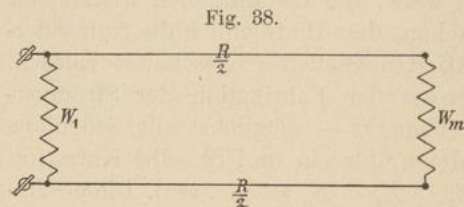


geeigneter Grösse (vergl. Fig. 37) vor jeden einzelnen Stromempfänger auf das normale Mass herabgedrückt werden soll. Auch auf diese Weise und unter diesen Voraussetzungen würde die Stromverteilung vor Bekanntsein der Widerstände angegeben werden können.

Bei Leitungen für elastische Glühlichtanlagen würden die Vorschaltwiderstände sehr klein sein, denn da der Spannungsverlust 2% der Nutzspannung nicht überschreiten darf, so würde die grösste Vorschaltung unmittelbar an den Hauptklemmen nur diese 2% zu vernichten haben, ihr Widerstand wäre also =  $0,02 W$  zu wählen, wenn  $W$  der Widerstand des dort angeschlossenen Stromempfängers ist. Es fragt sich unter diesen Umständen, ob der Fehler nicht vielleicht vernachlässigbar klein wäre, den man machen würde, wenn man die Vorschaltungen ganz weglassen, die Stromverteilung dagegen so bestimmen würde, als ob sie vorhanden wären. Diese Frage

ist durch folgende einfache Ueberlegung zu entscheiden:

Vergleicht man ohne Rücksicht auf die dazwischen liegenden Abzweigungen nur die den Haupt-



klemmen am nächsten gelegene mit der entferntesten (vergl. Fig. 38), so wird unter den angegebenen Bedingungen den Widerstand  $W_1$  ein um 2% grösserer Strom durchfliessen als unter Einschluss der Vorschaltung fließen würde. Durch den entsprechend berechneten Leitungswiderstand  $R$  dagegen würde an den Klemmen von  $W_m$  die normale Nutzspannung  $E_N$  hergestellt, dieser also vom normalen Strome durchflossen werden. Lässt man jetzt die Gesamtspannung um 2% sinken, so wird der Strom in  $W_1$  normal, der in  $W_2$  um 2% zu klein, also um 2% kleiner als er bei Berechnung des Leitungsquerschnittes angenommen war. Der Querschnitt ist also um 2% stärker ausgefallen als er zu sein brauchte, und hierin besteht der ganze Fehler. Ein so kleiner Fehler ist aber in der Praxis, wo die Leitungsquerschnitte schon durch Ungenauigkeit bei der Herstellung leicht um 2% von der beabsichtigten Grösse abweichen können, wo aber ausserdem nur die Auswahl unter gewissen, den Fabrikationsnummern einer Firma entsprechenden Querschnitten möglich ist, unbedingt zulässig. Es folgt aus diesen Ueberlegungen die Regel:

Zur Bestimmung der Stromverteilung in elastischen Leitungen sind die normalen Verbrauchsströme ohne

Rücksicht auf den in den Leitungen auftretenden Spannungsverlust anzunehmen.

Nach dieser Regel wird bei elastischen Leitungen künftig ausnahmslos verfahren werden. Es soll aber hier besonders darauf aufmerksam gemacht werden, dass die Regel ohne Vorbehalt nur für Anlagen von hoher Elastizität gilt.

Der Fall der Effektverteilung mit parallel geschalteten Stromempfängern ist hierdurch dem Falle der einfachen Effektübertragung ähnlich geworden, denn die Vernachlässigung, die gemacht worden ist, stimmt überein mit der Vernachlässigung des Leitungswiderstandes zwischen den Anschlusspunkten. Alle Schlüsse, welche früher bei der Vergleichung der Hintereinanderschaltung mit der Parallelschaltung gezogen wurden, gelten auch für den allgemeineren Fall der räumlichen Effektverteilung. Für die Leitungsberechnung selbst aber sind noch besondere Regeln aufzustellen.

Anmerkung. Man beachte, dass die für die Anlage verlangte Elastizität es ist, die den maximal zulässigen Spannungsverlust bestimmt, d. h. also die Rücksicht auf die zeitliche Verschiedenheit des in dem Stromempfänger umgesetzten Effektes oder der an seinen Klemmen herrschenden Nutzspannung, oder für Glühlampen die zeitliche Verschiedenheit der Leuchtkraft einer Lampe. Die räumliche Verschiedenheit des Effektes oder der Leuchtkraft der in einer Anlage installierten Lampen kommt dem gegenüber fast gar nicht in Frage.

**52. Die Superposition der Ströme.** Nach den gemachten Festsetzungen sind die Abzweigströme nicht mehr unbekannte Grössen, sondern sie sind als die zum normalen Funktionieren der betreffenden Stromempfänger nötigen Ströme als gegebene Werte anzusehen, und man kann nunmehr unter Beiseitelassung der Abzweigwiderstände mit diesen Strömen operieren, noch bevor etwas über die Leitungswiderstände gesagt ist. Hierdurch gewinnen die in § 49 angegebenen Beziehungen unter den Strömen besondere Bedeutung, denn durch sie ist die ganze Stromverteilung, also auch die zur Berechnung der Leitungen nötigen Werte der Leitungsströme bestimmt. Die Beziehungen lauteten:

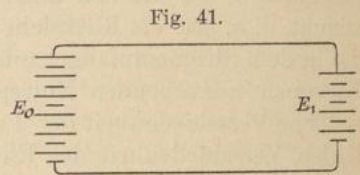
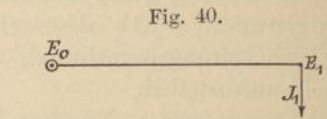
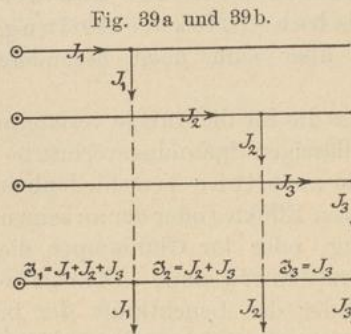
$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_1 &= \sum_1^m J_\nu \\ \mathfrak{I}_2 &= \sum_2^m J_\nu \\ &\dots \dots \dots \\ \mathfrak{I}_m &= J_m \end{aligned}$$

und können in dem folgenden wichtigen Satze ausgesprochen werden:

Die Leitungsströme ergeben sich aus den Abzweigströmen durch einfache Superposition.

D. h.: Der Strom in einem bestimmten Leitungsstück ist gleich der (algebraischen) Summe der Ströme, die in diesem Leitungsstücke fließen würden, wenn die Ströme zeitlich nacheinander abzweigt würden. In Fig. 39a sind die zu superponierenden Abzweigströme, in Fig. 39b die daraus zusammengesetzten Leitungsströme eingezeichnet.

Dieser Satz gilt natürlich auch für beliebige Teile der Abzweigströme; statt den Strom  $J_v$  auf einmal abzweigen, kann man



ihn in beliebig vielen Teilen nacheinander abnehmen. Die Teile können auch negativ oder grösser als der Strom  $J_v$  sein. Es kommt nur darauf an, dass die algebraische Summe aller Stromteile schliesslich  $= J_v$  ist. Nach dieser Anschauung unterscheiden sich also Stromzuführungen (negative Abzweigungen) prinzipiell nicht mehr von den Stromabführungen (positiven Abzweigungen), und auch der den Hauptklemmen zuzuführende Strom kann als eine negative Abzweigung aufgefasst werden.

**53. Die Superposition der Klemmenspannungen.** Eine Ausscheidung der Nutzwiderstände, wie sie im vorigen Paragraphen vorgenommen ist, hat zum erstenmal schon in § 22 stattgefunden. Setzt man in einem Leitungsstrange für einfache Effektübertragung, vergl. Fig. 40, für den Spannungsverlust

$$\epsilon_1 = E_0 - E_1,$$

so erhält man an Stelle der in § 22 angegebenen Gleichung (6) die Gleichung

$$J_1 = \frac{E_0}{R} - \frac{E_1}{R}, \dots \dots \dots (4)$$

die der Ausdruck des zweiten Kirchhoffschen Satzes ist, wenn man sich den Stromkreis nur aus den Leitungswiderständen gebildet und in ihm die beiden Klemmenspannungen als elektromotorische Kräfte wirken denkt, wie es in Fig. 41 dargestellt ist.

Die Betrachtung lässt sich leicht auf einen allgemeineren Leitungsstrang ausdehnen. In Fig. 42 ist für das zweite Leitungsstück

$$J_2 = \frac{E_1}{R_2} - \frac{E_2}{R_2}$$

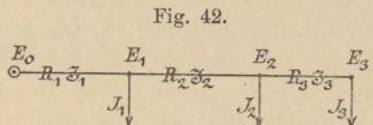


Fig. 42.

und für das dritte

$$J_3 = \frac{E_2}{R_3} - \frac{E_3}{R_3}$$

Hieraus folgt

$$J_2 = J_2 - J_3 = \frac{E_1}{R_2} + \frac{E_3}{R_3} - E_2 \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \dots \dots \dots (5)$$

und analoge Ausdrücke für alle andern Abzweigströme. Diese Gleichung lässt sich in dem Satze aussprechen:

Der Abzweigstrom an einem bestimmten Abzweigpunkte ergibt sich als die algebraische Summe der Ströme, die fließen würden, wenn der Reihe nach alle Klemmenspannungen als *EMK*'te einzeln, unter gleichzeitigem Kurzschluss an allen andern Abzweigpunkten (und Zuführungspunkten) wirken würden.

Die Klemmenspannungen superponieren sich also als *EMK*'te. Dass man nicht nur von den Klemmenspannungen an dem Abzweigpunkte selbst und an den benachbarten Punkten zu sprechen braucht, ist offenbar, denn alle weiter ab wirkenden *EMK*'te sind kurzgeschlossen, bevor sie eine Wirkung auf die dem betrachteten Abzweigpunkte benachbarten Leitungsstücke ausüben können.

Addiert man zu Gleichung (5) die identische Gleichung

$$0 = \frac{E_0}{R_2} - \frac{E_0}{R_2} + \frac{E_0}{R_3} - \frac{E_0}{R_3}$$

hinzu, so erhält man unter Berücksichtigung der Definitionsgleichungen für die Spannungsverluste  $\epsilon$

$$-J_2 = + \frac{\epsilon_1}{R_2} + \frac{\epsilon_3}{R_3} - \epsilon_2 \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \dots \dots \dots (6)$$

und damit den Satz:

Denkt man sich in gleicher Weise wie oben die Klemmenspannungen jetzt die Spannungsverluste als *EMK*'te wirken, so erhält man die negativen Abzweigströme.

**54. Die Superposition der Spannungsverluste.** Der maximale Spannungsverlust  $\epsilon_m$  setzte sich nach der Formel

$$\epsilon_m = \sum \mathfrak{J} R \dots \dots \dots (7)$$

zusammen. Löst man die Leitungsströme in ihre superponierten Abzweigströme auf, so erhält man

$$\begin{aligned} \epsilon_m &= (J_1 + J_2 + J_3 + \dots + J_m) R_1 \\ &+ (J_2 + J_3 + \dots + J_m) R_2 \\ &+ (J_3 + \dots + J_m) R_3 \\ &+ \dots \dots \dots \\ &+ J_m R_m \end{aligned}$$

oder durch entsprechende Zusammenfassung

$$\begin{aligned} \epsilon_m &= J_1 R_1 \\ &+ J_2 (R_1 + R_2) \\ &+ J_3 (R_1 + R_2 + R_3) \\ &+ \dots \dots \dots \\ &+ J_n (R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_m), \end{aligned}$$

das ist aber nach der früher eingeführten Bezeichnung

$$\epsilon_m = \sum J \mathfrak{R} \dots \dots \dots (8)$$

in Worten:

Der Spannungsverlust bis zum Endpunkte oder bis zu einem beliebigen Punkte der Leitung setzt sich aus den Spannungsverlusten, die den einzelnen zu superponierenden Abzweigströmen in diesem Punkte entsprechen würden, durch einfache Superposition zusammen.

Die Art und Weise, wie man sich hiernach die Bildung der Spannungsverluste zu denken hat, wird am besten graphisch durch die Kurven der Fig. 43a und 43b illustriert, in denen die Bezeichnung  $(\epsilon_\nu) = J_\nu \mathfrak{R}_\nu$  angewendet ist. Auf dem Leitungsstück hinter den Abzweigpunkten bleibt der Spannungsverlust natürlich gleich dem bis zu diesem Punkte entstandenen Verluste, wie es in den Figuren 43a angegeben ist. In Fig. 43b ist die Superposition ausgeführt. Aus dieser letzten Figur ist am deutlichsten zu erkennen, dass die Kurve des Spannungsverlustes eine gebrochene Linie ist, die so beschaffen sein muss, dass die Neigung der einzelnen geraden Stücke gegen die Gerade des Widerstandes abnimmt, je mehr man sich von den Hauptklemmen entfernt, dass die Neigung aber niemals negativ und nur von dem Punkte an gleich Null wird, in dem die Leitung stromlos wird.

**55. Der Spannungsverlust als Drehmoment.** In der zuletzt entwickelten Form des Spannungsverlustes

$$\epsilon_m = \sum J \mathfrak{R}$$



tritt wieder sein Charakter als eines statischen Momentes deutlich zu Tage. Alle Kräfte  $J$  greifen an Hebelarmen an, deren Drehpunkt der Anfangspunkt der Leitung ist. Der maximale Span-

Fig. 43 a.

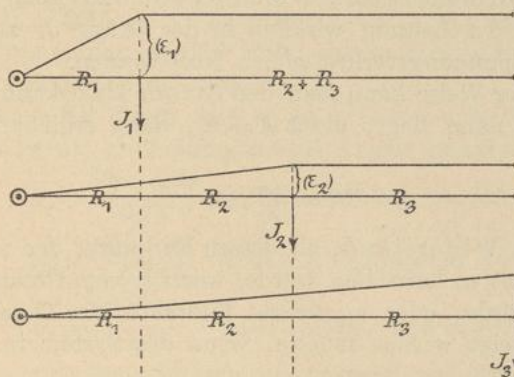
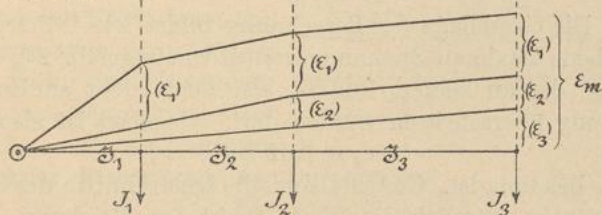


Fig. 43 b.



nungsverlust erscheint als das Drehmoment, das das ganze System im Gleichgewicht hält. Bezeichnet man in Analogie mit früherem die Produkte  $J\mathfrak{R}$  als Strommomente, so ergibt sich der Satz:

Der maximale Spannungsverlust ist das Moment, das der Summe der Strommomente das Gleichgewicht hält.

**56. Ideelle Stromstärke und ideeller Widerstand.** Fasst man in dieser Weise den maximalen Spannungsverlust als Strommoment auf, so kann man sich von den beiden Faktoren Strom und Widerstand, aus denen er seiner Dimension gemäss zusammengesetzt sein muss, den einen noch beliebig wählen, da über dieselben einzeln noch nichts ausgesagt ist. Wählt man den Hebelarm gleich  $\Sigma R = \mathfrak{R}_m$ , so ergibt sich als die Kraft, die an diesem Hebelarme angreifen müsste, um das System im Gleichgewicht zu halten, der Strom

$$J_i = \frac{\epsilon_m}{\mathfrak{B}_m} \dots \dots \dots (9)$$

Dieser ideelle Strom ist negativ abgezweigt zu denken, da der Spannungsverlust als Drehmoment im entgegengesetzten Sinne der Strommomente zu drehen sucht. Würde der Strom zu einem reellen, d. h. am Ende der Leitung wirklich in der Grösse  $J_i$  zugeführt, so würde der Spannungsverlust gleich Null werden.

In ähnlicher Weise kann man den Strom als bekannt wählen und zwar, was nahe liegt, als  $\Sigma J = \mathfrak{J}_1$ , dann ergibt sich der Widerstand

$$R_i = \frac{\epsilon_m}{\mathfrak{J}_1} \dots \dots \dots (10)$$

als der ideelle Widerstand, an dessen Endpunkt der maximale Spannungsverlust  $\epsilon_m$  herrschen würde, wenn er vom Gesamtstrome durchflossen würde, oder an dessen Endpunkt der Gesamtstrom negativ abgezweigt werden müsste, wenn das System im Gleichgewicht sein sollte.

#### Berechnung einfacher Leitungsstränge.

57. Die Grundlage der Berechnung bildet wie früher der vorgeschriebene maximale Spannungsverlust von ungefähr 2% der Nutzs-pannung, der an keinem Punkte, also auch nicht am Endpunkte der Leitung überschritten werden darf. Gegeben ist also

$$\epsilon_m = 0,02 E_N$$

wenn  $E_N$  bekannt ist. Gesucht sind die Querschnitte der einzelnen Leitungsstücke, nämlich die Werte  $Q_\nu$  in der Gleichung

$$\epsilon_m = \Sigma \epsilon_\nu = \sum_1^m \frac{\mathfrak{J}_\nu L_\nu}{Q_\nu} \varrho \dots \dots \dots (11)$$

Diese Gleichung enthält also noch  $m$  Unbekannte, und es bestehen  $m - 1$  Willkürlichkeiten, über die man noch beliebig verfügen kann. Man kann z. B. noch  $m - 1$  Querschnitte willkürlich wählen, wenn nur der in diesen Querschnitten auftretende Spannungsverlust kleiner als  $\epsilon_m$  bleibt, dann ist der  $m$ te Querschnitt durch die Gleichung eindeutig bestimmt, oder man kann andere Abmachungen treffen, die die Lösung der Aufgabe eindeutig machen. Je nach der Art nun, wie über die Willkürlichkeiten verfügt wird, ergeben sich verschiedene Methoden der Berechnung.

58. Erste Methode. Die Berechnung bei freier Wahl der einzelnen Spannungsverluste. Das einfachste, freilich auch roheste Verfahren ist, die Willkürlichkeit derart auszunützen, dass man die einzelnen Spannungsverluste  $\epsilon_\nu$  beliebig wählt und nur die Forderung  $\epsilon_m = \Sigma \epsilon_\nu$  beachtet. Ist z. B. die Aufgabe gestellt, die Querschnitte für

die in Fig. 44\*) skizzierte Leitungsströmung zu berechnen, so liegt es vielleicht nahe, die Spannungsverluste  $\epsilon_v$  in den drei Leitungsstücken einander gleich zu wählen. Die gegebenen Werte sind

$$\begin{array}{lll} L_1 = 100 \text{ m} & J_1 = 35 \text{ Amp, also } \mathfrak{J}_1 = 70 \text{ Amp.} \\ L_2 = 6 \text{ »} & J_2 = 10 \text{ »} & \mathfrak{J}_2 = 35 \text{ »} \\ L_3 = 250 \text{ »} & J_3 = 25 \text{ »} & \mathfrak{J}_3 = 25 \text{ »} \end{array}$$

Die Nutzsannung sei 110 Volt, der maximale Spannungsverlust darf also nach unserer Annahme

$$\epsilon_m = 2,2 \text{ V sein, und es ist } \epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 0,73 \text{ V.}$$

Dann ist, wenn als Leitungsmetall Kupfer gewählt wird,

$$Q_1 = \frac{70 \cdot 200}{0,73} \cdot 0,0175 = 336 \text{ mm}^2 \approx 336 \text{ mm}^2,$$

$$Q_2 = \frac{35 \cdot 12}{0,73} \cdot 0,0175 = 10,1 \text{ mm}^2 \approx 10 \text{ mm}^2,$$

$$Q_3 = \frac{25 \cdot 500}{0,73} \cdot 0,0175 = 299,5 \text{ mm}^2 \approx 300 \text{ mm}^2.$$

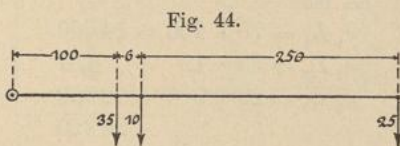
Die so berechneten Querschnitte müssen, wie in allen Fällen, auf Stromdichte geprüft werden. Die Stromdichte im ersten und letzten Querschnitte ist offenbar so

klein, dass die Erwärmung nur sehr gering sein wird; für  $Q_2$  dagegen ist eine besondere Prüfung erforderlich: Dem Strome  $\mathfrak{J}_2 = 35$  Amp gehört bei normaler Erwärmung der Durchmesser

$$D = \left( \frac{35}{4,5} \right)^{2/3} = 3,93 \text{ mm}$$

oder der Querschnitt  $12,1 \text{ mm}^2$  zu. Die zulässige Stromdichte wird also überschritten, die Berechnung hat zu unbrauchbaren Ergebnissen geführt.

Dass eine auf Spannungsverlust berechnete Leitung den Bedingungen der Erwärmung nicht genügt, ist bei keiner Berechnungsart von vornherein ausgeschlossen, was die angewendete Methode aber unzweckmässig macht, ist erstens der Umstand, dass auf einen schwächeren Querschnitt ein stärkerer folgen kann, dass also der schwächere einen grösseren Strom zu führen hat als der stärkere, und zweitens der Umstand, dass es infolgedessen nötig ist, jeden einzelnen Querschnitt auf Stromdichte zu prüfen. Diese Nachteile bewirken, dass die Methode der freien Wahl der Spannungsverluste nur sehr selten und in besonderen Fällen ange-



\*) Die Figur ist absichtlich nicht massstäblich gezeichnet.

wendet wird, und veranlassen uns nach Methoden zu suchen, bei denen die geschilderten Unzuträglichkeiten vermieden sind.

**59. Zweite Methode. Die Berechnung auf konstanten Querschnitt.** Stellt man die Bedingung, dass der Querschnitt überhaupt nicht verändert werden, sondern der ganzen Länge des Leitungsstranges nach derselbe sein soll, so sind offenbar alle Willkürlichkeiten vermieden, denn aus der Gleichung (11) wird dann

$$\epsilon_m = \frac{\varrho}{Q} \sum_1^m \mathfrak{J}_\nu L_\nu \dots \dots \dots (12)$$

und hierin ist  $Q$  die einzige unbekannte Grösse, die sich also als

$$Q = \frac{\sum \mathfrak{J} L}{\epsilon_m} \varrho \dots \dots \dots (13)$$

oder

$$Q = \frac{\sum J \varrho}{\epsilon_m} \varrho \dots \dots \dots (14)$$

berechnen lässt.

Für das oben gegebene Beispiel erhält man hiernach den Querschnitt folgendermassen:

Es ist

$$\begin{array}{r} \mathfrak{J}_1 L_1 = 70 \cdot 200 = 14000 \\ \mathfrak{J}_2 L_2 = 35 \cdot 12 = 420 \\ \mathfrak{J}_3 L_3 = 25 \cdot 500 = 12500 \\ \hline 26920 \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{r} J_1 \varrho_1 = 35 \cdot 200 = 7000 \\ J_2 \varrho_2 = 10 \cdot 212 = 2120 \\ J_3 \varrho_3 = 25 \cdot 712 = 17800 \\ \hline 26920 \end{array}$$

also ist

$$Q = \frac{26920}{2,2} \cdot 0,0175 = 214 \text{ mm}^2.$$

Die erstrebten Vorteile sind beide erreicht, denn es folgt nicht nur kein stärkerer Querschnitt einem schwächeren, sondern es ist auch nur eine einzige Nachrechnung auf Stromdichte, nämlich im ersten Leitungsstück, in dem der Strom am stärksten ist, erforderlich. In diesem Stücke ist

$$j = \frac{70}{214} < 0,33,$$

also jedenfalls wird die Erwärmung sehr gering sein.

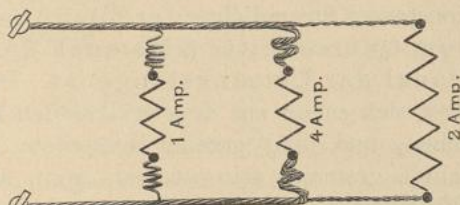
**60. Dritte Methode. Die Berechnung auf konstante Stromdichte.** Erklärung an einem Beispiele. In einer Entfernung von 250 m von der Maschine sollen 7 Amp nützlich verwendet werden. Soll der Spannungsverlust  $\epsilon_m = 2,2$  V betragen, so ist ein Kupferquerschnitt von rund  $28 \text{ mm}^2$  erforderlich. Diese Leitung von  $28 \text{ mm}^2$  Querschnitt soll in einer Leitung von 7 Drähten, deren also jeder einen Querschnitt von  $4 \text{ mm}^2$  haben muss, bestehen.

Die am Ende der Leitung abgezweigten 7 Amp sollen nun

nicht alle durch einen, sondern durch drei parallel geschaltete Nutzwiderstände fließen, von denen der eine 1 Amp, der andere 4 und der letzte 2 Amp Strom verbraucht. Es ist dann gleichgültig, ob die drei Stromempfänger gemeinsam an die Litze angeschlossen sind — deren Drähte dann am Ende durch Lötung mit einander verbunden sein könnten —, oder ob sie je nur an eine gewisse, den Abzweigströmen entsprechende Zahl von Drähten, der erste also an einen, der zweite an vier und der letzte an zwei Drähte angeschlossen sind. Denn da die Stromdichte in einem von Gleichstrom durchflossenen Leiter in allen Punkten seines Querschnittes dieselbe ist, so verteilt sich numerisch der gesamte Strom doch ohne weiteres so, als ob die einzelnen Drähte oder Gruppen von Drähten nur den Strom für gewisse Stromempfänger zu führen hätten. Es ist

deshalb sogar erlaubt, die dermassen mit den einzelnen Drähten der Litze verbundenen Nutzwiderstände räumlich von einander zu trennen, indem man die Litze, so weit man will, auflöst (vergl. Fig. 45). Man wird hierdurch durchaus

Fig. 45.



keine Aenderung des Stromflusses oder des Spannungsverlustes hervorrufen, vielmehr durch die vorgenommene Aenderung einen Leitungsstrang erhalten, von dem man zunächst weiss, dass der Spannungsverlust bis zu den Klemmen aller Nutzwiderstände derselbe (nämlich =  $r_m$ ) geblieben ist, der der Berechnung zu Grunde gelegt war. Ausserdem kann man aber von dem Leitungsstrange aussagen, dass die Stromdichte in allen Leitungsstücken dieselbe geblieben ist, denn die Zahl der für die abgezweigten Ströme von der gemeinsamen Litze losgelösten und gleichstarken Drähte ist proportional diesen Abzweigströmen, und deshalb sind auch die Gesamtquerschnitte der in der gemeinsamen Leitung vereint gebliebenen Drähte proportional den Leitungsströmen.

Die in der Fig. 45 gezeichneten, in Schlingen gelegten Leitungsstücke, die als Zuführung zu den Nutzwiderständen  $W_1$  und  $W_2$  dienen, entsprechen den in § 51 erwähnten Vorschaltungen. Nach den dort gemachten Auseinandersetzungen darf man aber diese Vorschaltungen weglassen ohne einen merklichen Fehler zu begehen,  $W_1$  und  $W_2$  also direkt an die Gesamtleitung anschliessen.

Auf das hiermit beschriebene Verfahren kann man eine Methode der Leitungsberechnung gründen, die nunmehr rechnerisch entwickelt werden soll.

Entwicklung der Berechnungsmethode. Soll die Stromdichte in allen Leitungsstücken dieselbe sein, so wird aus Gleichung (11) in § 57 durch Herausheben von

$$j = \frac{\mathfrak{J}_v}{Q_v}$$

die Gleichung

$$\varepsilon_m = \varrho \cdot j \Sigma L_v = \varrho j \Sigma_m \dots \dots \dots (15)$$

oder

$$\varepsilon = \varrho j l, \dots \dots \dots (16)$$

wenn  $\varepsilon$  eine mit der veränderlichen Länge  $l$  veränderliche Grösse bedeutet.

Diese Gleichung lehrt übrigens, dass unter der Voraussetzung konstanter Stromdichte der Spannungsverlust unabhängig vom Querschnitte (also auch der Stromstärke) proportional der Leitungslänge ist. Die Richtigkeit dieses Satzes lässt sich schon aus dem erklärenden Beispiele ohne weiteres einsehen, und man erkennt ausserdem, dass wir auf dasselbe Verfahren gestossen sein würden, wenn wir die in § 57 erwähnten Willkürlichkeiten in der Weise ausgeschlossen hätten, dass wir als Bedingung Proportionalität der Spannungsverluste mit den Leitungslängen festgesetzt hätten.

Ist in Gleichung (15) der Spannungsverlust  $\varepsilon_m$  und die Leitungslänge gegeben, so folgt für die Stromdichte

$$j = \frac{\varepsilon_m}{\varrho \Sigma_m}, \dots \dots \dots (17)$$

und mit Hilfe dieses Wertes lässt sich nun jeder Querschnitt aus

$$Q_v = \frac{\mathfrak{J}_v}{j} \dots \dots \dots (18)$$

berechnen. Man hat also den Rechenschieber nur einmal, nämlich auf den Wert  $1/j$  einzustellen und kann sofort alle Querschnitte des Leitungsstranges ablesen. Aus den letzten beiden Gleichungen ergibt sich

$$Q_v = \frac{\mathfrak{J}_v \Sigma_m}{\varepsilon_m} \varrho \dots \dots \dots (19)$$

das heisst: Bei der Berechnung auf konstante Stromdichte ist jeder einzelne Querschnitt so zu berechnen, als ob der ihn durchfliessende Strom am Ende des **ganzen** Leitungsstranges abgezweigt wäre, an dem der Spannungsverlust eintreten soll. Auch dieser Satz kann schon

durch einfache Ueberlegung aus dem zur Erklärung herangezogenen Beispiele gewonnen werden. Nebenbei bemerke man die interessante Thatsache, dass diese Berechnungsmethode Leitungen ergibt, bei denen die in jeder Volumeneinheit erzeugte Wärmemenge überall dieselbe ist. Die in einem Kubikcentimeter der Leitung vom Widerstande  $R$  in der Zeiteinheit erzeugte Wärme ist nämlich

$$\frac{\mathfrak{G}}{QL} = \frac{\mathfrak{J}^2 R}{QL} = \frac{\mathfrak{J}^2 L}{Q^2 L} \varrho = j \varrho,$$

also bei konstanter Stromdichte  $j$  unabhängig vom Querschnitt.

Statt  $Q_\nu$  nach der letzten Formel zu berechnen, kann man auch den Zuwachs  $Q'_\nu$  berechnen, den  $Q_{\nu+1}$  erfahren muss, um auf  $Q_\nu$  anzuwachsen, nämlich nach der Formel

$$Q'_\nu = \frac{J_\nu \varrho_m}{\varepsilon_m} \varrho \dots \dots \dots (20)$$

Das ergibt sich folgendermassen: Es ist

$$Q_\nu = \frac{\mathfrak{J}_\nu \varrho_m}{\varepsilon_m} \varrho \text{ und } Q_{\nu+1} = \frac{\mathfrak{J}_{\nu+1} \varrho_m}{\varepsilon_m} \varrho,$$

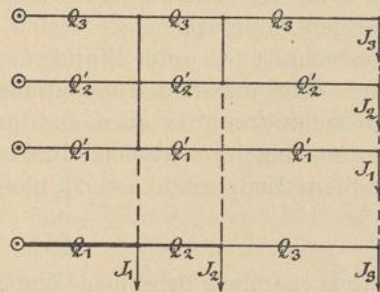
also

$$Q'_\nu = Q_\nu - Q_{\nu+1} = (\mathfrak{J}_\nu - \mathfrak{J}_{\nu+1}) \frac{\varrho_m}{\varepsilon_m} \varrho,$$

was mit der Beziehung  $\mathfrak{J}_\nu - \mathfrak{J}_{\nu+1} = J_\nu$  die Gleichung (20) ergibt.

Nach diesem Verfahren berechnet man also für jeden der  $m$  Abzweigströme einen besonderen Leitungsquerschnitt, als ob die Ströme am Ende der ganzen Leitung abgezweigt wären. Legt man die so berechneten  $m$  Leitungen, nämlich jedesmal die positiven Leitungen für sich und die negativen für sich, nebeneinander, so herrscht in diesen Leitungen an beliebigen aber gleich weit vom Anfangspunkte entfernten Punkten dieselbe Spannung. Es können also beliebig viele von den  $m$  Leitungen auf beliebig weite Strecken mit einander verseilt werden, ohne dass die Verteilung des Stroms und der Spannung, also auch der maximale Spannungsverlust, sich irgendwie änderte. In dieser Berechnungsart spiegeln sich die in dem erklärenden Beispiele erkannten Verhältnisse besonders deutlich wieder. In Fig. 46 ist die Berechnungsweise und das Zusammenlegen der Leitungen für  $m = 3$  veranschaulicht.

Fig. 46.



Beispiel. Für den in den früheren Beispielen behandelten

Leistungsstrang gestaltet sich die Rechnung folgendermassen: Es ist nach Formel (17)

$$j = \frac{2,2}{0,0175 \cdot 712} = 0,1765,$$

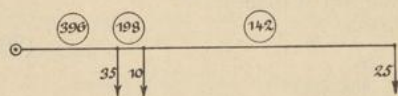
also

$$Q_1 = \frac{70}{0,1765} = 396 \text{ mm}^2, \quad Q_2 = \frac{35}{0,1765} = 198 \text{ mm}^2,$$

$$Q_3 = \frac{25}{0,1765} = 142 \text{ mm}^2.$$

Es ergibt sich also die in Fig. 47 dargestellte Leitung. Bequemer ist es vielleicht zuerst  $Q_3$  zu berechnen als

Fig. 47.



$$Q_3 = \frac{25 \cdot 712}{2,2} \cdot 0,0175 = 142 \text{ mm}^2$$

und nun den Querschnitt proportional den Leistungsströmen zunehmen zu lassen. Endlich kann man auch die Querschnitte  $Q'_v$  berechnen, nämlich

$$Q'_2 = \frac{10 \cdot 712}{2,2} \cdot 0,0175 = 56,7$$

und

$$Q'_1 = \frac{35 \cdot 712}{2,2} \cdot 0,0175 = 198$$

und erhält dann die wahren Querschnitte durch Addition

$$Q_2 = Q_3 + Q'_2 = 198,7,$$

$$Q_1 = Q_2 + Q'_1 = 396,7.$$

Auch bei der Methode der Berechnung auf konstante Stromdichte sind die beiden erstrebten Vorteile (vergl. § 58) erreicht.

**61. Eine falsche Berechnungsmethode.** Man erkennt aus dem vorigen Paragraphen, wie falsch es sein würde, den zu addierenden Querschnitt  $Q'_v$  unter Einführung der Länge  $\mathcal{L}_v$  (an Stelle von  $\mathcal{L}_m$ ) und dem maximalen Spannungsverluste  $\epsilon_m$  zu berechnen. Der Querschnitt würde eben zu dünn werden, denn soll  $Q'_v$  mit  $Q_m$  zusammengelegt werden dürfen, so darf der Spannungsverlust an dem Endpunkte von  $\mathcal{L}_v$  nicht  $\epsilon_m$  sein, sondern nur den Wert

$$\epsilon_v = \frac{\mathcal{L}_v}{\mathcal{L}_m} \epsilon_m$$

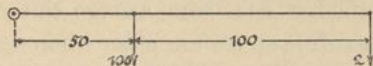
haben, nämlich denselben Wert, den er in der Leitung vom Querschnitte  $Q_m$  hat.

Da diese falsche Berechnungsmethode noch heute nicht selten angewendet wird, soll ihre Fehlerhaftigkeit durch ein drastisches Beispiel besonders illustriert werden.



Beispiel. Es soll der in Fig. 48 dargestellte Leitungsstrang berechnet werden.

Fig 48.



falsche Berechnung:

$$Q_2 = \frac{2 \cdot 300}{2,2} \cdot 0,0175 = 4,78$$

$$Q'_1 = \frac{100 \cdot 100}{2,2} \cdot 0,0175 = 79,6;$$

daraus folgt

$$Q_1 = Q_2 + Q'_1 = 84,4.$$

Benützen wir diese Querschnitte, so ergibt sich als wahrer Spannungsverlust

$$\epsilon_1 = \frac{102 \cdot 100}{84,4} \cdot 0,0175 = 2,12$$

$$\epsilon_2 = \frac{2 \cdot 200}{4,78} \cdot 0,0175 = 1,46$$

also

$$\epsilon_m = 3,58,$$

gegenüber den irrtümlich erwarteten 2,2 V.

richtige Berechnung:

$$Q_2 = \frac{2 \cdot 300}{2,2} \cdot 0,0175 = 4,78$$

$$Q'_1 = \frac{100 \cdot 300}{2,2} \cdot 0,0175 = 239;$$

daraus folgt

$$Q_1 = Q_2 + Q'_1 = 243,8.$$

$$\epsilon_1 = \frac{102 \cdot 100}{243,8} \cdot 0,0175 = 0,733$$

$$\epsilon_2 = \frac{2 \cdot 200}{4,78} \cdot 0,0175 = 1,46$$

also

$$\epsilon_m = 2,193$$

oder rund

$$\epsilon_m = 2,2 \text{ V,}$$

wie erwartet war.

Nach der falschen Methode hat sich also eine Leitung ergeben, in der der maximale Spannungsverlust den zulässigen um ungefähr 63% übersteigt.

**62. Vergleichung der Methoden der Berechnung auf konstanten Querschnitt und auf konstante Stromdichte.** Was zunächst das Verfahren der Berechnung betrifft, so wird man bemerkt haben, dass die Berechnung auf konstante Stromdichte sich bequemer ausführen lässt als die andere, denn man hat dabei nur den einen Wert  $\frac{1}{j}$  auszurechnen — womit gleichzeitig die Kontrolle auf Stromdichte erledigt ist — diesen auf dem Rechenschieber einzustellen und kann dann in den Produkten dieses Wertes in die Leitungsströme jeden Querschnitt sofort ablesen. Bei der Berechnung auf konstanten Querschnitt dagegen sind  $m$  Produkte von der Form  $J^2 \ell$  oder  $\mathfrak{J} L$  zu bilden, also auch  $m$  Einstellungen auf dem Rechenschieber zu machen, danach sind diese Produkte zu addieren und endlich die Schlussrechnung auszuführen. Diese Methode ist also jedenfalls verhältnismässig unbequem zu handhaben.

Vergleicht man aber die beiden Methoden mit Rücksicht auf die den Berechnungen entsprechend ausgeführten Anlagen, so gebührt der Berechnung auf konstanten Querschnitt insofern der Vorzug, als es einfacher ist, eine Anlage mit durchgehends nur einer Drahtsorte auszuführen als an jeder Abzweigung einen andern Draht verwenden zu müssen. Ausserdem kann ein kleiner, wenn auch unbedeutender Vorteil bei Anwendung des konstanten Querschnittes darin erblickt werden, dass die Nutzspannungen an den an verschiedenen Stellen abgezweigten Stromempfängern weniger von einander abweichen als bei den veränderten Querschnitten der Anlage mit konstanter Stromdichte. Umgekehrt kann der Umstand, dass die Stromdichte in dem ersten Stücke des konstanten Querschnittes höher ist, als die konstante Stromdichte der anders berechneten Leitung, der ersteren unter Umständen zum Nachteil gereichen, denn im Falle der ersten Berechnungsart kann die Stromdichte leicht zu hoch sein, während sie nach der zweiten Berechnungsart noch in mässigen Grenzen bleiben würde.

Es liegt nahe, den Vergleich noch weiter auszudehnen, indem man die Frage stellt, welche von den beiden Methoden eine billigere Anlage liefert.

Wir können uns die Entscheidung leichter machen, wenn wir die Frage dahin vereinfachen, dass wir die Berechnungsart suchen, die zu dem kleinsten Aufwand von Leitungskupfer führt. Da die Kosten einer Leitungsanlage hiervon nicht allein abhängen, wie wir schon oben bei der Ableitung der Thomson'schen Regel in § 18 gesehen haben, so ist allerdings der Kupferaufwand nicht ohne weiteres für die Gesamtkosten massgebend. Bei Vergleichen der vorliegenden Art, bei denen die Leitungsquerschnitte im allgemeinen nicht erheblich von einander abweichen, werden aber immerhin die Kupfermengen einen ziemlich genauen Schluss auf das Verhältnis der Gesamtkosten zulassen.

In der Praxis ist es deshalb auch üblich geworden, bei Vergleichung grösserer Projekte über dieselbe Anlage, die für ein nützlich geleistetes Watt in den Leitungen der verschiedenen Projekte aufgewendete Kupfermenge anzugeben.

Vergleicht man zunächst die Kupfermengen, die sich in dem nach den drei Berechnungsarten durchgeführten Beispiele ergeben haben, so erhält man folgende Zahlen:

$$\begin{aligned}
 & 1) \text{ bei freier Wahl der Spannungsverluste} \\
 & M_1 = 336 \cdot 200 = 67\,200 \text{ cm}^3 \\
 & M_2 = 10 \cdot 12 = 120 \text{ „} \\
 & M_3 = 300 \cdot 500 = 150\,000 \text{ „} \\
 & \text{also } M = \Sigma M_v = 217\,320 \text{ „}
 \end{aligned}$$

2) bei konstantem Querschnitt

$$M = 214 \cdot 712 = 152370 \text{ cm}^3$$

3) bei konstanter Stromdichte

$$M_1 = 396 \cdot 200 = 79200$$

$$M_2 = 198 \cdot 12 = 2380$$

$$M_3 = 142 \cdot 500 = 71000$$

$$\text{also } M = \Sigma M_\nu = 152580$$

Die erste Methode hat also im Beispiel eine grössere Kupfermenge geliefert als die zweite und dritte, diese beiden haben dagegen ungefähr die gleichen Mengen geliefert. Würde man genauer gerechnet haben, so würden sich bei der Berechnung nach diesen Methoden sogar genau gleiche Volumina ergeben haben, was aus folgender Betrachtung erhellt: Es ist

$$M = \Sigma L_\nu Q_\nu, \dots \dots \dots (21)$$

also bei der Berechnung auf konstanten Querschnitt

$$M_Q = Q \cdot \Sigma L_\nu = Q \Sigma_m \dots \dots \dots (22)$$

Setzt man den Wert für  $Q$  nach Gleichung (12) ein, so ergibt sich

$$M_Q = \frac{\Sigma_m \varrho}{\epsilon_m} \Sigma \mathfrak{J}_\nu L_\nu \dots \dots \dots (23)$$

Für konstante Stromdichte dagegen hatte sich der Querschnitt nach Formel (19) ergeben und durch Einsetzung dieses Wertes in Gleichung (21) folgt

$$M_j = \frac{\Sigma_m \varrho}{\epsilon_m} \Sigma \mathfrak{J}_\nu L_\nu; \dots \dots \dots (24)$$

also ist

$$M_Q = M_j \dots \dots \dots (25)$$

Die Berechnungen auf konstanten Querschnitt und auf konstante Stromdichte führen zu den gleichen Mengen Leitungsmetall.

Der Umstand, dass zwei so verschiedene Berechnungsmethoden dieselbe Kupfermenge liefern, lässt vermuten, dass diese Menge noch nicht die geringste ist, die sich bei demselben maximalen Spannungsverluste erreichen lässt. Es soll deshalb die Frage aufgeworfen werden, ob es ein Verfahren der Leitungsberechnung giebt, das zu einer noch geringeren, der geringsten Kupfermenge führt.

**63. Vierte Methode. Die Berechnung unter der Bedingung des geringsten Aufwandes von Leitungsmetall.** Es soll zunächst ein Leitungsstrang mit drei Abzweigungen (vergl. Fig. 42) behandelt werden. Der maximale Spannungsverlust ist in der Grösse

$$\epsilon_m = E_o - E_3$$

festgesetzt, über die einzelnen Summanden

$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \epsilon_m = (E_0 - e_1) + (e_1 - e_2) + (e_2 - E_3)$   
soll jetzt so verfügt werden, dass die Menge des Leitungsmetall

$$M = L_1 Q_1 + L_2 Q_2 + L_3 Q_3$$

ein Minimum werde. Die Nutzspannungen an der ersten und zweiten Abzweigung sind die veränderlichen Grössen in der Rechnung und deshalb, wie später auch  $m$  für  $M$ , klein geschrieben.

Setzt man in den Wert von  $M$  die Querschnitte, ausgedrückt in ihrer Abhängigkeit von den einzelnen Spannungsverlusten oder Nutzspannungen, so erhält man

$$m = \left\{ \frac{\mathfrak{J}_1 L_1^2}{E_0 - e_1} + \frac{\mathfrak{J}_2 L_2^2}{e_1 - e_2} + \frac{\mathfrak{J}_3 L_3^2}{e_2 - E_3} \right\} q.$$

Hält man hierin einen Augenblick  $e_2 = E_2$  konstant, so wird  $m$  ein Minimum, wenn

$$\frac{1}{q} \cdot \frac{\partial m}{\partial e_1} = \frac{\mathfrak{J}_1 L_1^2}{(E_0 - e_1)^2} - \frac{\mathfrak{J}_2 L_2^2}{(e_1 - E_2)^2} = 0.$$

Lässt man dagegen nur  $e_2$  variieren unter Konstanthaltung von  $e_1 = E_1$ , so ergibt sich als Bedingung für das Minimum

$$\frac{1}{q} \cdot \frac{\partial m}{\partial e_2} = \frac{\mathfrak{J}_2 L_2^2}{(E_1 - e_2)^2} - \frac{\mathfrak{J}_3 L_3^2}{(e_2 - E_3)^2} = 0.$$

Diese beiden Bedingungsgleichungen sind identisch mit

$$\frac{Q_1^2}{\mathfrak{J}_1} = \frac{Q_2^2}{\mathfrak{J}_2} \quad \text{und} \quad \frac{Q_2^2}{\mathfrak{J}_2} = \frac{Q_3^2}{\mathfrak{J}_3}$$

und sie müssen, da nun  $e_1$  und  $e_2$  nicht mehr einzeln, sondern gleichzeitig variiert werden sollen, gleichzeitig bestehen, wenn das Volumen des Leitungsmetall ein Minimum werden soll.

Die Betrachtung lässt sich ohne weiteres auf einen Leitungsstrang von beliebig vielen Abzweigungen ausdehnen, und es ergibt sich dann als allgemeine Minimumbedingung die Gleichung

$$Q_\nu = c \sqrt{\mathfrak{J}_\nu} \dots \dots \dots (26)$$

in Worten: Sind in einem Leitungsstrange die Querschnitte proportional den Quadratwurzeln aus den sie durchfliessenden Strömen, so ist der Aufwand an Leitungsmetall der geringste, der für dieselbe Effektverteilung unter demselben maximalen Spannungsverluste möglich ist.

Dass in der That ein Minimum und kein Maximum eintritt, bedarf keines rechnerischen Nachweises, sondern ergibt sich durch die einfache Ueberlegung, dass das Maximum im vorliegenden Falle unmöglich eintreten kann. Das Maximum muss offenbar den Wert  $\infty$  besitzen, denn man kann den gesamten Spannungsverlust  $\epsilon_m$  so zerlegen, dass er in einem der Leitungsstücke schon  $= \epsilon_m$  ist,

dann muss er in den übrigen unendlich klein sein, und die Querschnitte für die Leitungsstücke müssen unendlich gross werden. Die Stromdichte braucht offenbar nur im ersten Leitungsstück geprüft zu werden, da sie hier — wie sich aus der Vergleichung mit der Berechnungsmethode auf konstante Stromdichte ergibt — am grössten sein muss.

Zur Berechnung eines Leitungsstranges ist das erhaltene Ergebnis folgendermassen zu verwenden:

Setzt man die Bedingung für das minimale Metallvolumen aus Gleichung (26) in die allgemeine Gleichung des Spannungsverlustes

$$\epsilon_m = \sum_1^m \frac{\mathfrak{J}_\nu L_\nu}{Q_\nu} \rho$$

ein, so ergibt sich

$$\epsilon_m = \frac{\rho}{c} \sum_1^m L_\nu \sqrt{\mathfrak{J}_\nu}$$

und hieraus, indem man den Faktor  $c$  alle nach Gleichung (26) möglichen Werte durchlaufen lässt

$$Q_\nu = \sqrt{\mathfrak{J}_\nu} \frac{\rho \sum_1^n L_\nu \sqrt{\mathfrak{J}_\nu}}{\epsilon_m} \dots \dots \dots (27)$$

Der durch einen Bruchstrich zusammengefasste Teil der rechten Seite ist für einen bestimmten Leitungsstrang für alle Querschnitte derselbe, also nur einmal festzustellen. Er stellt den Faktor  $c$  in Gleichung (26) dar.

Beispiel. Als Beispiel soll derselbe Leitungsstrang behandelt werden, der schon bei den früheren Methoden benutzt worden ist.

Zunächst ist der Wert des Bruches, also des Faktors  $c$ , zu ermitteln. Es ist

$$\begin{array}{r} L_1 \sqrt{\mathfrak{J}_1} = 200 \cdot 8,37 = 1674 \\ L_2 \sqrt{\mathfrak{J}_2} = 12 \cdot 5,92 = 71 \\ L_3 \sqrt{\mathfrak{J}_3} = 500 \cdot 5,0 = 2500 \\ \hline 4245 \end{array}$$

also ist

$$c = \frac{0,0175 \cdot 4245}{2,2} = 33,77$$

und es wird nun

$$\begin{array}{r} Q_1 = 33,77 \cdot 8,37 = 282,5 \text{ mm}^2 \\ Q_2 = 33,77 \cdot 5,92 = 199,6 \text{ »} \\ Q_3 = 33,77 \cdot 5,0 = 168,8 \text{ »} \end{array}$$

Die Aufgabe ist gelöst; die Stromdichte im ersten Leitungsstück beträgt

$$\frac{70}{282,5} = 0,248 \text{ Amp/mm}^2,$$

und das Kupfervolumen ergibt sich zu

$$M_{\min} = 143190 \text{ cm}^3$$

gegenüber rund 152500 cm<sup>3</sup> bei den Berechnungen auf konstanten Querschnitt und auf konstante Stromdichte.

Die Methode liefert also tatsächlich kleinere Kupfermengen und hat ausserdem den Vorteil gegenüber der Methode der Berechnung auf konstante Stromdichte, dass die Differenzen der Nutzspannungen in den Leitungssträngen bei der ersteren nicht so gross werden als bei der letzteren; sie sind dagegen etwas grösser als bei den auf konstanten Querschnitt berechneten Leitungssträngen. Diese Thatsache, die leicht einzusehen ist, ist übrigens, wie schon oben erwähnt, bei Leitungen für elastische Anlagen nicht von Bedeutung.

#### 64. Die Teilung des Spannungsverlustes auf Hin- und Rückleitung.

Es ist an dieser Stelle angebracht, sich die Frage vorzulegen, ob man die billigste Anlage erhält, wenn man den Spannungsverlust so teilt, dass — wie nach der Festsetzung in § 49 bisher allgemein angenommen wurde — die Hälfte auf die Hin-, die andere Hälfte auf die Rückleitung fällt, d. h. also ob es mit Rücksicht auf die Kosten richtig war, Hin- und Rückleitung von gleichem Querschnitt zu wählen. Nur die Verneinung dieser Frage könnte uns veranlassen, die aus vielen praktischen Gründen zweckmässige Wahl gleicher Querschnitte aufzugeben. Die Beantwortung der Frage läuft wiederum darauf hinaus, festzustellen, unter welchem das Verhältnis  $\epsilon_h : \epsilon_r$  der beiden Teile  $\epsilon_h + \epsilon_r = \epsilon_m$  der Aufwand an Leitungsmetall ein Minimum wird.

Ist die Länge  $\mathcal{L}$ , der Abzweigstrom  $J$  einer Leitung und der maximal zulässige Spannungsverlust  $\epsilon_m = \epsilon_h + \epsilon_r$  gegeben, so stellen sich die Querschnitte in ihrer Abhängigkeit von den Teilen des Spannungsverlustes dar in der Form

$$q_h = \frac{1}{2} \cdot \frac{J \mathcal{L}}{\epsilon_h} \varrho \quad \text{und} \quad q_r = \frac{1}{2} \cdot \frac{J \mathcal{L}}{\epsilon_m - \epsilon_h} \varrho,$$

und das Metallvolumen zu

$$m = \frac{1}{4} J \mathcal{L}^2 \varrho \left( \frac{1}{\epsilon_h} + \frac{1}{\epsilon_m - \epsilon_h} \right).$$

Dieser Wert kann nur dann ein Minimum werden, wenn

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon_h} \left( \frac{1}{\epsilon_h} + \frac{1}{\epsilon_m - \epsilon_h} \right) = 0,$$

also wenn

$$\epsilon_h = \epsilon_m - \epsilon_h \quad \text{oder} \quad \epsilon_h = \frac{\epsilon_m}{2}$$

Dass ein Minimum eintritt und kein Maximum, bedarf keines Beweises.

Wir haben also keine Veranlassung von der Annahme gleicher Querschnitte für Hin- und Rückleitung für gewöhnliche Fälle abzugehen; wir würden im Gegenteil bei jeder anderen Annahme die Kosten der Anlage vergrößern.

**65. Besondere Fälle einfacher Leitungsstränge.** Erster Fall.

Es sei gegeben ein Leitungsstrang von bekannter Länge, und der Strang sei auf seiner ganzen Länge vollständig gleichmässig belastet, so dass von jeder noch so klein gewählten Längeneinheit gleich viel Strom abfließt. Die Summe aller Abzweigströme sei bekannt als

$$\sum J_v = \mathfrak{J}_1.$$

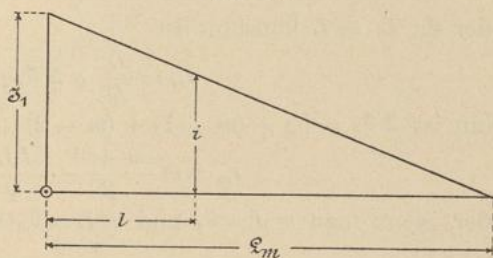
Aus dem Gesagten folgt, dass sich die Intensität des Leitungsstromes für jeden Punkt der Leitung aus der Gleichung

$$i = \frac{\mathfrak{J}_1}{\xi_m} (\xi_m - l) \dots \dots \dots (28)$$

ergibt, worin  $l$  die (veränderliche) Entfernung eines betrachteten Punktes vom Anfangspunkte der Leitung,  $i$  die in diesem Punkte herrschende Stärke des Leitungsstromes bedeutet.

Die Kurve des Stromes in Abhängigkeit von der Länge der Leitung ist also eine Gerade, vergl. Fig. 49. Es sei ferner ein bestimmter maximaler Spannungsverlust  $\epsilon_m$  vorgeschrieben. Die

Fig. 49.



Leitung soll auf konstanten Querschnitt berechnet werden.

Der Spannungsverlust im Längenelement  $dl$  ist

$$d\epsilon = \frac{i \cdot dl}{Q} \cdot \rho,$$

also der Verlust bis zum Punkte in der Entfernung  $l$

$$\epsilon = \frac{\rho}{Q} \int_0^l i \, dl = \frac{\rho \mathfrak{J}_1}{Q \xi_m} \int_0^l (\xi_m - l) \, dl$$

oder

$$\epsilon = \frac{\rho \mathfrak{J}_1}{Q} l \left( 1 - \frac{l}{2 \xi_m} \right) \rho \dots \dots \dots (29)$$

Diese Gleichung stellt eine Parabel dar, deren Scheitelpunkt im

Teichmüller, elektrische Leitungen.

Punkte  $P_\infty$  (vergl. Fig. 51) liegt. Der maximale Spannungsverlust tritt ein für  $l = \varrho_m$  und ist

$$\epsilon_m = \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{J}_1 \varrho_m}{Q} \varrho, \dots \dots \dots (30)$$

wobei  $\varrho_m$  die gesamte Länge der Leitung, Hin- und Rückleitung, bedeutet. Umgekehrt ist also der gesuchte Querschnitt

$$Q = \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{J}_1 \varrho_m}{\epsilon_m} \varrho, \dots \dots \dots (31)$$

d. h. halb so gross, als wenn der Gesamtstrom  $\Sigma J = \mathfrak{J}_1$  die Leitung ihrer ganzen Länge nach durchflosse, also am Ende der Leitung abgezweigt wäre.

Zweiter Fall. Die Leitung sei durch  $m$  gleiche Ströme  $J$ , die in gleichen Abständen  $L = \frac{\varrho_m}{m}$  von einander abgezweigt sind,

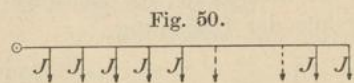


Fig. 50.

(vergl. Fig. 50) belastet. Die Verhältnisse seien im übrigen die des ersten Falles. Die Leitung ist auf

konstanten Querschnitt zu berechnen.

Der maximale Spannungsverlust ist

$$\epsilon_m = \frac{\Sigma \mathfrak{J}_\nu L_\nu}{Q} \varrho$$

oder da  $L_\nu = L$  konstant ist

$$\epsilon_m = \frac{L}{Q} \varrho \Sigma \mathfrak{J}_\nu.$$

Nun ist  $\Sigma \mathfrak{J}_\nu = [m + (m - 1) + (m - 2) + \dots + 2 + 1] J$ , also

$$\epsilon_m = m \frac{m + 1}{2} \cdot \frac{J L}{Q} \varrho$$

oder, wenn man  $m J = \mathfrak{J}_1$  und  $m L = \varrho_m$  setzt,

$$\epsilon_m = \frac{1 + \frac{1}{m}}{2} \cdot \frac{\mathfrak{J}_1 \varrho_m}{Q} \varrho \dots \dots \dots (32)$$

und

$$Q = \frac{1 + \frac{1}{m}}{2} \cdot \frac{\mathfrak{J}_1 \varrho_m}{\epsilon_m} \varrho \dots \dots \dots (33)$$

Hieraus folgt:

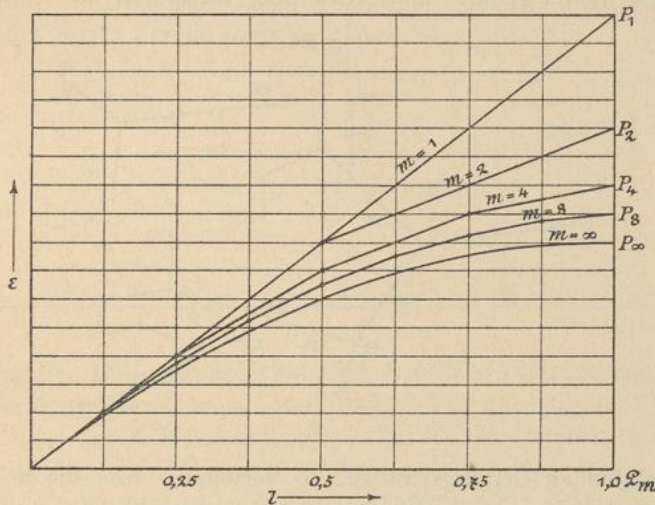
Der maximale Spannungsverlust am Ende der Leitung erreicht seinen grössten Wert  $\epsilon_{mm}$ , wenn  $m = 1$ , d. h. wenn der Strom  $\mathfrak{J}_1$  als  $J_1$  am Ende der Leitung abgezweigt wird; er wird kleiner mit wachsendem  $m$  und erreicht seinen Grenzwert  $= \frac{1}{2} \epsilon_{mm}$  für  $m = \infty$ . Für  $m = \infty$  ist der erste oben behandelte Fall erreicht. Die



Kurve des Spannungsverlustes in Abhängigkeit von der Länge der Leitung ist anfangs (für  $m = 1$ ) eine Gerade, wird mit zunehmendem  $m$  eine mehr und mehr gebrochene Linie, die sich mehr und mehr an die Kurve des ersten Falles, die Parabel, anschmiegt. In Fig. 51 sind die Kurven für  $m = 1, 2, 4, 8$  und  $= \infty$  dargestellt. Die Ordinaten am Ende stellen die für diese Werte von  $m$  aus der Formel (32) berechneten Werte von  $\epsilon_m$  dar. Umgekehrt kann man aus diesen Endordinaten auf den Querschnitt schliessen, der sich bei gleichem maximalen Spannungsverluste für die verschiedenen Fälle ergibt.

Eine unmittelbare praktische Bedeutung gewinnt diese Be-

Fig. 51.



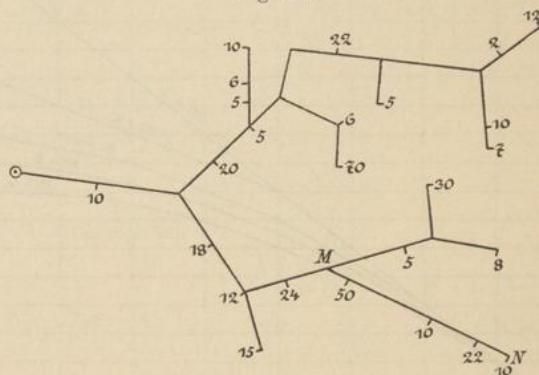
trachtung in dem Falle, dass die Belastung einer Leitung von vornherein nicht bestimmt angegeben werden kann, vielmehr nur mit der Angabe „Belastung von  $n$  Amp auf 1 Meter Leitungslänge“ geschätzt wird. Die Berechnung der Leitung erfolgt dann in der Weise, dass man — wie es Formel (31) angeht — sich den aus dieser Angabe zu entnehmenden Gesamtstrom am Ende der Leitung abzweigt denkt und den doppelten Spannungsverlust  $2 \epsilon_m$  zu Grunde legt. Der Fehler, den man hiermit gemacht hat, wenn von der auf diese Weise berechneten Leitung die Ströme tatsächlich abzweigt werden, kann im Maximum der sein, dass der Spannungsverlust den doppelten Wert erreicht. Wie gross der Fehler bei ganz beliebiger Verteilung der Abzweigungen werden kann,

lässt sich in jedem Falle leicht mit grosser Annäherung abschätzen, indem man sich die gesamte Belastung aus zwei Belastungen zusammengesetzt denkt, einer möglichst gleichmässigen und einer darübergelagerten, die die Ungleichmässigkeiten enthält.

### Die Leitungsverzweigungen.

66. Ist eine beliebige Leitungsverzweigung mit beliebigen Belastungen, etwa wie in Fig. 52, gegeben, so wird durch die Forderung der Elastizität wiederum die einzige Bedingung gestellt, dass der maximal mögliche Spannungsverlust einen gewissen Wert nicht überschreite. Ueber die Summanden  $\epsilon$  dieses Spannungsverlustes ist noch nichts gesagt; man wird über dieselben, wie früher bei

Fig. 52.



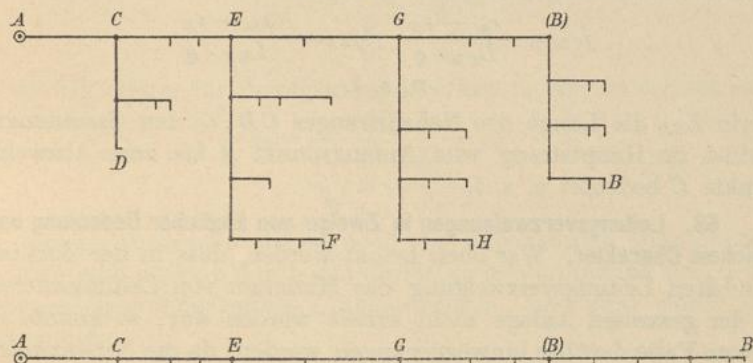
dem einfachen Leitungsstrange, so verfügen, dass die bei freier Wahl möglichen Unzweckmässigkeiten ausgeschlossen sind. Im vorliegenden Falle haben wir es aber mit einer noch grösseren Zahl von Willkürlichkeiten zu thun, da man in jedem mehrfach belasteten abgezweigten Strange, wie z. B. dem Strange  $MN$ , den vom Abzweigpunkte ( $M$ ) aus noch verfügbaren Spannungsverlust, der schon beliebig gewählt werden konnte, noch beliebig teilen kann.

Man kann die Leitungsverzweigungen im allgemeinen in zwei Arten einordnen. Bei der einen kann man einen Hauptstrang unterscheiden, an den sich die Abzweigstränge von geringerer Bedeutung anschliessen, wobei die einzelnen Stränge an beliebigen Punkten belastet sein können; bei der andern verzweigt sich ein Strang in zwei oder mehrere Stränge von annähernd gleicher Bedeutung, wobei häufig nur die Enden der Abzweigungen belastet sind.

**67. Leitungsverzweigungen mit einem Hauptstrange.** Fig. 53a stellt eine solche Verzweigung dar: An den Hauptstrang  $AB$  schliessen sich die Abzweigungen  $CD$ ,  $EF$  u. s. f. an, in denen man teilweise selbst wieder Hauptstränge und Nebenstränge unterscheiden kann, und zwar soll der Hauptstrang vornehmlich dadurch charakterisiert sein, dass er den stärksten Strom zu führen, also auch auf die stärksten Querschnitte Anspruch hat.

Die Aufgabe, eine solche Leitungsverzweigung zu berechnen, kann man nach den drei behandelten Methoden lösen, indem man

Fig. 53 a und 53 b.



zunächst den Hauptstrang  $AB$  (vergl. Fig. 53b) für sich betrachtet und ihn entweder auf konstanten Querschnitt, auf konstante Stromdichte oder auf minimalen Kupferverbrauch berechnet; die in die Abzweigleitungen  $CD$  u. s. f. abfließenden Ströme treten dabei einfach als Belastungen des Hauptstranges auf. Aus dieser Berechnung lassen sich die bis zu den Abzweigpunkten  $C$ ,  $E$ ,  $G$  u. s. f. auftretenden Spannungsverluste bestimmen, wodurch dann die in den einzelnen Abzweigleitungen noch statthaftern Verluste gegeben sind. Jede dieser Abzweigleitungen ist nun für sich unter Zugrundelegung des ihr zustehenden Spannungsverlustes zu berechnen, was wiederum nach den drei bekannten Methoden erfolgen kann.

Es ist zu beachten, dass diese Berechnungsweise nicht etwa für alle Leitungen denselben Querschnitt oder dieselbe Stromdichte oder für die gesamte Verzweigung den minimalen Kupferaufwand liefert, es treten vielmehr der Hauptstrang und die Nebenstränge, jeder einzeln, in dieser Beziehung ganz selbständig auf. Jeder Strang hat einen ihm eigenen Querschnitt oder eine ihm eigene

Stromdichte, und nur von jedem einzelnen Strange kann — im Falle der dritten Berechnungsmethode — ausgesagt werden, dass die geringste Menge an Leitungsmetall verwendet ist, die bei gleichem Spannungsverluste in diesem Strange möglich ist. Es folgt hieraus, dass auch die Stromdichte im allgemeinen je einmal für jeden Strang zu prüfen ist. Die Stromdichte, die bei der Berechnung auf konstante Stromdichte zugrunde gelegt werden musste, ist im Hauptstrange, wie früher,

$$j_{AB} = \frac{\epsilon_m}{L_{AB} \cdot \varrho}$$

in den Nebensträngen dagegen gleich

$$j_{CD} = \frac{\epsilon_m - \epsilon_C}{L_{CD} \cdot \varrho}, \quad j_{EF} = \frac{\epsilon_m - \epsilon_E}{L_{EF} \cdot \varrho}$$

u. s. f.

worin  $L_{CD}$  die Länge des Nebenstranges  $CD$ ,  $\epsilon_C$  den Spannungsverlust im Hauptstrang vom Anfangspunkt  $A$  bis zum Abzweigungspunkte  $C$  bedeutet u. s. f.

**68. Leitungsverzweigungen in Zweige von ähnlicher Bedeutung und gleichem Charakter.** War oben betont worden, dass in der dort behandelten Leitungsverzweigung das Minimum von Leitungsmetall in der gesamten Anlage nicht erzielt worden war, so konnte in diesem Falle darüber hinweggegangen werden, da die Nebenzweige von geringerem Querschnitte und deshalb weniger von Einfluss und Bedeutung waren. Jetzt aber, wo nicht mehr ein Strang die anderen an Bedeutung wesentlich überwiegt, bleibt — wenn wir nicht vollständig frei über die Teilung des Spannungsverlustes verfügen wollen — vernünftiger Weise keine andere Wahl, die Willkürlichkeiten zu beschränken, als die, das Minimum von Leitungsmetall vorzuschreiben. Wir stellen deshalb die Frage: Wie muss der vorgeschriebene Spannungsverlust  $\epsilon_m$  auf den Hauptstrang und auf die Zweige, also in

$$\epsilon_h + \epsilon_z = \epsilon_m$$

geteilt werden, damit die Kupfermenge ein Minimum werde?

Die gesamte Kupfermenge stellt sich bei einer Verzweigung in  $n$  Zweige dar als

$$m = L_h Q_h + \sum_1^n L_\nu Q_\nu$$

oder, da die Querschnitte in ihrer Abhängigkeit von den Teilen des Spannungsverlustes dargestellt sein müssen,

$$m = \frac{L_h^2 \mathfrak{J}_h}{\epsilon_h} \varrho + \frac{1}{\epsilon_m - \epsilon_h} \sum_1^n L_\nu^2 \mathfrak{J}_\nu \varrho.$$

Die einzige Variable ist  $\epsilon_h$ . Wird nach dieser differentiiert, so folgt

$$\frac{\partial m}{\partial \epsilon_h} = -\frac{L_h^2 \mathfrak{J}_h}{\epsilon_h} \varrho + \frac{1}{(\epsilon_m - \epsilon_h)^2} \sum_1^n L_\nu^2 \mathfrak{J}_\nu \varrho.$$

Also ergibt sich als Bedingung für das Auftreten eines Minimums, indem man die rechte Seite mit  $\varrho$  multipliziert und gleich Null setzt

$$\frac{Q_h^2}{\mathfrak{J}_h} = \sum_1^n \frac{Q_\nu^2}{\mathfrak{J}_\nu} \dots \dots \dots (34)$$

Setzt man den hieraus gewonnenen Wert

$$\frac{\mathfrak{J}_h^2}{Q_h^2} = \frac{\mathfrak{J}_h}{\sum_1^n \frac{Q_\nu^2}{\mathfrak{J}_\nu}}$$

in die Gleichung für den Spannungsverlust  $\epsilon_h$  ein, so ergibt sich

$$\epsilon_h = \frac{\sqrt{\mathfrak{J}_h L_h}}{\sqrt{\sum_1^n \frac{Q_\nu^2}{\mathfrak{J}_\nu}}} \varrho.$$

In diesem Ausdrucke stehen noch die unbekanntenen Querschnitte  $Q_\nu$ ; sie sind deshalb durch den durch  $\epsilon_m$  in Verbindung mit  $\epsilon_h$  gegebenen Spannungsverlust  $\epsilon_s$  auszudrücken, und zwar durch die Beziehung

$$\frac{Q_\nu^2}{\mathfrak{J}_\nu} = \frac{\mathfrak{J}_\nu L_\nu^2}{\epsilon_s^2} \varrho^2.$$

Setzt man diesen Wert ein, so ergibt sich

$$\epsilon_h = \epsilon_s \sqrt{\frac{\mathfrak{J}_h}{\sum_1^n \mathfrak{J}_\nu L_\nu^2}} \cdot L_h$$

oder

$$\frac{\epsilon_s}{\epsilon_h} = \frac{\sqrt{\sum \mathfrak{J}_\nu L_\nu^2}}{L_h}, \dots \dots \dots (35)$$

wodurch die gesuchte Teilung des gegebenen Spannungsverlustes unter Erfüllung der Bedingung des minimalen Kupferverbrauches gegeben ist. Dieses Ergebnis lässt sich in der folgenden interessanten Weise\*) deuten:

Der Wurzelausdruck hat offenbar die Dimension einer Länge. Der Spannungsverlust  $\epsilon_h$  wird am Ende der Leitung von der Länge  $L_h$  erreicht, wenn dieselbe vom Strome  $\mathfrak{J}_h$  durchflossen wird; würde derselbe Strom im gleichen Querschnitte weiter fließen, so würde

\*) nach Herzog und Feldmann, Berechnung elektrischer Leitungsnetze.

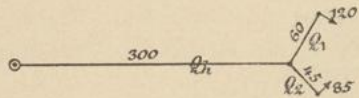
in dem neuen Stücke der Spannungsverlust  $\epsilon_z$ , insgesamt also der Spannungsverlust  $\epsilon_m$  auftreten, wenn dieses Stück die Länge

$$A = \sqrt{\frac{\sum \mathfrak{J}_v L^2_v}{\mathfrak{J}_h}} \dots \dots \dots (36)$$

hätte. Man hat diese Länge die fiktive Länge genannt.

Beispiel. Eine Leitung von 300 m einfacher Länge sei an ihrem Endpunkte in zwei Zweige geteilt, deren erster 60 m lang

Fig. 54.



und an seinem Ende mit 120 Amp belastet ist, während vom Endpunkte des anderen, 45 m langen Zweiges 85 Amp abgenommen werden, vergl. Fig. 54. Der Gesamtspannungsverlust soll  $\epsilon_m = 15$  V

sein; wie gross muss der Spannungsverlust bis zum Verzweigungspunkte sein, wenn die Kupfermenge ein Minimum sein soll?

Die fiktive Länge ergibt sich nach Formel (36) zu

$$A = \sqrt{\frac{120 \cdot (60)^2 + 85 \cdot (45)^2}{205}} = 54,3 \text{ m,}$$

wenn die einfache Länge angenommen wird. Demnach ist

$$\frac{\epsilon_h}{\epsilon_z} = \frac{300}{54,3}$$

oder

$$\epsilon_h = \frac{300}{354,3} \epsilon_m = 0,847 \epsilon_m$$

also

$$\epsilon_h = 12,7 \text{ Volt und } \epsilon_z = 2,3 \text{ Volt.}$$

Daraus berechnen sich die Querschnitte zu

$$Q_h = 169,5 \text{ mm}^2, \quad Q_1 = 109,6 \text{ mm}^2, \quad Q_2 = 58,2 \text{ mm}^2.$$

Der Aufwand an Leitungskupfer ist in der folgenden Zusammenstellung angegeben, aus der gleichzeitig hervorgeht, dass bei einer geringen Veränderung der Teilung des Spannungsverlustes  $\epsilon_m$  das Kupfervolumen grösser wird. Es ist

	für $\epsilon_z = 2,3$ V	$\epsilon_z = 2$ V	$\epsilon_z = 3$ V
$M_h =$	101 700 cm <sup>3</sup>	99340 cm <sup>3</sup>	107600 cm <sup>3</sup>
$M_1 =$	13 150 „	15120 „	10080 „
$M_2 =$	5 240 „	6020 „	4020 „
Gesamtvolumen =	120 090 „	120480 „	121700 „