Das Elementare der ebenen Geometrie

Lehmann, Franz Xaver

Karlsruhe, 1888

Flächeninhalt des Dreieckes

$$\lg \operatorname{tg} \frac{\alpha-\gamma}{2} = \lg 170 + \lg \operatorname{tg} 60^{0}25'40'' - \lg 864;$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{\alpha-\gamma}{2} = 2{,}2304489 + 10{,}3008941 - 2{,}9065137$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{\alpha-\gamma}{2} = 9{,}5948293$$

$$\frac{\alpha-\gamma}{2} = 21^{0}\,28'\,28'' \text{ und}$$

$$\frac{\alpha+\gamma}{2} = 63^{0}\,25'\,40'', \text{ daher}$$

$$\alpha = 84^{0}\,54'\,8''$$

$$\beta = 42^{0}\,57'\,12''.$$

§. 22.

Flächeninhalt des Dreieckes.

Der Flächeninhalt eines Dreieckes kann, wenn bestimmte Teile gegeben sind, berechnet werden und zwar in folgenden Fällen:

1) Wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel bekannt sind, z. B. in Fig. 4, b, c und α. Die Fläche F ist:

$$F = \frac{b \,.\, h}{2}, \quad h = c \,.\, \sin \alpha$$

CIII. $$F = \frac{b \,.\, c \,.\, \sin \alpha}{2}, \text{ d. h.}$$

Der Flächeninhalt ist gleich dem halben Produkte aus zwei Seiten und dem Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

2) Wenn zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel gegeben sind, z. B. b, c und γ (in Fig. 4).

In diesem Falle berechnet man zuerst einen zweiten Winkel nach dem Satze C., wodurch dieser Fall auf den ersten reduziert werden kann.

3) Wenn eine Seite und die zwei anliegenden Winkel gegeben sind. Auch dieser Fall kann nach dem Satz C. auf den ersten zurückgeführt werden.

4) Wenn alle drei Seiten gegeben sind.

Bei der Umformung der Gleichung CI. wurde für die Seiten a, b, c und Winkel α (in Fig. 4) erhalten:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{([a+b+c][-a+b+c])}.$$

Hätte man dort, $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ von $1=1$ subtrahiert, so würde man unter ähnlichen Umwandlungen erhalten haben:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{(a-b+c)\,(a+b-c)}{bc}\right)},$$

also durch Multiplikation beider Gleichungen:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\,.\,\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{b^2c^2}\right)}.$$

Nun ist aber nach CIII.:

$$F = \frac{b\,.\,c\,.\,\sin\alpha}{2} = \frac{bc}{2}\,.\,2\,.\,\sin\frac{\alpha}{2}\,.\,\cos\frac{\alpha}{2} = bc\,.\,\sin\frac{\alpha}{2}\,.\,\cos\frac{\alpha}{2} \text{ und}$$

CIV. $$F = \frac{1}{4}\sqrt{([a+b+c][-a+b+c][a-b+c][a+b-c])}.$$

Wäre z. B. $a=3$, $b=4$, $c=5$, so erhielte man:

$$F = \frac{1}{4}\sqrt{([12][6][4][2])} = \frac{1}{4}\sqrt{576} = \frac{1}{4}\,.\,24 = 6;$$

dieses Dreieck könnte demnach rechtwinklig sein.

§. 23.

Aus der Anwendung der trigonometrischen Funktionen auf die Bestimmung der Dreiecke lässt sich auch die Anwendbarkeit derselben zur Auflösung anderer Figuren erkennen. Für ein Viereck z. B., dessen Seiten a, b, c, d Sehnen desselben Kreises sind, lässt sich ein ähnlicher Satz zur Bestimmung des Flächeninhaltes finden, wie (in §. 22) einer für das Dreieck gefunden wurde, nämlich:

$$\mathrm{Fl} = \frac{1}{4}([a+b+c-d][a+b-c+d][a-b+c+d][-a+b+c+d]).$$

Sammlungen von Aufgaben, welche durch diese wenigen Sätze aufgelöst werden können, sind ziemlich zahlreich, sie stellen sich aber im Gebiete der Mathematik und Naturkunde vielfach von selbst.
