Das Elementare der ebenen Geometrie

Lehmann, Franz Xaver

Karlsruhe, 1888

Auflösung des schiefwinkligen Dreieckes

urn:nbn:de:bsz:31-293633

Ebenso folgt

LXXXXVIII. Die Hypotenuse ist gleich dem Quotienten aus einer Kathete und dem Sinus des ihr gegenüberliegenden Winkels.

LXXXXIX. Die Hypotenuse ist gleich dem Quotienten aus einer Kathete und dem Cosius des der Kathete anliegenden Winkels.

Zur Bestimmung der Winkel aus zwei gegebenen Seiten können die Sätze I. bis VI. unmittelbar benützt werden.

Z. B. von $a c_1 = 15$ m, $b_1 c_1 = 8{,}9999\ldots$ m, wie gross ist α?

Nach I. ist:

$$\sin\alpha = \frac{b_1 c_1}{a c_1}$$

$$\lg\sin\alpha = \lg b_1 c_1 - \lg a c_1 + 10 = \lg 8{,}9999\ldots - \lg 15 + 10$$
$$\lg\sin\alpha = 0{,}9542380 - 1{,}1760913 + 10 = 9{,}7781467$$
$$\alpha = 36^\circ 52' 10''.$$

§. 21.

Auflösung des schiefwinkligen Dreieckes.

Die schiefwinkligen Dreiecke lassen sich, wenn bestimmte Teile derselben gegeben sind, im allgemeinen dadurch auflösen, dass sie durch Höhenlinien in rechtwinklige zerlegt werden.

So ist im Dreiecke abc (Fig. 4), weil dasselbe durch die Höhenlinie h in die rechtwinkligen ahm und hbc zerlegt ist, nach

LXXXXIV. $h = a.\sin\gamma$ und $h = c.\sin\alpha$, also

$a.\sin\gamma = c.\sin\alpha$ oder

$a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$, ebenso ist auch

$a : b = \sin\alpha : \sin\beta$ und

$b : c = \sin\beta : \sin\gamma$; d. h.

C. Im schiefwinkligen Dreiecke verhalten sich zwei Seiten wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel.

Ist z. B. $\alpha = 36^\circ 52' 10''$, $\gamma = 63^\circ 7' 50''$, $a = 15$m, wie gross ist c?

$$a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$$

$$c = \frac{a.\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

$$c = N(\lg 15 + \lg \sin 63^\circ 7' 50 - \lg \sin 36^\circ 52' 10)$$
$$c = N(1{,}1760913 + 9{,}9503838 - 9{,}7781467)$$
$$c = N(1{,}3483284) = 22{,}3012 \ldots$$

In dem Dreiecke a h m (Fig. 4) ist:

$$a^2 = m^2 + h^2, \quad m = b - n = b - c.\cos\alpha, \quad h = c.\sin\alpha$$
$$a^2 = (b - c.\cos\alpha)^2 + c^2\sin^2\alpha$$
$$= b^2 - 2bc.\cos\alpha + c^2\cos^2\alpha + c^2.\sin^2\alpha$$
$$= b^2 + c^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) - 2bc.\cos\alpha$$ und nach IX.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$; auf demselben Wege erhält man auch:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma;$$ d. h.

CI. Im schiefwinkligen Dreiecke ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern, weniger dem doppelten Produkte aus diesen Seiten und dem Cosinus des von ihnen gebildeten Winkels.

Die Form dieses Satzes ist zum Logarithmieren nicht geeignet, sie kann aber mit Hilfe früherer Sätze leicht günstiger eingerichtet werden. Soll z. B. ein Winkel, etwa α, aus den drei Seiten des Dreieckes bestimmt werden, so erhält man zunächst:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$ daher auch

$$1 + \cos\alpha = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + 2bc + c^2 - a^2}{2bc}$$ oder

$$1 + \cos\alpha = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc};$$

aus §. 14 erhält man aber $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$, daher

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$ oder

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2bc}\right)}.$$

Wären z. B. die Seiten: a=2, b=3, c=4, so wäre:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{45}{24}}=0{,}5\,.\,\sqrt{1{,}875}$$

$$\lg\cos\frac{\alpha}{2}=\lg 0{,}5+\frac{\lg 1{,}875}{2}+10=9{,}8354716$$

$$\frac{\alpha}{2}=46^{\circ}11'29''$$

$$\alpha=92^{\circ}22'58''.$$

Ein anderer Satz lässt sich aus c ableiten, darnach ist:

$$a:c=\sin\alpha:\sin\gamma \text{ oder}$$

$$(a+c):(a-c)=(\sin\alpha+\sin\gamma):(\sin\alpha-\sin\gamma),$$

$$\text{ist } \alpha=x+z,\ \gamma=x-z$$

$$(a+c):(a-c)=(\sin[x+z]+\sin[x-z]):(\sin[x+z]-\sin[x-z])$$

oder nach IIL. und IL.

$$(a+c):(a-c)=(\sin x.\cos z+\cos x.\sin z+\sin x.\cos z-\cos x.\sin z):$$
$$(\sin x.\cos z+\cos x.\sin z-[\sin x.\cos z\mp\cos x.\sin z])$$

$$\frac{a+c}{a-c}=\frac{2\sin x.\cos z}{2\cos x.\sin z}=\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} z}$$

Aus der Annahme ist $x=\frac{\alpha+\gamma}{2}$, $z=\frac{\alpha-\gamma}{2}$, daher

$$(a+c):(a-c)=\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right):\operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2};\ \text{d. h.}$$

CII In jedem Dreiecke verhält sich die Summe zweier Seiten zu der Differenz dieser Seiten, wie die Tangente aus der halben Summe der zwei, diesen Seiten gegenüberliegenden Winkeln zur halben Differenz dieser Winkel.

Wenn z. B.

$$a+c=864,\ a-c=170,\ \frac{\alpha+\gamma}{2}=63^{\circ}25'40'',\ \text{so ist}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2}=\frac{170\operatorname{tg}63^{\circ}25'40''}{864}\ \text{und}$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{\alpha-\gamma}{2} = \lg 170 + \lg \operatorname{tg} 60^{0} 25' 40'' - \lg 864;$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{\alpha-\gamma}{2} = 2,2304489 + 10,3008941 - 2,9065137$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{\alpha-\gamma}{2} = 9,5948293$$

$$\frac{\alpha-\gamma}{2} = 21^{0} 28' 28'' \text{ und}$$

$$\frac{\alpha+\gamma}{2} = 63^{0} 25' 40'', \text{ daher}$$

$$\alpha = 84^{0} 54' 8''$$

$$\beta = 42^{0} 57' 12''.$$

§. 22.

Flächeninhalt des Dreieckes.

Der Flächeninhalt eines Dreieckes kann, wenn bestimmte Teile gegeben sind, berechnet werden und zwar in folgenden Fällen:

1) Wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel bekannt sind, z. B. in Fig. 4, b, c und α. Die Fläche F ist:

$$F = \frac{b \cdot h}{2}, \quad h = c \cdot \sin \alpha$$

CIII. $$F = \frac{b \cdot c \cdot \sin \alpha}{2}, \text{ d. h.}$$

Der Flächeninhalt ist gleich dem halben Produkte aus zwei Seiten und dem Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

2) Wenn zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel gegeben sind, z. B. b, c und γ (in Fig. 4).

In diesem Falle berechnet man zuerst einen zweiten Winkel nach dem Satze C., wodurch dieser Fall auf den ersten reduziert werden kann.

3) Wenn eine Seite und die zwei anliegenden Winkel gegeben sind. Auch dieser Fall kann nach dem Satz C. auf den ersten zurückgeführt werden.