Das Elementare der ebenen Geometrie

Lehmann, Franz Xaver

Karlsruhe, 1888

Auflösung des rechtwinkligen Dreieckes

Sind die Bogen sehr klein, betragen sie nur Teile einer Sekunde oder einzelne Sekunden, so kann der Sinus gleich dem Bogen angenommen werden; man erhält dann:

$$\text{LXXXIII.}\quad \sin 1'' = \operatorname{arc} 1'' = \frac{2\pi}{360 \,.\, 60 \,.\, 60}\, 0{,}0000048481368 \ldots$$

Durch Benützung der Sätze des §. 5 können mittels der Werte des Sinus die der übrigen Funktionen gewonnen werden.

Die Logarithmen der Funktionen sind für Winkel 0° bis 90° in den trigonometrischen Tafeln zusammengestellt. Wie die Funktionen für andere Winkel gefunden werden, ist in §. 9 angegeben.

§. 20.

Auflösung des rechtwinkligen Dreieckes.

Die Teile eines rechtwinkligen Dreieckes lassen sich durch folgende Sätze bestimmen:

LXXXIV. Die Kathete ist gleich dem Produkte aus dem Sinus des gegenüberliegenden Winkels und der Hypotenuse.

Nach I. ist nämlich:

$$\frac{b_1\, c_1}{a\, c_1} = \sin \alpha, \text{ also}$$

$$b_1\, c_1 = a\, c_1 \sin \alpha, \text{ ebenso}$$

$$m\, l = r \,.\, \sin \alpha,$$

oder, nach demselben Satze I.,

$$\frac{b_1\, a}{c_1\, a} = \sin \delta$$

$$b_1\, a = c_1\, a \,.\, \sin \delta \text{ und}$$

$$gl = r \,.\, \sin \delta.$$

Z. B. für $a\, c_1 = 15\,\text{m}$, $\alpha = 36°\, 52'\, 10''$ ist

$$\begin{aligned} b_1\, c_1 &= 15 \,.\, \sin 36°\, 52'\, 10'' \\ b_1\, c_1 &= N\,(\lg 15 + \lg \sin 36°\, 52'\, 10'' - 10) \\ &= N\,(1{,}1760913 + 9{,}7781467 - 10) \\ &= N\,(0{,}9542380) = 8{,}9999 \ldots \text{ m.} \end{aligned}$$

LXXXXV. Die Kathete ist gleich dem Produkte aus dem Cosinus des anliegenden Winkels und der Hypotenuse.

Denn nach Satz IV. ist

$$\frac{a\,b_1}{a\,c_1} = \cos\alpha.$$

$$a\,b_1 = a\,c_1 \,.\, \cos\alpha \text{ und}$$

$$\frac{g\,l}{r} = \cos\alpha.$$

$$g\,l = r\,.\,\cos\alpha;$$

Oder:

$$c_1\,b_1 = a\,c_1\,.\,\cos\delta \text{ und}$$

$$l\,m = r\,.\,\cos\delta.$$

Z. B. $a\,b_1 = 15\text{ m}, \; \alpha = 30^\circ\,52'\,10''$

$$\begin{aligned} a\,b_1 &= N\,(\lg 15 + \lg\cos 36^\circ\,52'\,10'' - 10) \\ &= N\,(1{,}1760913 + 9{,}9030926 - 10) \\ &= N\,(1{,}0791839) = 12{,}0001 \;.\;.\;.\; \text{m}. \end{aligned}$$

LXXXXVI. Die Kathete ist gleich dem Produkte aus der Tangente des gegenüberliegenden Winkels und der andern Kathete.

Aus II. ist:

$$b_1\,c_1 = a\,b_1\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

$$n\,h = r\,.\,\mathrm{tg}\,\alpha, \text{ oder}$$

$$a\,b_1 = c_1\,b_1\,\mathrm{tg}\,\delta,$$

$$h\,g = h\,n\,.\,\mathrm{tg}\,\delta.$$

Z. B. $a\,b_1 = 12{,}0001\,.\,\text{m}, \alpha = 36^\circ 52' 10''$

$$\begin{aligned} b_1\,c_1 &= N\,(\lg 12{,}0001 \ldots + \lg\,\mathrm{tg}\,36^\circ 52' 10'' - 10) \\ &= N\,(1{,}0791839 + 9{,}8750541 - 10) \\ &= N\,(0{,}9542380) = 8{,}9999. \end{aligned}$$

LXXXXVII. Die Kathete ist gleich dem Produkte aus der Cotangente des anliegenden Winkels und der andern Kathete.

Nach V. ist:

$$a\,b_1 = b_1\,c_1\,\mathrm{cotg}\,\alpha \text{ und}$$

$$h\,g = h\,n\,.\,\mathrm{cotg}\,\alpha, \text{ oder}$$

$$b_1\,c_1 = a\,b_1\,\mathrm{cotg}\,\delta \text{ und}$$

$$h\,n = h\,g\,.\,\mathrm{cotg}\,\delta.$$

Ebenso folgt

LXXXXVIII. Die Hypotenuse ist gleich dem Quotienten aus einer Kathete und dem Sinus des ihr gegenüberliegenden Winkels.

LXXXXIX. Die Hypotenuse ist gleich dem Quotienten aus einer Kathete und dem Cosius des der Kathete anliegenden Winkels.

Zur Bestimmung der Winkel aus zwei gegebenen Seiten können die Sätze I. bis VI. unmittelbar benützt werden.

Z. B. von $a c_1 = 15$ m, $b_1 c_1 = 8{,}9999 \ldots$ m, wie gross ist α?

Nach I. ist:

$$\sin \alpha = \frac{b_1 c_1}{a c_1}$$

$$\lg \sin \alpha = \lg b_1 c_1 - \lg a c_1 + 10 = \lg 8{,}9999 \ldots - \lg 15 + 10$$
$$\lg \sin \alpha = 0{,}9542380 - 1{,}1760913 + 10 = 9{,}7781467$$
$$\alpha = 36^\circ 52' 10''.$$

§. 21.

Auflösung des schiefwinkligen Dreieckes.

Die schiefwinkligen Dreiecke lassen sich, wenn bestimmte Teile derselben gegeben sind, im allgemeinen dadurch auflösen, dass sie durch Höhenlinien in rechtwinklige zerlegt werden.

So ist im Dreiecke abc (Fig. 4), weil dasselbe durch die Höhenlinie h in die rechtwinkligen ahm und hbc zerlegt ist, nach

LXXXXIV. $h = a . \sin \gamma$ und $h = c . \sin \alpha$, also

$a . \sin \gamma = c . \sin \alpha$ oder

$a : c = \sin \alpha : \sin \gamma$, ebenso ist auch

$a : b = \sin \alpha : \sin \beta$ und

$b : c = \sin \beta : \sin \gamma$; d. h.

C. Im schiefwinkligen Dreiecke verhalten sich zwei Seiten wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel.

Ist z. B. $\alpha = 36^\circ 52' 10''$, $\gamma = 63^\circ 7' 50''$, $a = 15$m, wie gross ist c?

$$a : c = \sin \alpha : \sin \gamma$$

$$c = \frac{a . \sin \gamma}{\sin \alpha}$$